

Leopold-Franzens Universität Innsbruck  
Fakultät für Mathematik, Informatik und Physik

Institut für Theoretische Physik

Quantum Optics and Cavity Quantum Electrodynamics



## **Bachelorarbeit**

zur Erreichung des akademischen Grades

## **Bachelor of Science**

# **Photonenstatistik von kooperativer Emission gekoppelter Dipole**

von

Philipp Zwetkoff

Abgabe: 28. Juli 2021

Betreuer: Univ.-Prof. Mag. Dr. Helmut Ritsch  
David Plankensteiner, PhD

## Eidesstattliche Erklärung

*Ich erkläre hiermit an Eides statt durch meine eigenhändige Unterschrift, dass ich die vorliegende Arbeit selbstständig verfasst und keine anderen als die angegebenen Quellen und Hilfsmittel verwendet habe. Alle Stellen, die wörtlich oder inhaltlich den angegebenen Quellen entnommen wurden, sind als solche kenntlich gemacht.  
Ich erkläre mich mit der Archivierung der vorliegenden Bachelorarbeit einverstanden.*

Ort und Datum: \_\_\_\_\_

Unterschrift: \_\_\_\_\_

# Inhaltsverzeichnis

<b>Zusammenfassung</b>	<b>1</b>
<b>1 Einleitung und Motivation</b>	<b>2</b>
<b>2 Theorie</b>	<b>4</b>
2.1 Grundlagen der Licht-Materiewechselwirkung . . . . .	4
2.2 Herleitung des Modells . . . . .	5
2.2.1 Hamiltonoperatoren . . . . .	5
2.2.2 Dicke Zustände . . . . .	8
2.2.3 Zeitentwicklung des Systems . . . . .	9
2.3 Photonenstatistik . . . . .	10
<b>3 Simulation mit dem QuantumOptics.jl Paket</b>	<b>12</b>
3.1 Beschreibung der Beispiele . . . . .	12
3.1.1 Spontan zerfallendes System im angeregten Zustand . . . . .	13
3.1.2 Lasergetriebenes System im Grundzustand . . . . .	13
3.2 Programmierung . . . . .	13
3.3 Interpretation der Resultate . . . . .	16
<b>4 Conclusio</b>	<b>20</b>
<b>Literaturverzeichnis</b>	<b>i</b>

# Zusammenfassung

In dieser Arbeit wird spontane Emission von  $N$  identischen Spin- $\frac{1}{2}$  Atomen im Dicke Limit (Unterraum der symmetrischen Zustände, da die Atome ununterscheidbar sind) untersucht, wobei beim Zerfall symmetrischer Zustände von Mehr-Atom Systemen durch die Dipol-Dipol-Wechselwirkung superradiante Strahlung entsteht [9].

Weiters wird die Photonenstatistik diskutiert, also das statistische Mittel des Besetzungszahloperators der Photonen, geplottet als Funktion der Zeit. Dazu wird ein Zusammenhang zwischen der Emissionsintensität und den kollektiven Spinoperatoren des Atom-Systems hergestellt. Zusätzlich wird die Art der Strahlung durch eine Intensitätskorrelationsfunktion beschrieben, aus der folgt, ob die Photonen gebunched, oder antigebunched sind, oder die Strahlung kohärent ist.

Es zeigt sich, dass durch Wechselwirkung der Atome untereinander ein gerichteter Puls emittiert wird, der am Intensitätsmaximum annähernd kohärent ist.

# 1 Einleitung und Motivation

Wenn viele im angeregten Zustand präparierte, identische Zwei-Zustands Atome, auf kleinem Raum angenähert sind, und spontan zerfallen, zeigt sich eine neue Wechselwirkung. Die Atome zerfallen nicht mehr unabhängig, sondern es erfolgt kaskadenartiger, gleichzeitiger Zerfall. Die Intensität der emittierten Strahlung folgt nicht mehr dem erwarteten, exponentiell abfallenden Verlauf der spontanen Emission proportional zur Atomanzahl, sondern einem räumlich gerichteten Puls mit Intensitätsmaximum proportional zum Quadrat der Atomanzahl. Diese kooperative spontane Emission wird auch superradiante Strahlung genannt.

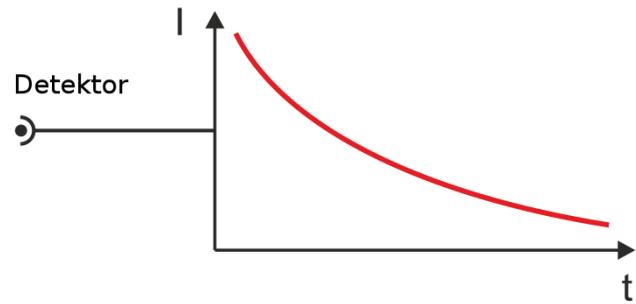
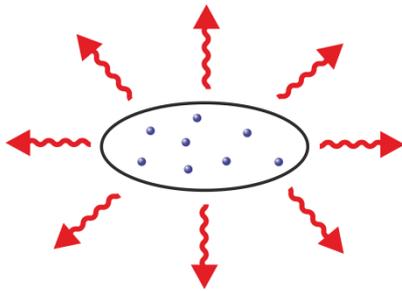
In Abb. 1.1 wird die Intensität der Strahlung für unterschiedlichen Atomabstand als Funktion der Zeit dargestellt. Bei großem Abstand findet keine Wechselwirkung zwischen den Atomen statt und man beobachtet ungekoppelte, spontane Emission in alle Raumrichtungen, auch Fluoreszenz genannt, wie in Abb. 1.1a gezeigt. Für kleinen Abstand wechselwirken die Atome, die kollektive spontane Emission ist dann superradiant gekoppelt und räumlich gerichtet wie in Abb. 1.1b.

Eine mögliche Anwendungen dieser Wechselwirkung sind superradiante Laser. Superradiante Emission ermöglicht es Lasern im "bad cavity" Regime, das heißt mit schlechten Spiegeln, zu operieren. Dadurch ist das elektrische Feld im Resonator schwach und die Linienbreite des Lasers von den thermischen Schwingungen des Resonators entkoppelt. Das vom superradianten Laser emittierte Licht hat dann schmalere Linienbreiten als konventionelle Laser und lässt sich beispielsweise einsetzen um die Stabilität von Uhren um zwei Größenordnungen zu steigern [11].

