

---

# Identifikation von Deformationsprozessen einfacher Tragwerke mittels adaptiver Kalman-Filterung im analytischen statischen Auswertemodell

Anna SVIRIDOVA und Andreas EICHHORN

TU Darmstadt, Institut für Geodäsie, Fachgebiet Geodätische Messsysteme und Sensorik,  
sviridova@geod.tu-darmstadt.de

## 1 Einleitung

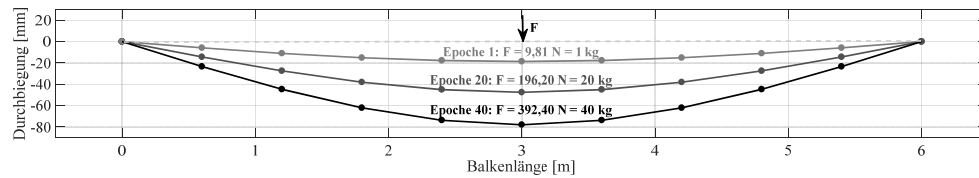
Das adaptive Kalman-Filter wird in der Ingenieurgeodäsie unter anderem dazu eingesetzt, um mittels geodätischer Messungen ein gewähltes Modell (Systemgleichungen) zur Beschreibung des Objektverhaltens optimal anzupassen (siehe z. B. HEUNEKE 1995, EICHHORN 2005). Wenn diese Anpassung auf Basis geschätzter Materialparameter im funktionalen (deterministischen) Teil des Modells erfolgt, wird dieser Vorgang „Modell-Kalibrierung“ genannt.

Wird die Modellwahl selbst zur Diskussion gestellt, muss die Anpassung auch auf den stochastischen Teil des Modells erweitert werden. Mit einer sogenannten „Störgrößen-Modellierung“ kann versucht werden, die verbleibenden hinreichend kleinen systematischen Unzulänglichkeiten des Modells hinsichtlich der Realität stochastisch zu modellieren. Zur Bestimmung der stochastischen Parameter müsste die Varianzkomponentenschätzung (VKS) in die adaptive Kalman-Filterung integriert werden (siehe z. B. WANG 1997, HU 2013).

Auf Basis von synthetisch generierten Deformationsmessungen an einem belasteten Balken soll in diesem Beitrag gezeigt werden, dass die Ideen der „Modell-Kalibrierung“ und „Störgrößen-Modellierung“ für Belastungsversuche an einem Biegebalken grundsätzlich funktionieren. Dazu werden die Ergebnisse von numerischen Experimenten vorgestellt, die die Schätzung der Biegesteifigkeit im Rahmen einer adaptiven Kalman-Filterung realisieren.

## 2 Modellierung von Belastungsversuchen an einem Biegebalken

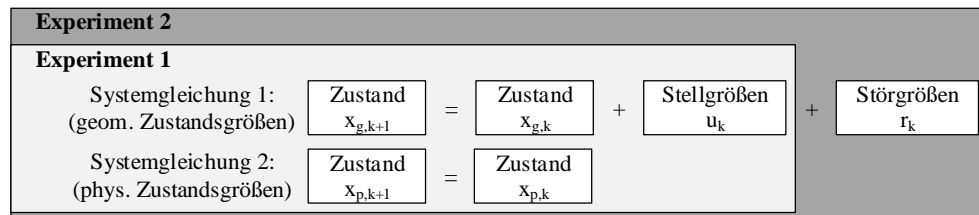
Beim Untersuchungsobjekt handelt es sich um einen 6-Meter langen, zweifach gelenkig gelagerten Einfeldträger (Balken) aus Aluminium, der in seiner Mitte durch eine Einzelkraft  $F$  belastet wird.



**Abb. 1:** Modellierte Balkendurchbiegung bei unterschiedlichen Belastungen

Bei 40 Belastungsversuchen wird Einzelkraft  $F$  bei jedem neuen Versuch um jeweils 9,81 N (= 1 kg) erhöht und die Durchbiegung im Sinne einer Messepoche erfasst (vgl. Abbildung 1).

Die gemeinsame Modellierung aller Belastungsversuche im Rahmen eines adaptiven Kalman-Filters wird mit zwei numerischen Experimenten untersucht. In beiden Experimenten wird u. a. die Biegesteifigkeit  $EI$  und deren Standardabweichung  $s_{EI}$  iterativ bestimmt, wobei Experiment 1 eine „Modell-Kalibrierung“ und Experiment 2 eine zusätzliche „Störgrößen-Modellierung“ realisieren soll (vgl. Abbildung 2).



