The SIAM 100-Dollar, 100-Digit Challenge

- Der Wettbewerb
- A. Ostermann: Die Probleme 1 und 4
- M. Thalhammer: Das Problem 7
- G. Kirchner: Das Problem 6
- P. Wagner: Das Problem 5

Der Wettbewerb

Ausschreibung in den `SIAM News`, Jänner 2002
(*Nick Trefethen*, Univ. Oxford)

zehn Probleme, Lösung ist jeweils eine reelle Zahl

gefordert: zehn signifikante Stellen pro Aufgabe

Einsendeschluß: Mai 2002

Einsendungen von 94 Teams aus 25 Ländern
19 Teams schafften die maximale Punktezahl 100

Mischung aus numerischen und analytischen Methoden

Das Problem # 1

1. *What is*

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_{\varepsilon}^{1} \frac{\cos\left(x^{-1} \log x\right)}{x} \, \mathrm{d}x \ ?$$

Lösung: 0.3233674316 7777876139 9370087952 1704466510...

$\longrightarrow$

direkte numerische Integration versagt!

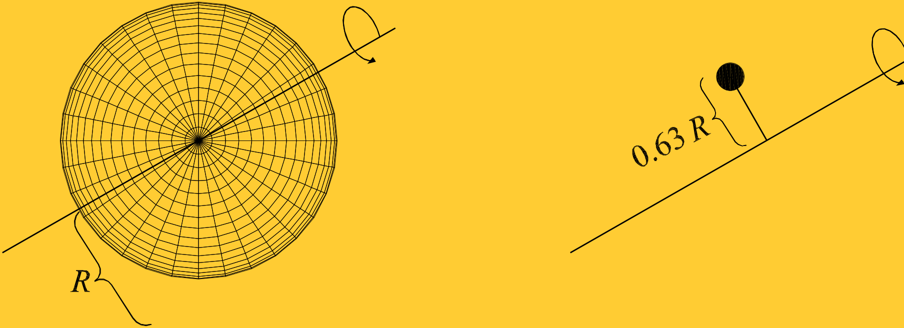
Lösungsansatz:
Transformation des hochoszillierenden Integrals in eine alternierende Reihe

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\varepsilon}^{1}\frac{\cos\left(x^{-1}\log x\right)}{x}\,\mathrm{d}x=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k b_k$$

Nullstellen des Integranden

$$\begin{aligned}\cos(x_k^{-1}\log x_k)=0 \quad &\Leftrightarrow \quad x_k^{-1}\log x_k=\left(k-\frac{1}{2}\right)\pi=:u_k\\ &\Leftrightarrow \quad x_k=W(u_k)/u_k\end{aligned}$$

mit der Lambert'schen W-Funktion $\quad W(u)\mathrm{e}^{W(u)}=u.$


R
0.63 R

Berechnung der Reihenglieder b_k

Gauss-Legendre Quadraturformel der Ordnung 30

Quadraturfehler $\mathcal{O}\left((\Delta x)^{31}\right)$, beliebig viele Stellen

Konvergenzbeschleunigung alternierender Reihen

Euler Transformation (Mittelwerte der Partialsummen)

Δ^2-Verfahren von Aitken (1926)

ε-Algorithmus von Shanks (1955) und Wynn (1956)

Algorithmus von Cohen et al. (2000)
(d Stellen Genauigkeit bei Verwendung von $1.31d$ Termen)

Konvergenzbeschleunigung von

$$\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \frac{x^{k+1}}{k+1} = \log(1+x), \qquad x = 1.$$

Verwendung der ersten 21 Glieder ergibt: 0.716...

	Wert	Fehler
Euler	0.69314718054024619064286	0.196991 E-10
ε-Alg.	0.69314718055994540350143	0.940842 E-16
Cohen	0.69314718055994530951332	0.960904 E-19

Achtung: der ε-Algorithmus konvergiert z.B. auch für $x = 2$

Das Problem # 4

4. *What is the global minimum of the function*

$$\exp(\sin(50x)) + \sin(60\exp(y)) + \sin(70\sin(x)) \\ + \sin(\sin(80y)) - \sin(10(x+y)) + \frac{1}{4}\left(x^2+y^2\right) \ ?$$

$\to$ Graph mit `MAPLE`

Lösungsansatz:
isoliere Kandidaten, Newtonverfahren
beliebig viele Stellen in `MAPLE`, quadratische Konvergenz