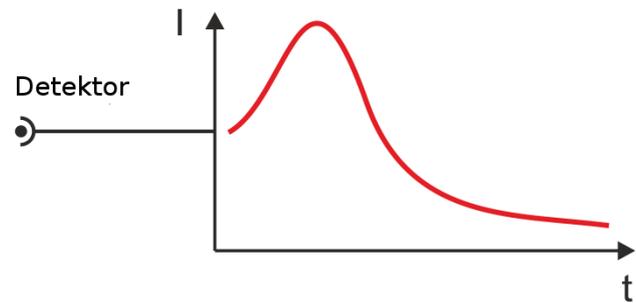
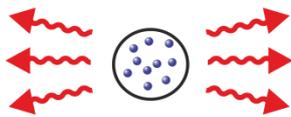
Weiters beschreibt Superradianz eine weit reichende elektromagnetische Wechsel-

## 1 Einleitung und Motivation

wirkung zwischen Quantenpunkten, die eine Möglichkeit bietet Quantenobjekte in großem Maßstab zu koppeln [14].



(a) Fluoreszenz



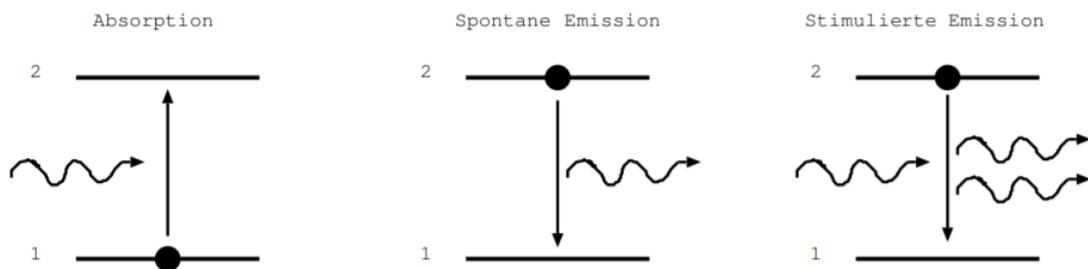
(b) Superradianz

**Abbildung 1.1:** Intensität ungekoppelter und gekoppelter Emission [7]

## 2 Theorie

### 2.1 Grundlagen der Licht-Materiewechselwirkung

Es gibt drei Möglichkeiten wie Licht mit Materie wechselwirken kann, die als erstes von Albert Einstein postuliert wurden [5]. Dazu gehören Absorption und spontane bzw. stimulierte Emission von Photonen. Für diese Arbeit wird hauptsächlich die spontane Emission eine Rolle spielen. Der Vollständigkeit halber sind alle drei Wechselwirkungsmöglichkeiten angeführt. Im folgenden werden alle Wechselwirkungsarten am Zwei-Zustandsatom erklärt. Wenn in dieser Arbeit von Atomen die Rede ist, sind im allgemeinen Zwei-Zustandssysteme gemeint. Die Energieübergänge aller drei Wechselwirkungsarten sind veranschaulicht in Abb. 2.1.



**Abbildung 2.1:** Arten der Licht-Materiewechselwirkung, illustriert am vereinfachten Zwei-Zustands Atom [1]

Die spontane Emission entspricht dem Übergang eines Atoms im angeregten Zustands in den Grundzustand unter Abgabe der Energiedifferenz in Form eines Photons, also elektromagnetischer Strahlung. Dabei geht man von einem Atom aus das in einem angeregten Zustand präpariert ist und über die Dipolwechselwirkung

an das elektromagnetische Vakuumfeld koppelt. Die Wahrscheinlichkeit des Zerfalls wird durch eine exponentielle Kurve vorgegeben.

Stimulierte Emission entspricht dem Atomübergang vom angeregten in den Grundzustand, ausgelöst durch ein Photon mit passender Energie, und gleichzeitiger gerichteter Emission von zwei Photonen.

Bei Absorption nimmt ein Atom im Grundzustand ein Photon, mit einer Frequenz welche der Übergangsenergie entspricht, auf und geht in den angeregten Zustand über.

## 2.2 Herleitung des Modells

Ausgegangen wird von einem Atom, das mit den Feldmoden des umgebenden Vakuums interagieren kann. Zur Beschreibung des Modells werden Energieoperatoren verwendet. Dabei kann das System in drei verschiedene Teile zerlegt werden: die Hamiltonoperatoren von Atom, Feld und Atom-Feld Interaktion:

$$\hat{H} = \hat{H}_a + \hat{H}_f + \hat{H}_{af} \quad (2.1)$$

Die Kopplung der Atome an das freie Feld liefert die Erklärung für den Übergang der Eigenzustände des Atoms.

### 2.2.1 Hamiltonoperatoren

#### Hamiltonoperator des Atoms

Zwei-Zustands Atome sind darstellbar als Spin- $\frac{1}{2}$  System mit  $w_0 = \frac{w_e - w_g}{2}$ ,  $w_e + w_g = 0$ , wobei  $w_e$  die Frequenz des angeregten und  $w_g$  die Frequenz des Grundzustands ist. Die Eigenzustände  $|e\rangle$  und  $|g\rangle$  des Spin-Operators  $\hat{\sigma}_z$ , entsprechen dem angeregten und dem Grundzustand des Atoms und bilden zusammen eine komplette, orthonormale Basis, spannen also den gesamten Hilbertraum auf. Mit den Projektoren  $|e\rangle\langle e|$  und  $|g\rangle\langle g|$  ergibt sich der Zusammenhang mit dem Hamiltonoperator des Atoms

## 2 Theorie

$\hat{H}_a$ :

$$\hat{\sigma}_z = |e\rangle \langle e| - |g\rangle \langle g| \quad (2.2)$$

$$\hat{H}_a = \hbar\omega_e |e\rangle \langle e| + \hbar\omega_g |g\rangle \langle g| = \hbar\omega_0 \hat{\sigma}_z \quad (2.3)$$

Zusätzlich kann man die atomaren Leiteroperatoren definieren, die jeweils Übergänge zwischen angeregtem und Grundzustand bewirken, was Emission und Absorption von Photonen entspricht:

$$\hat{\sigma}_+ = |e\rangle \langle g| \quad (2.4)$$

$$\hat{\sigma}_- = |g\rangle \langle e| \quad (2.5)$$

Da  $\hat{\sigma}_+$  und  $\hat{\sigma}_-$  Fermionen beschreiben, sind sie antivertauschbar.