**Abb. 2:** Schematische Darstellung der numerischen Experimente

## 2 Modell-Kalibrierung

Bei diesem numerischen Experiment wird sowohl für die Generierung der synthetischen Durchbiegungen als auch für die Modellierung im adaptiven Kalman-Filter bei allen Belastungsversuchen das gleiche Modell (Bernoulli-Balken) verwendet, so dass Modell und gemessene Realität bis auf stochastische Abweichungen übereinstimmen. Die zu bestimmende Biegesteifigkeit  $EI$  sei auf 0,5 kN/m<sup>2</sup> genau bekannt, d. h. der Anfangswert für den zu schätzenden Materialparameter kann maximal um diesen Betrag vom gesuchten Wert abweichen.

Abbildung 3 zeigt, dass die Schätzung des Materialparameters nach einer kurzen Identifikationsphase des Filters gegen den Sollwert konvergiert. Die Unsicherheit dieser Schätzung verringert sich von der 1. bis zur 40. Iteration um ein 1/10 auf ca. 3 N/m<sup>2</sup>.

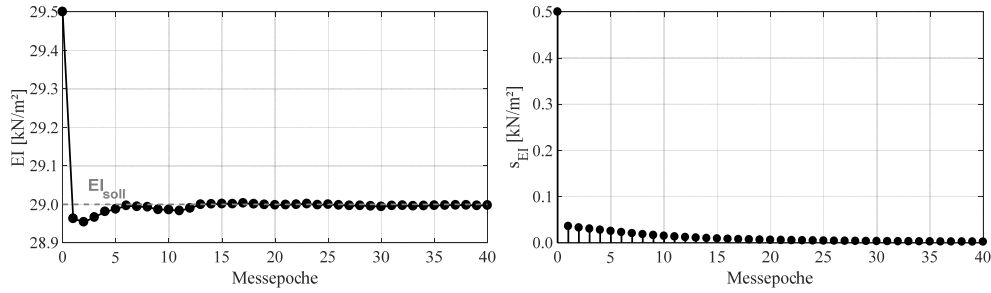


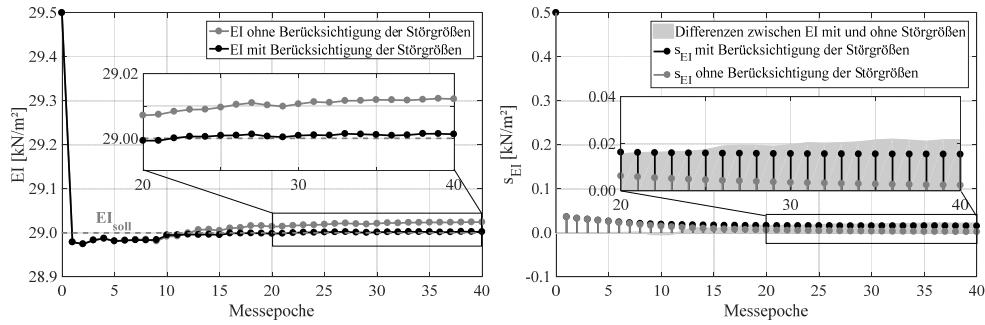
Abb. 3: Schätzung der Biegesteifigkeit  $EI$  (links) und deren Unsicherheit  $s_{EI}$  (rechts)

### 3 Störgrößen-Modellierung

Um zu zeigen, welchen Einfluss eine unzulängliche Modellwahl bei der Analyse von gemessenen Durchbiegungen haben kann, werden bei diesem numerischen Experiment die synthetischen Durchbiegungsmessungen aller 40 Belastungsversuche auf Basis eines komplexeren Modells (Timoschenko-Balken (MERKEL 2014)) generiert. Für die Modellierung im adaptiven Kalman-Filter wird jedoch weiterhin das (jetzt unzulängliche) Modell des Bernoulli-Balkens verwendet. Zur Kompensation dieser Modellunzulänglichkeiten wird eine sogenannte Störgrößen-Modellierung verwendet, die die (hier bekannten) systematischen Abweichungen in den Durchbiegungen zwischen beiden Balken-Theorien durch ein stochastisches Modell beschreibt. D. h. die systematischen Abweichungen in jedem Belastungsversuch werden als Varianzen in der Varianz-Kovarianz-Matrix der Störgrößen  $Q_{rr}$  aufgefasst:

$$Q_{rr} = \text{diag}(w_{i,\text{Timoschenko}} - w_{i,\text{Bernoulli}})^2 \quad (1)$$

