Mathematik 1
WS 2014/15

AB Technische Mathematik
Universität Innsbruck

Integration von Funktionen mehrerer Variablen

Das zweidimensionale Bereichsintegral

- Wir betrachten hier Funktionen von **zwei reellen Variablen** (x,y) mit Werten in $\mathbb{R}$, so genannte **skalarwertige** Funktionen. Ihr Definitionsbereich D ist eine Teilmenge der Zahlenebene $\mathbb{R}^2$:

$$f : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} : (x,y) \to z = f(x,y).$$

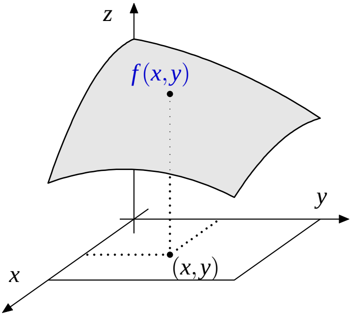
- Wir betrachten hier Funktionen von **zwei reellen Variablen** (x,y) mit Werten in $\mathbb{R}$, so genannte **skalarwertige** Funktionen. Ihr Definitionsbereich D ist eine Teilmenge der Zahlenebene $\mathbb{R}^2$:

$$f : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} : (x,y) \to z = f(x,y).$$

- Der **Graph**

$$G = \left\{(x,y,z) \in D \times \mathbb{R}\,;\, z = f(x,y)\right\} \subset \mathbb{R}^3$$

der Funktion f stellt – wenn f hinreichend regulär – eine **Fläche** im Raum dar.

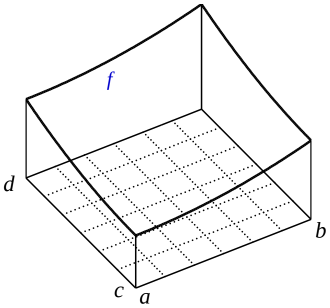


Das zweidimensionale Bereichsintegral

- Zuerst Integration einer reellwertigen Funktion $z = f(x,y)$ auf **Rechtecken** $R = [a,b] \times [c,d]$. Allgemeinere Integrationsbereiche $D \subset \mathbb{R}^2$ später.
- Da wir bereits wissen, dass Riemann-integrierbare Funktionen notwendigerweise beschränkt sind, setzen wir in diesem Abschnitt f von vornherein als **beschränkt** voraus.

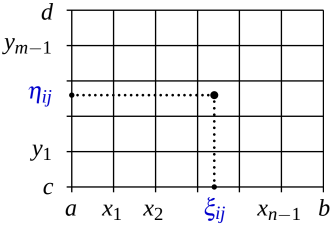
Das zweidimensionale Bereichsintegral

- Zuerst Integration einer reellwertigen Funktion $z = f(x,y)$ auf **Rechtecken** $R = [a,b] \times [c,d]$. Allgemeinere Integrationsbereiche $D \subset \mathbb{R}^2$ später.
- Da wir bereits wissen, dass Riemann-integrierbare Funktionen notwendigerweise beschränkt sind, setzen wir in diesem Abschnitt f von vornherein als **beschränkt** voraus.
- Falls f nichtnegativ ist, soll das Integral als **Volumen** des Körpers interpretierbar sein, dessen Grundfläche durch das Rechteck R und dessen Deckfläche durch den Graphen von f gebildet wird.



- Approximieren den Körper durch eine **Summe von Quadern**.
- Wir legen ein **Gitter** G aus Teilrechtecken über das Grundrechteck R, indem wir $[a,b]$ und $[c,d]$ wie in Abschnitt über das Riemannintegral zerlegen:

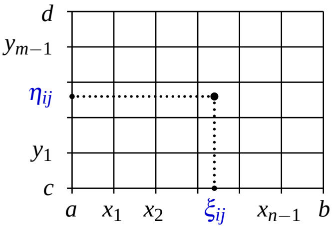
$$Z_x : a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b,$$
$$Z_y : c = y_0 < y_1 < y_2 < \ldots < y_{m-1} < y_m = d.$$



Die **Rechtecke**

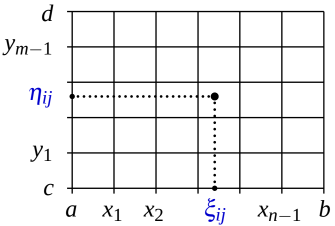
$$[x_{i-1}, x_i] \times [y_{j-1}, y_j], \quad i = 1, \ldots, n,\ j = 1, \ldots, m$$

bilden ein **Gitter aus Teilrechtecken**.