### Hamiltonoperator des freien Feldes

Die Beschreibung des freien Feldes folgt der, zweite Quantisierung [10] genannten, Entwicklung der Feldmoden in harmonischen Oszillatoren. Diese Besetzungszahldarstellung ist eine quantenmechanische Beschreibung von Prozessen bei denen Teilchen entstehen oder vernichtet werden. Bei Licht-Materie Wechselwirkung sind diese Teilchen Photonen, die als Anregung einer Mode des freien Feldes interpretiert werden. Ausgehend von den Maxwellgleichungen für elektrisches Feld  $\mathbf{E}$  und magnetisches Feld  $\mathbf{B}$  im Vakuum erhält man für die elektromagnetische Energie:

$$\hat{H}_{em} = \frac{1}{2} \int_V dV (\epsilon_0 \mathbf{E}^2 + \frac{1}{\mu_0} \mathbf{B}^2) \quad (2.6)$$

Dies führt weiters zu einer Darstellung als harmonischer Oszillator mit den bosonischen Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren  $\hat{a}^\dagger$ ,  $\hat{a}$  und mit dem Besetzungszahloperator  $\hat{n}$ :

$$\hat{H}_f = \hbar\omega_f \hat{a}^\dagger \hat{a} = \hbar\omega_f \hat{n} \quad (2.7)$$

Die Zustände  $|n\rangle$  sind die Eigenzustände von  $\hat{n}$ . Deren Eigenwerte entsprechen der Besetzungszahl  $n$  der Mode des freien Feldes mit Frequenz  $\omega_f$ . Die Nullpunktenergie wurde vernachlässigt. Das elektrische Feld einer einzelnen Mode wird dann [6]:

$$\hat{\mathbf{E}} \propto \mathbf{e}_x E_0 (\hat{a}^\dagger + \hat{a}) \quad (2.8)$$

### Hamiltonoperator der Atom-Feld Wechselwirkung

Durch minimale Kopplung erhält man eine Beschreibung der Dipolwechselwirkung zwischen Atomwellenfunktion und Moden des umgebenden freien Feldes. Voraussetzung dafür ist, dass das elektrische Feld im betrachteten Raum konstant ist. Dies ist der Fall, da die Wellenlänge von Licht um ein vielfaches größer ist als ein Atomradius. Für ein klassisches Potential  $U$  gilt mit Dipolmoment  $\mathbf{d}$  und elektrischem Feld  $\mathbf{E}$ :

$$U = -\mathbf{d} \cdot \mathbf{E} \quad (2.9)$$

In der quantenmechanischen Beschreibung müssen  $\mathbf{d}$  und  $\mathbf{E}$  durch die jeweilige Operator Darstellung ersetzt werden.  $\hat{\mathbf{E}}$  wurde schon in Glg. 2.8 gezeigt, der Dipoloperator ist das Produkt von Ladung  $q$  und Ortsoperator  $\hat{\mathbf{r}}$ :

$$\hat{\mathbf{d}} = q \cdot \hat{\mathbf{r}} \quad (2.10)$$

Die Darstellung bezüglich der orthonormalen Atom-Basis  $|e\rangle$  und  $|g\rangle$  ergibt:

$$\hat{\mathbf{d}} = \mathbb{1} \hat{\mathbf{d}} \mathbb{1} = \sum_{i,j} |i\rangle \langle i| \hat{\mathbf{d}} |j\rangle \langle j| = q \sum_{i,j} \langle i| \hat{\mathbf{r}} |j\rangle |i\rangle \langle j| \quad (2.11)$$

Die Diagonalelemente, für die gilt  $\langle g| \hat{\mathbf{r}} |g\rangle = \langle e| \hat{\mathbf{r}} |e\rangle = 0$ , verschwinden. Da die Nicht-Diagonalelemente komplex konjugiert sind, kann man diese, wenn man sie ohne Beschränkung der Allgemeinheit als real annimmt, gemeinsam mit  $q$  in  $\mathbf{d}$  integrieren, welches in Richtung von  $\mathbf{E}$  zeigt, und erhält dann:

$$\hat{\mathbf{d}} = q(\langle g| \hat{\mathbf{r}} |e\rangle |g\rangle \langle e| + \langle e| \hat{\mathbf{r}} |g\rangle |e\rangle \langle g|) = \mathbf{d}(\hat{\sigma}_+ + \hat{\sigma}_-) \quad (2.12)$$

Durch Einsetzen von Glg. 2.12 und Glg. 2.8 in das klassische Potential (Glg. 2.9) mit  $g = -\frac{d E_0}{\hbar}$  erhält man:

$$\hat{H}_{af} = -\hat{\mathbf{d}} \cdot \hat{\mathbf{E}} = \hbar g (\hat{\sigma}_+ + \hat{\sigma}_-) (\hat{a} + \hat{a}^\dagger) \quad (2.13)$$

Im Heisenbergbild rotieren die Aufsteige- und Erzeugungsoperatoren mit positiver, die Absteige- und Vernichtungsoperatoren mit negativer Frequenz bezüglich dem Anfangszustand. Die Terme deren Frequenzen gleiche Vorzeichen haben, rotieren so

## 2 Theorie

schnell, dass sie im Zeitmittel vernachlässigbar sind. Diese Rotating Wave Approximation genannte Vereinfachung [3] führt zu:

$$\hat{H}_{af} = \hbar g (\hat{\sigma}_+ \hat{a} + \hat{\sigma}_- \hat{a} + \hat{\sigma}_+ \hat{a}^\dagger + \hat{\sigma}_- \hat{a}^\dagger) \approx \hbar g (\hat{\sigma}_+ \hat{a} + \hat{\sigma}_- \hat{a}^\dagger) \quad (2.14)$$

### Jaynes-Cummings Operator

Setzt man alle drei Teile zusammen in Glg. 2.1 ein führt das zu einem vereinfachten Jaynes-Cummings Hamiltonoperator, welcher ein Atom beschreibt, das mit einer einzelnen Mode mit Frequenz  $\omega_f$  wechselwirkt. Die Wechselwirkung ist umso wahrscheinlicher, je näher  $\omega_f$  bei der Übergangsfrequenz des Atoms  $\omega_0$  liegt:

$$\hat{H}_{JC} = \hbar\omega_0 \hat{\sigma}_z + \hbar\omega_f \hat{a}^\dagger \hat{a} + \hbar g (\hat{\sigma}_+ \hat{a} + \hat{\sigma}_- \hat{a}^\dagger) \quad (2.15)$$