Die Varianzen (bzw. die Differenzen zwischen den Balken-Theorien) werden umso größer je größer die angreifende Einzelkraft  $F$  ist und sind somit für jeden Iterationsschritt (Belastungsversuch) neu zu bestimmen. Im Rahmen der Varianzfortpflanzung bei der Berechnung der Prädiktionsgenauigkeit führt die Berücksichtigung von  $Q_{rr}$  zu den wachsenden Unsicherheiten in den prädizierten Durchbiegungen. Im Gegensatz dazu bleiben die Unsicherheiten in den Messungen konstant. Dies führt zu einer höheren Gewichtung der Messdaten gegenüber den prädizierten Werten und zu einer Konvergenz des geschätzten Materialparameters zum Sollwert (vgl. Abbildung 4 links).



**Abb. 4:** Vergleich der Schätzung der Biegesteifigkeit  $EI$  (links) und deren Unsicherheit  $s_{EI}$  (rechts) mit und ohne stochastischer Modellierung der Störgrößen

Während bei den kleinen Belastungen der Unterschied zwischen Timoschenko- und Bernoulli-Theorie sehr klein ist und somit die geschätzte Biegesteifigkeit für beide Fälle übereinstimmt, werden diese bei den größer werdenden Belastungen signifikanter.

Bei der Schätzung mit der stochastischen Störgrößen-Modellierung erfolgt die Konvergenz des Filterergebnisses zum richtigen Wert ( $EI_{soll}$ ) mit der 10. Iteration. Werden die Modellunzulänglichkeiten nicht kompensiert, konvergieren die Schätzungen der Biegesteifigkeit nicht zum Sollwert.

Dass die Standardabweichung für die geschätzte Biegesteifigkeit ohne stochastischen Störgrößen-Modellierung kleiner ist, resultiert aus kleineren Unsicherheiten für die falsch prädierten Durchbiegungen, weil hier der Unsicherheitsanteil aus der Störgrößen-Modellierung in der Varianzfortpflanzung fehlt (vgl. Abbildung 4 rechts) und die Prädiktion damit zu optimistisch bewertet wird.

## 4 Zusammenfassung und Ausblick

Falls bei der adaptiven Kalman-Filterung mit einem unzureichenden Modell gearbeitet wird, erhält man systematisch verfälschte Schätzungen der Modellparameter, weil die Gewichtsabstimmung zwischen Mess- und prädierten Größen aufgrund fehlender Unsicherheitsanteile nicht korrekt ist. Diese fehlenden Unsicherheitsanteile ergeben sich über Varianzfortpflanzung aus den stochastischen Parameter der Störgrößen-Modellierung.

Im Gegensatz zu den hier vorgestellten Untersuchungen mit synthetischen Daten ist eine Information über die Größe der stochastischen Parameter in der Realität nicht unmittelbar verfügbar, denn die konkreten Abweichungen des Modells zur Realität sind im Allgemeinen nicht bekannt. Man muss deshalb versuchen, diese Information aus den Messungen aller Epochen zu gewinnen, was wiederum nur gelingt, wenn das Problem der Gewichtsabstimmung zwischen Mess- und prädierten Größen im Rahmen einer Varianzkomponentenschätzung zufriedenstellend gelöst werden kann.

Gelingt es überdies den stochastischen Anteil der Messungen vorab (unabhängig von der Kalman-Filterung) gut zu bestimmen, müsste es möglich sein (auf Basis der jetzt bekannten

Gewichtsabstimmung), die stochastischen Parameter einer Störgrößen-Modellierung richtig zu bestimmen, um damit die eventuellen Abweichungen zum gewählten Modell zu quantifizieren.

## **Literatur**

- EICHHORN, A. (2005): Ein Beitrag zur Identifikation von dynamischen Strukturmodellen mit Methoden der adaptiven Kalman-Filterung, Dissertation, Universität Stuttgart
- HEUNEKE, O. (1998): Zur Identifikation und Verifikation von Deformationsprozessen mittels adaptiver Kalman-Filterung, Dissertation, Universität Hannover
- HU, C. (2013): Adaptive Kalman Filtering for Vehicle Navigation. In: Journal of Global Positioning Systems, Vol. 2: 42-47
- MERKEL, M. & OECHSNER, A. (2014): Eindimensionale Finite Elemente. Springer Vieweg Verlag, Heidelberg
- WANG, J. (1997): Filtermethoden zur fehlertoleranten kinematischen Positionsbestimmung, Dissertation, Universität der Bundeswehr München