- Die **Feinheit** $\Phi(G)$ ist die Länge des größten beteiligten Teilintervalls:

$$\Phi(G) = \max\left(|x_i - x_{i-1}|, |y_j - y_{j-1}|\,;\, i = 1, \dots, n, j = 1, \dots, m\right).$$



- Die **Feinheit** $\Phi(G)$ ist die Länge des größten beteiligten Teilintervalls:

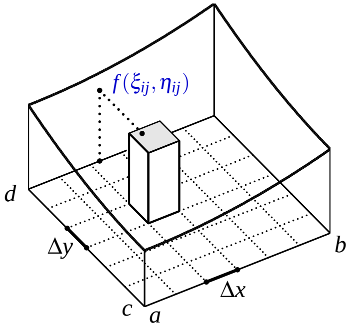
$$\Phi(G) = \max\left(|x_i - x_{i-1}|, |y_j - y_{j-1}|\,;\, i = 1, \ldots, n, j = 1, \ldots, m\right).$$

- Wählen in jedem Teilrechteck einen beliebigen Zwischenpunkt $\mathbf{p}_{ij} = (\xi_{ij}, \eta_{ij})$.
- Die Doppelsumme

$$S = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} f(\xi_{ij}, \eta_{ij})(x_i - x_{i-1})(y_j - y_{j-1})$$

wird wieder als **Riemannsumme** bezeichnet.

- **Volumen eines Teilquaders** mit Basis $[x_{i-1}, x_i] \times [y_{j-1}, y_j]$ und Höhe $f(\xi_{ij}, \eta_{ij})$ ist das Produkt von Grundfläche und Höhe.
- Daher entspricht die **Riemannsumme** in der Volumsinterpretation einer **Näherung an das Volumen** unter dem Graphen von f.



- Das Integral wird nun durch einen **Grenzübergang** der Riemannsummen definiert.
- Wir betrachten eine Folge $G_1, G_2, G_3, \ldots$ von Gittern, deren Feinheit $\Phi(G_N) \to 0$ geht für $N \to \infty$, und die zugehörigen Riemannsummen S_N.

- Das Integral wird nun durch einen **Grenzübergang** der Riemannsummen definiert.
- Wir betrachten eine Folge $G_1, G_2, G_3, \ldots$ von Gittern, deren Feinheit $\Phi(G_N) \to 0$ geht für $N \to \infty$, und die zugehörigen Riemannsummen S_N.

Definition 2.15 Bereichsintegral

Eine beschränkte Funktion $z = f(x,y)$ heißt auf $R = [a,b] \times [c,d]$ **Riemann-integrierbar**, falls für beliebige Folgen von Gittern $(G_N)_{N\geq 1}$ mit $\Phi(G_N) \to 0$ die zugehörigen **Riemannsummen** $(S_N)_{N\geq 1}$ gegen denselben Grenzwert $I(f)$ streben, unabhängig von der Wahl der Zwischenpunkte.

Dieser Grenzwert

$$I(f) = \iint_R f(x,y)\,\mathrm{d}(x,y)$$

wird als das **Bereichsintegral** von f auf R bezeichnet.

Das zweidimensionale Bereichsintegral

- Wie beim Riemannintegral einer Funktion einer Variablen kann auch hier die Definition des Bereichsintegrals für ein **numerisches Näherungsverfahren** verwendet werden:

$$I(f) \approx \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} f(\xi_{ij}, \eta_{ij})(x_i - x_{i-1})(y_j - y_{j-1})$$

- Wie beim Riemannintegral einer Funktion einer Variablen kann auch hier die Definition des Bereichsintegrals für ein **numerisches Näherungsverfahren** verwendet werden:

$$I(f) \approx \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} f(\xi_{ij}, \eta_{ij})(x_i - x_{i-1})(y_j - y_{j-1})$$

- **Berechnung des Bereichsintegrals:**

  Darstellung als **Doppelintegral** oder **iteriertes Integral**. Damit erreicht man die Rückführung auf die Integration von Funktionen in einer Variablen.