### 2.2.2 Dicke Zustände

Zur Beschreibung eines  $N$ -Atom Systems, dessen Atome alle im angeregten Zustand präpariert sind, macht man sich die Tatsache zu Nutze, dass unter kollektivem Zerfall nur symmetrische Zustände erreicht werden [4]. Das bedeutet, dass es für die physikalische Beschreibung keinen Unterschied macht welches Atom zerfällt, da der Zustand sich nicht unter Teilchenaustausch ändert. Die Superposition von  $N$  Spin( $\frac{1}{2}$ )-Systemen entspricht deshalb einem Spin( $\frac{N}{2}$ )-System mit den kollektiven Operatoren:

$$\hat{S}_\pm = \sum_{n=1}^N \hat{\sigma}_\pm^{(n)} \quad (2.16)$$

$$\hat{S}_z = \sum_{n=1}^N \hat{\sigma}_z^{(n)} \quad (2.17)$$

Die entsprechenden Zustände werden durch das Dicke Modell beschrieben. Ein Vorteil des sogenannten Dicke Limit ist, dass sich die Dimension des zugrundeliegenden Hilbertraums von  $2^N$  auf  $N + 1$  reduziert, wodurch die Rechenzeit numerischer Kalkulationen für große  $N$  drastisch verringert werden kann. Wenn man nun statt eines Atoms ein  $N$ -Atom System beschreiben möchte, dessen Atome alle identische Übergangsfrequenzen haben und gleich stark an die Mode des freien Feldes koppeln, wird

## 2 Theorie

aus dem Jaynes-Cummings Hamiltonian (Glg. 2.15) der Tavis-Cummings Hamiltonian:

$$\hat{H}_{TC} = \hbar\omega_0 \hat{S}_z + \hbar\omega_f \hat{a}^\dagger \hat{a} + \hbar g (\hat{S}_+ \hat{a} + \hat{S}_- \hat{a}^\dagger) \quad (2.18)$$

Durch Superposition werden die einfachen Atomoperatoren durch die kollektiven aus Glg. 2.16 und Glg. 2.17 ersetzt.

### 2.2.3 Zeitentwicklung des Systems

Die Zeitentwicklung gemischter Zustände wird durch die Von-Neumann Gleichung beschrieben:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\frac{i}{\hbar} [\hat{H}, \rho] \quad (2.19)$$

Dabei beschreiben  $\hat{H}$  und  $\rho$  Hamiltonoperator und Dichteoperator des betrachteten Systems. Für offene Systeme, das sind solche in denen Energie nicht erhalten ist, gilt die Mastergleichung [12]:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\frac{i}{\hbar} [\hat{H}, \rho] + \mathcal{L}[\rho](J) \quad (2.20)$$

Der Lindbladterm  $\mathcal{L}$  berücksichtigt die Energieänderung mit Hilfe eines entsprechenden Sprungoperators  $J$ :

$$\mathcal{L}[\rho](J) = \frac{\Gamma}{2} (2J\rho J^\dagger - J^\dagger J\rho - \rho J^\dagger J) \quad (2.21)$$

#### Herleitung der Mastergleichung

Für die Herleitung der Mastergleichung geht man von einem System aus, welches mit einem Bad oder Reservoir wechselwirkt. Als Reservoir kommen Systeme in Frage, deren Gesamtenergiebilanz durch die Wechselwirkungsenergie kaum beeinflusst werden. Wenn man nur an der Zeitentwicklung des Systems interessiert ist, kann man die Freiheitsgrade des Reservoirs durch Ausspuren eliminieren, und erhält dann unter Anwendung der Born-Markov Näherung Glg. 2.20 als Beschreibung. Dem in dieser Arbeit beschriebenen System, entsprechen die  $N$ -Atome und die umliegenden Moden des freien Feldes dem Reservoir. Voraussetzung für die Anwendung der

Mastergleichung ist, dass die Moden des freien Feldes dicht liegen, und die Energieänderung durch die Atom-Feld Wechselwirkung für das Reservoir vernachlässigbar ist.

### Zusammenhang zwischen Atom und Feldoperatoren

Durch die Hamiltonians des Atoms (Glg. 2.3) und der Wechselwirkung (Glg. 2.14), lässt sich für ein Atomsystem welches mit einem umgebenden freien Feld interagiert ein Zusammenhang zwischen Atom- und Feldoperatoren herstellen. Allerdings müssen noch die einfachen Atomoperatoren durch die kollektiven ersetzt werden. Für die Zeitentwicklung der Feldoperatoren mittels Heisenberggleichung ergibt sich:

$$\begin{aligned} \frac{d\hat{a}}{dt} &= \frac{i}{\hbar} [\hat{H}_a + \hat{H}_{af}, \hat{a}] = \\ &= \frac{i}{\hbar} (\hbar\omega_0 [\hat{S}_z, \hat{a}] + \hbar g [\hat{S}_+ \hat{a} + \hat{S}_- \hat{a}^\dagger, \hat{a}]) = \\ &= -i g \hat{S}_- \end{aligned} \quad (2.22)$$

Durch Lösen dieser Differentialgleichung erhält man:

$$\hat{a}(t) \propto \hat{S}_-(t) \quad (2.23)$$

$$\hat{a}^\dagger(t) \propto \hat{S}_+(t) \quad (2.24)$$

Daraus folgt für die Darstellung der Photonenbesetzung:

$$\hat{n} = \hat{a}^\dagger \hat{a} \propto \hat{S}_+ \hat{S}_- \quad (2.25)$$

Da für die Intensität  $I = \hat{E}^\dagger \hat{E}$  gilt, wird mit Glg. 2.8 klar, dass auch die Strahlungsisität proportional zur Photonenbesetzung ist, und sich somit auch durch die kollektiven Atomoperatoren ausdrücken lässt. Man kann also alleine durch Zeitentwicklung des Atomsystems Rückschlüsse über die Dynamik des umgebenden Feldes ziehen.

## 2.3 Photonenstatistik

Die Beschreibung des statistischen Charakters der Strahlung erfolgt über eine Intensitätsfluktuationskorrelation, welche den Zusammenhang der Intensitäten eines

## 2 Theorie

Feldes an zwei Raumzeitpunkten  $(\mathbf{r}_1, t_1)$  und  $(\mathbf{r}_2, t_2)$  angibt [10]:

$$g^{(2)}(\mathbf{r}_1, t_1; \mathbf{r}_2, t_2) = \frac{\langle \hat{\mathbf{E}}^*(\mathbf{r}_1, t_1) \hat{\mathbf{E}}^*(\mathbf{r}_2, t_2) \hat{\mathbf{E}}(\mathbf{r}_2, t_2) \hat{\mathbf{E}}(\mathbf{r}_1, t_1) \rangle}{\langle \hat{\mathbf{E}}^*(\mathbf{r}_1, t_1) \hat{\mathbf{E}}(\mathbf{r}_1, t_1) \rangle \langle \hat{\mathbf{E}}^*(\mathbf{r}_2, t_2) \hat{\mathbf{E}}(\mathbf{r}_2, t_2) \rangle} \quad (2.26)$$

Für ebene Wellen in  $z$ -Richtung geht die Ortsabhängigkeit nur über  $z$  ein, wodurch die Raumzeitkoordinaten der Felder in  $\tau = t_2 - t_1 - \frac{z_2 - z_1}{c}$  zusammengefasst werden können.  $g^{(2)}(\tau)$  zeigt dann besonders für  $\tau = 0$  interessante Eigenschaften:

$$g^{(2)}(0) = \frac{\langle (\hat{\mathbf{E}}^*)^2 (\hat{\mathbf{E}})^2 \rangle}{\langle \hat{\mathbf{E}}^* \hat{\mathbf{E}} \rangle^2} = \frac{\langle (\hat{a}^\dagger)^2 (\hat{a})^2 \rangle}{\langle \hat{a}^\dagger \hat{a} \rangle^2} \propto \frac{\langle (\hat{S}_+)^2 (\hat{S}_-)^2 \rangle}{\langle \hat{S}_+ \hat{S}_- \rangle^2} \quad (2.27)$$

$g^{(2)}(0)$  lässt Rückschlüsse über die Art der Strahlungsquelle zu. Folgende Bereiche werden unterschieden:

- $g^{(2)}(0) \geq 1$ : klassische Strahlung ist immer in diesem Bereich, Photonen sind gebunched
- $g^{(2)}(0) = 1$ : kohärente Strahlung (Laser)
- $g^{(2)}(0) < 1$ : nicht-klassische Strahlung, Photonen sind antibunched

# 3 Simulation mit dem QuantumOptics.jl Paket

## 3.1 Beschreibung der Beispiele

In diesem Abschnitt werden die im vorangehenden Kapitel gezeigten Zusammenhänge zwischen Atom- und Feldoperatoren zur numerischen Berechnung der Erwartungswerte von Intensität (Glg. 2.25) und Intensitätsfluktuationskorrelation (Glg. 2.27) an zwei konkreten Beispielen angewendet. Für beide Beispiele geht man von einem System  $N$  identischer, punktförmiger, unbewegter Zwei-Zustands Atome aus, welche an ein freies Feld (also quantisierte elektromagnetische Moden) gekoppelt sind. Diese Atome werden auf, im Vergleich zu ihrer Übergangswellenlänge, kleinem Raum plaziert. Dadurch kann angenommen werden, dass alle Atome, das bei Licht-Materiewechselwirkung eines einzelnen Atoms emittierte Feld, gleichzeitig, gleich stark spüren. Ebenfalls zerfallen beide Systeme unter spontaner Emission. Durch diesen dissipativen Effekt gilt keine Energieerhaltung, und die Zeitentwicklung der offenen Systeme erfolgt nicht durch die Schrödingergleichung, sondern eine Mastergleichung (Glg. 2.20). Der Lindbladterm beschreibt nun den Dichteoperator des Atomsystems  $\rho_a$  unter Zerfall durch spontane Emission mit der Rate  $\gamma$  und dem kollektiven, atomaren Absteigoperator  $\hat{S}_-$  als Sprungoperator:

$$\mathcal{L}[\rho_a](\hat{S}_-) = \frac{\gamma}{2} (2\hat{S}_-\rho_a\hat{S}_+ - \hat{S}_+\hat{S}_-\rho_a - \rho_a\hat{S}_+\hat{S}_-) \quad (3.1)$$

Durch die Symmetrie beider Beispiele bewegt man sich im Dicke Limit, somit sind alle Atomoperatoren kollektiv.

### 3.1.1 Spontan zerfallendes System im angeregten Zustand

Alle Atome werden im angeregten Zustand präpariert und die Dichtematrix  $\rho_a$  des  $N$ -Atom Systems zeitentwickelt. Der Hamiltonoperator des Atomsystems  $\hat{H}_{S1}$ , mit Detuning  $\Delta$  zwischen Übergangsfrequenz der Atome und Frequenz der Feldmode mit der sie am wahrscheinlichsten wechselwirken ist:

$$\hat{H}_{S1} = \frac{\Delta}{2} \hat{S}_z \quad (3.2)$$

### 3.1.2 Lasergetriebenes System im Grundzustand

Hier werden alle Atome im Grundzustand präpariert, und dann mit einem Laserfeld angeregt. Für einen perfekt monochromatischen Laser vereinfacht sich der Hamiltonian der Atom-Feld Wechselwirkung (Glg. 2.14), da die Feldoperatoren kohärenter Strahlung als komplexe Phasenfaktoren in die Kopplungskonstante  $\eta$ , die der Rabi-Frequenz entspricht, integriert werden können. Die Atom-Laser Wechselwirkung wird beschrieben durch:

$$\hat{H}_i = \eta (\hat{S}_+ + \hat{S}_-) \quad (3.3)$$

Der Hamiltonian des Gesamtproblems  $\hat{H}_{S2}$  ist dann:

$$\begin{aligned} \hat{H}_{S2} &= \hat{H}_a + \hat{H}_i = \\ &= \frac{\Delta}{2} \hat{S}_z + \eta (\hat{S}_+ + \hat{S}_-) \end{aligned} \quad (3.4)$$

Hier beschreibt  $\Delta$  das Detuning zwischen Laser und Übergangsfrequenz der Atome.

## 3.2 Programmierung

Zur numerischen Berechnung der Probleme wurde *QuantumOptics.jl* [8] ein open source framework für Julia [2] zur Simulation von Quantensystemen verwendet, das an der Universität Innsbruck von Prof. Ritschs CQED Gruppe entwickelt

### 3 Simulation mit dem *QuantumOptics.jl* Paket

wurde. Durch dieses Tool lässt sich eine Vielzahl an quantenoptischen Fragestellungen schnell und unkompliziert berechnen. Desweiteren steht auch eine umfassende Dokumentation mit vielen anschaulichen Beispielen zur Verfügung (Link: <https://qojulia.org/>).

#### Code

Der nachfolgende Code behandelt das spontan zerfallende System im angeregten Zustand 3.1.1 und generiert die Plots in Abb. 3.1:

```
1 using QuantumOptics #Lade das QuantumOptics.jl Paket
2 using PyPlot        #verwendet zum Plotten
3
4 # Parameter
5 N = 5               #Anzahl der Atome im System
6 g = 2.0            #spontane Emissionsrate
7 d = 1.0            #Detuning zw. atom. Übergangs- und Feldmodenfrequenz
8 T = [0:0.1:6;]
9
10 # Basis und Operatoren
11 b(i) = SpinBasis(i//2) #Dicke Zustände
12 sm(i) = sigmam(b(i))  #Absteigeoperator für gegebene Spinbasis
13 sp(i) = sigmap(b(i))  #Aufsteigeoperator für gegebene Spinbasis
14 sz(i) = sigmaz(b(i))  #Pauli z-Matrix
15
16 # Hamiltonoperator
17 H(i) = 0.5d*sz(i)     #beschreibt das kollektive Atomsystem
18
19 # Startzustand
20 psi(i) = spinup(b(i)) #präpariert das System im höchsten Energieniveau
21
22 # Definiere Absteigeoperator als Sprungoperator und g als Zerfallsrate
23 J(i) = [sm(i)]        #Sprungoperator im Lindbladterm
24 rates = [g]           #Zerfallsrate
25
26 # Zeitentwicklung mittels Mastergleichung
27 exp_i_master = Array{Float64}[]
28 exp_g_master = Array{Float64}[]
29 for i=1:N
30     tout, rho = timeevolution.master(T, psi(i), H(i), J(i); rates=rates)
```

### 3 Simulation mit dem QuantumOptics.jl Paket

```
31     push!(exp_i_master, real(expect(sp(i)*sm(i), rho)))
32     push!(exp_g_master,
33           real(expect(sp(i)^2*sm(i)^2, rho)./expect(sp(i)*sm(i), rho).^2))
34   end
35
36   # Plotten und speichern der Resultate
37   figure(figsize=(12, 4))
38   subplot(1, 2, 1)
39   for i=1:N
40     plot(T, exp_i_master[i], label="N=$(i) ")
41   end
42   axis()
43   xlabel("t")
44   ylabel(L"\langle\sigma_+\sigma_-\rangle")
45   legend()
46   subplot(1, 2, 2)
47   for i=1:N
48     plot(T, exp_g_master[i], label="N=$(i) ")
49   end
50   axis([0, T[end], 0, 4])
51   xlabel("t")
52   ylabel(L"g^{(2)}(0) ")
53   legend()
54
55   savefig("NStateAtomProbabilitiesArray2ndDegCoh.svg")
```

Dieser Codeausschnitt zeitentwickelt das lasergetriebene System im Grundzustand 3.1.2 und liefert die Daten für die Plots in Abb. 3.2.

```
1   # Parameter
2   N = 7           #Anzahl der Atome im System
3   g = 2.0        #spontane Emissionsrate
4   e = 10.0       #Kopplungskonstante zwischen Laserfeld und Atom
5   d = 1.0        #Detuning zwischen Laserfrequenz und atomarer  $\tilde{\omega}$ 
6                   bergangsfrequenz
7   T = [0:0.1:10;]
8
9   # Basis und Operatoren
10  b(i) = SpinBasis(i//2)
11  sm(i) = sigmam(b(i))
12  sp(i) = sigmap(b(i))
```

### 3 Simulation mit dem *QuantumOptics.jl* Paket

```
12 sz(i) = sigmaz(b(i))
13
14 # Hamiltonoperator des kollektiven Atomsystems und der Atom-Laser-Wechselwirkung
15 H(i) = 0.5d*sz(i) + e*(sp(i) + sm(i))
16
17 # Als Startzustand wird das System im niedrigsten Energieniveau präpariert
18 psi(i) = spindown(b(i))
19
20 # Sprungoperator und Zerfallsrate für die Mastergleichung
21 J(i) = [sm(i)]
22 rates = [0.25g]
23
24 # Zeitentwicklung mittels Mastergleichung
25 exp_i_master = Array{Float64}[]
26 exp_g_master = Array{Float64}[]
27 for i=1:N
28     tout, rho = timeevolution.master(T, psi(i), H(i), J(i); rates=rates)
29     push!(exp_i_master, real(expect(sp(i)*sm(i), rho)))
30     push!(exp_g_master, real(expect(sp(i)^2*sm(i)^2, rho)./expect(sp(i)*sm(i),
31     rho).^2))
31 end
```

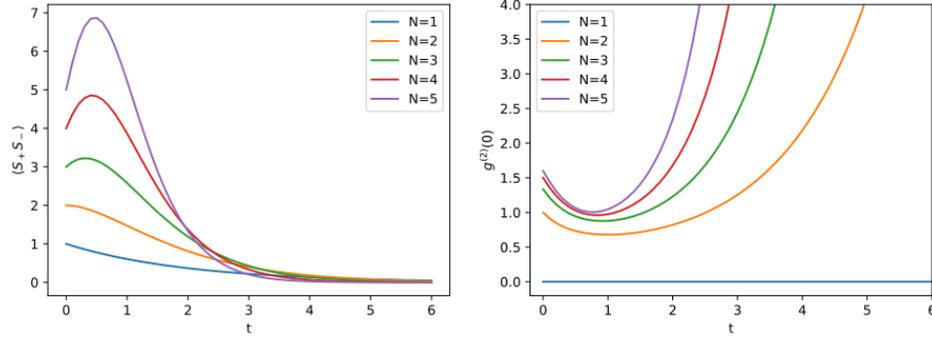
## 3.3 Interpretation der Resultate

### Spontan zerfallendes System im angeregten Zustand

In Abb. 3.1 wird die Zeitentwicklung von System 3.1.1 dargestellt. Für den Erwartungswert von Photonenbesetzung der Mode des freien Feldes mit Frequenz  $\omega_f$  nahe bei der Übergangsfrequenz  $\omega_a$  der identischen Atome ergibt sich folgendes: Zu Beginn sind alle Atome im angeregten Zustand, es befinden sich also genau  $N$  Photonen im System. Diese Photonenbesetzung ist auch proportional zur Intensität der Mode.

Im zeitlichen Verlauf zeigt sich, dass der spontane Zerfall schneller abläuft als für ungekoppelte Atome erwartet, und die Atome einen räumlich gerichteten Puls emittieren, der beim Intensitätsmaximum annähernd kohärent wird. Sobald ein erstes Atom spontan zerfällt, spüren die anderen Atome dessen Strahlung über das umge-

### 3 Simulation mit dem *QuantumOptics.jl* Paket



**Abbildung 3.1:** Zeitentwicklung von Intensität und Intensitätsfluktuationskorrelation während kooperativer Emission

bende freie Feld durch die Dipol-Dipol-Wechselwirkung, und es setzt eine sich gegenseitig verstärkende Kettenreaktion von spontanem Zerfall ein: der superradianter Puls. Die Strahlung ist also nicht unabhängig, sondern gekoppelt. Das Intensitätsmaximum ist proportional zu  $N^2$ , die Pulsdauer ist proportional zu  $\frac{1}{N}$ . Dadurch unterscheidet sich die gekoppelte von ungekoppelter spontaner Emission, deren Intensität proportional zu  $N$  ist.

Beim Erwartungswert der Intensitätsfluktuation ergibt sich folgendes Bild: Für Atomanzahl  $N = 1$  sieht man den quantenmechanischen Charakter der Einzelphotonenquelle, also spontaner Emission eines einzelnen Atoms:  $g^2(0) = 0$ . In diesem Fall sind die Photonen völlig antigebunched und es können nie zwei gleichzeitig gemessen werden. Wenn die Atomanzahl  $N > 1$  ist, schlägt sich der Einfluss der kooperativen Emission auf  $g^2(0)$  nieder, und am Intensitätsmaximum wird die Strahlung annähernd kohärent. Für große Zeiten  $t$  divergiert  $g^2(0)$  was sich dadurch erklären lässt, dass der spontane Zerfall eines ersten Atoms und damit die Kettenreaktion verzögert eintritt. Es gilt:

$$g^{(2)}(0) = \frac{\text{Anzahl der Zwei-Photon Inzidenzen}}{(\text{Anzahl der Photonen})^2} \quad (3.5)$$

Wenn also durch verzögerten Zerfall nach längerer Zeit immer noch eine hohe Wahrscheinlichkeit besteht, dass zwei Photonen ankommen können divergiert  $g^2(0)$ .

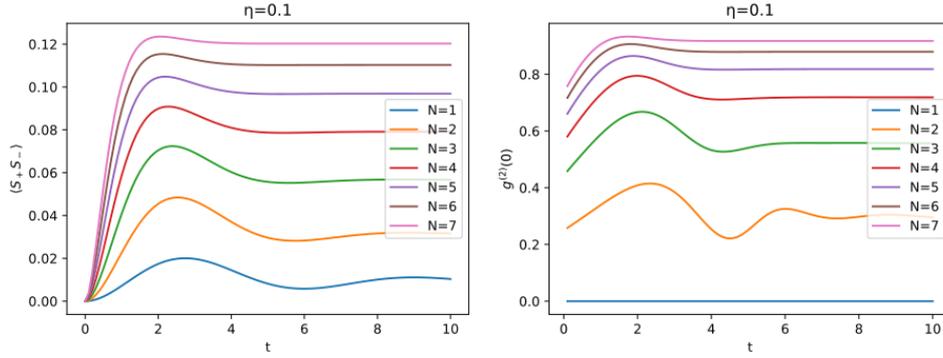
### Lasergetriebenes System im Grundzustand

In Abb. 3.2 sieht man die Entwicklung von System 3.1.2, welche superradiant gedämpfte Rabi-Oszillationen zeigt. Die Strahlungssintensität zu Beginn ist gleich 0, da alle Atome im Grundzustand präpariert wurden, und erst mit der Zeit durch das Laserfeld angeregt werden können, also Energie erhalten. Der Energieverlust durch spontane Emission erlaubt dann dem System schlussendlich einen stationären Energiezustand zu erreichen.

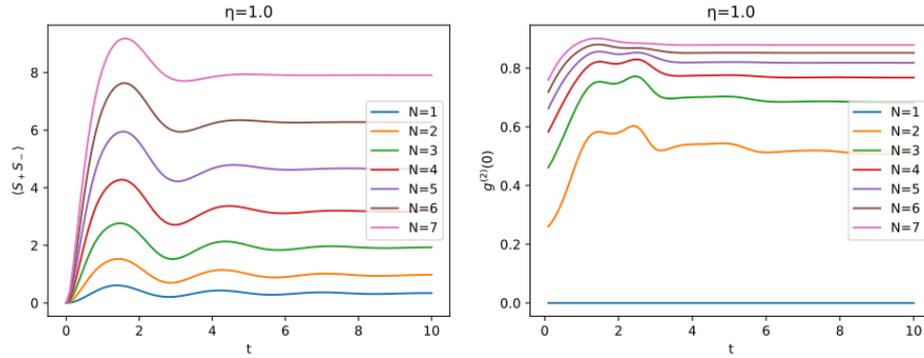
Für kleine Kopplungskonstante  $\eta = 0.1 \frac{\gamma}{2}$  bleibt die Intensität schwach, und das System geht stark gedämpft in den stationären Zustand, für den die ausgestrahlte Intensität konstant bleibt, über. Dies ist der überdämpfte Fall, der fast nicht oszilliert. Der gleiche Umstand ist auch den Systemen mit  $\eta = 1.0 \frac{\gamma}{2}$  und  $\eta = 10.0 \frac{\gamma}{2}$  gemein, je größer die Kopplungskonstante, desto stärker die Intensität. Allerdings ist dieser Zusammenhang nach oben beschränkt, da der Laser nicht mehr als alle Atome gleichzeitig anregen kann. Für großes  $\eta$  beobachtet man eine starke superradiante Dämpfung, und die Intensität oszilliert stark bevor sie in den Gleichgewichtszustand übergeht.

Für den Verlauf von  $g^2(0)$  ergibt sich ein ähnliches Bild: schwache Dämpfung bei großem  $\eta$  dafür starke Oszillation, und starke Dämpfung bei kleinem  $\eta$ , schwach oszillierend. Im Vergleich zu System 3.1.1 lässt sich sagen, dass  $g^2(0)$  für kleine  $\eta$  immer im antigebuncheden Bereich, und im stationären Zustand weiter von Kohärenz entfernt ist. Für großes  $\eta$  kann  $g^2(0)$  auch größer als 1 werden.

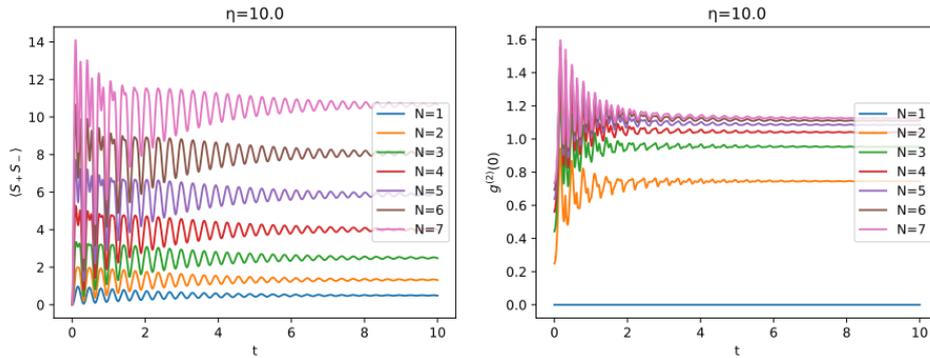
### 3 Simulation mit dem *QuantumOptics.jl* Paket



(a) Stark gedämpftes System



(b) Mittel gedämpftes System



(c) Schwach gedämpftes, stark oszillierendes System

**Abbildung 3.2:** Zeitentwicklung der Erwartungswerte von Intensität und Intensitätsfluktuationskorrelation des lasergetriebenen Systems für unterschiedliche Kopplungskonstanten  $\eta$

## 4 Conclusio

Die Zeitentwicklung von Intensität und Intensitätsfluktuationen eines freien elektromagnetischen Feldes, das unter Dipol-Dipol-Wechselwirkung mit einem Atomsystem interagiert, kann man mit Hilfe der Atomoperatoren in guter Übereinstimmung mit experimentellen Ergebnissen beschreiben [13]. Voraussetzung ist, dass sich die Atome dicht auf kleinem Raum, im Vergleich zur atomaren Übergangswellenlänge befinden, die genaue geometrische Anordnung kann aber vernachlässigt werden.

Für die in System 3.1.1 behandelten gekoppelten Atome gilt, die maximale Strahlungsintensität ist proportional zu  $N^2$  während für unabhängige spontan zerfallende Teilchen eine Intensität proportional zu  $N$  erwartet worden wäre. Die Pulsdauer der gekoppelten Emission ist proportional zu  $\frac{1}{N}$ , während die Zerfallsdauer der ungekoppelten Emission nicht von  $N$  abhängt. Der räumlich gerichtete, superradiante Puls, wird am Intensitätsmaximum kohärent.

Die in System 3.1.2 beschriebenen, durch einen Laser getriebenen Atome gehen in einen stationären Zustand über. Deren emittierte Strahlung ist für kleine Kopplungskonstanten antigebunched und wird nicht mehr kohärent.

# Literaturverzeichnis

- [1] *Absorption, Spontaneous Emission, Stimulated Emission*. URL: [https://eng.libretexts.org/Bookshelves/Electrical\\_Engineering/Electro-Optics/Direct\\_Energy\\_\(Mitofsky\)/07:\\_Lamps,\\_LEDs,\\_and\\_Lasers/7.01:\\_Absorption,\\_Spontaneous\\_Emission,\\_Stimulated\\_Emission](https://eng.libretexts.org/Bookshelves/Electrical_Engineering/Electro-Optics/Direct_Energy_(Mitofsky)/07:_Lamps,_LEDs,_and_Lasers/7.01:_Absorption,_Spontaneous_Emission,_Stimulated_Emission) (besucht am 25.05.2021).
- [2] Jeff Bezanson, Alan Edelman, Stefan Karpinski und Viral B. Shah. „Julia: A Fresh Approach to Numerical Computing“. In: *SIAM Review* 59.1 (Jan. 2017), S. 65–98.
- [3] Peter Zoller Crispin W. Gardiner. *Quantum World of Ultra-Cold Atoms and Light, the - Book I: Foundations of Quantum Optics*. IMPERIAL COLLEGE PR, 20. Mai 2014. 328 S.
- [4] R. H. Dicke. „Coherence in Spontaneous Radiation Processes“. In: *Physical Review* 93.1 (Jan. 1954), S. 99–110.
- [5] Albert Einstein. „Zur Quantentheorie der Strahlung“. In: *Physikalische Zeitschrift* 18 (1917), S. 121–128.
- [6] C. C. Gerry. *Introductory quantum optics*. Cambridge, UK New York: Cambridge University Press, 2005.
- [7] M. Gross und S. Haroche. „Superradiance: An essay on the theory of collective spontaneous emission“. In: *Physics Reports* 93.5 (Dez. 1982), S. 301–396.

## Literaturverzeichnis

- [8] Sebastian Krämer, David Plankensteiner, Laurin Ostermann und Helmut Ritsch. „QuantumOptics.jl: A Julia framework for simulating open quantum systems“. In: *Computer Physics Communications* 227 (Juni 2018), S. 109–116.
- [9] R. H. Lehmberg. „Radiation from an N-Atom System. I. General Formalism“. In: *Physical Review A* 2.3 (Sep. 1970), S. 883–888.
- [10] Rodney Loudon. *The quantum theory of light*. Oxford New York: Oxford University Press, 2000.
- [11] D. Meiser, Jun Ye, D. R. Carlson und M. J. Holland. „Prospects for a Millihertz-Linewidth Laser“. In: *Physical Review Letters* 102.16 (Apr. 2009), S. 163601.
- [12] Miguel Orszag. *Quantum Optics*. Springer-Verlag GmbH, 16. Mai 2016.
- [13] Stefan A. Schäffer, Mikkel Tang, Martin R. Henriksen, Asbjørn A. Jørgensen, Bjarke T. R. Christensen und Jan W. Thomsen. „Lasing on a narrow transition in a cold thermal strontium ensemble“. In: *Physical Review A* 101.1 (Jan. 2020), S. 013819.
- [14] Michael Scheibner, Thomas Schmidt, Lukas Worschech, Alfred Forchel, Gerd Bacher, Thorsten Passow und Detlef Hommel. „Superradiance of quantum dots“. In: *Nature Physics* 3.2 (Jan. 2007), S. 106–110.