Satz 2.16 Das Bereichsintegral als Doppelintegral

Ist ein beschränktes f über $R=[a,b]\times[c,d]$ Riemann-integrierbar und sind es auch die Funktionen $x\to f(x,y)$, $y\to f(x,y)$, so sind auch die Abbildungen $x\to\int_c^d f(x,y)\,\mathrm{d}y$ und $y\to\int_a^b f(x,y)\,\mathrm{d}x$ Riemann-integrierbar und es gilt

$$\iint_R f(x,y)\,\mathrm{d}(x,y)=\int_a^b\left(\int_c^d f(x,y)\,\mathrm{d}y\right)\,\mathrm{d}x=\int_c^d\left(\int_a^b f(x,y)\,\mathrm{d}x\right)\,\mathrm{d}y.$$

Satz 2.16 Das Bereichsintegral als Doppelintegral

Ist ein beschränktes f über $R = [a,b] \times [c,d]$ Riemann-integrierbar und sind es auch die Funktionen $x \to f(x,y)$, $y \to f(x,y)$, so sind auch die Abbildungen $x \to \int_c^d f(x,y)\,\mathrm{d}y$ und $y \to \int_a^b f(x,y)\,\mathrm{d}x$ Riemann-integrierbar und es gilt

$$\iint_R f(x,y)\,\mathrm{d}(x,y) = \int_a^b \left(\int_c^d f(x,y)\,\mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x = \int_c^d \left(\int_a^b f(x,y)\,\mathrm{d}x \right) \mathrm{d}y.$$

Beweisskizze: Wählt man die Zwischenpunkte in den Riemannsummen von der Form $\mathbf{p}_{ij} = (\xi_i, \eta_j)$ mit $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$, $\eta_j \in [y_{j-1}, y_j]$, so ist

$$\iint_R f(x,y)\,\mathrm{d}(x,y) \approx \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{m} f(\xi_i, \eta_j)(y_j - y_{j-1}) \right) (x_i - x_{i-1})$$

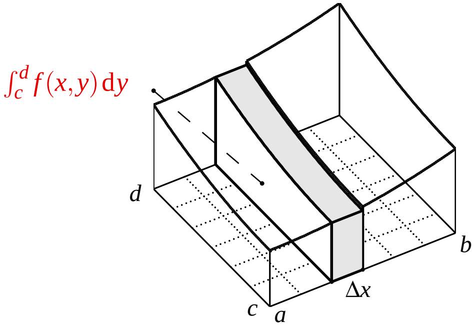
$$\approx \sum_{i=1}^{n} \left(\int_c^d f(\xi_i, y)\,\mathrm{d}y \right) (x_i - x_{i-1}) \approx \int_a^b \left(\int_c^d f(x,y)\,\mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x$$

und ebenso für die zweite Aussage unter Vertauschung der Reihenfolge.

Das zweidimensionale Bereichsintegral

- Man lässt also die Feinheit des Gitters G derart gegen Null gehen, dass zuerst die Feinheit der Zerlegung Z_y gegen Null geht und dann die Feinheit der Zerlegung Z_x.

- Man lässt also die Feinheit des Gitters G derart gegen Null gehen, dass zuerst die Feinheit der Zerlegung Z_y gegen Null geht und dann die Feinheit der Zerlegung Z_x.
- Das Volumen wird anstelle von schmalen Quadern durch Summation über dünne achsenparallele Schnittkörper angenähert. Satz 2.16 sagt aus, dass das Körpervolumen sich durch Integration über die Inhalte der Schnittflächen (senkrecht zur x- oder y-Achse) ergibt.



Das zweidimensionale Bereichsintegral

- In dieser Form wird Satz 2.16 als **Prinzip von Cavalieri (1598–1647)** bezeichnet.
- In einer für allgemeinere Integralbegriffe gültigen Form spricht man oft auch vom **Satz von Fubini (1879–1943)**.
- Da im Falle der Integrierbarkeit die Integrationsreihenfolge keine Rolle spielt, lässt man oft die Klammern weg und schreibt

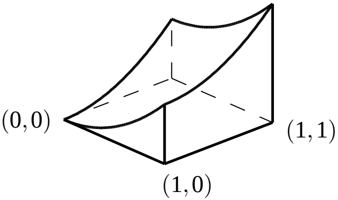
$$\iint_R f(x,y)\,\mathrm{d}(x,y) = \iint_R f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_a^b \int_c^d f(x,y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x.$$

Beispiel 2.17

Das Volumen unter der Paraboloidfläche $z = x^2 + y^2$ über dem Rechteck $R = [0,1] \times [0,1]$ erhält man mit Hilfe von Satz 2.16 wie folgt:

$$\iint_R (x^2+y^2)\,\mathrm{d}(x,y) = \int_0^1 \left(\int_0^1 (x^2+y^2)\,\mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x = \int_0^1 \left(x^2 \int_0^1 \mathrm{d}y + \int_0^1 y^2\,\mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x$$

$$= \int_0^1 \left(x^2(1-0) + \frac{1^3}{3} - \frac{0^3}{3} \right) \mathrm{d}x = \int_0^1 \left(x^2 + \frac{1}{3} \right) \mathrm{d}x = \frac{1^3}{3} - \frac{0^3}{3} + \frac{1}{3}(1-0) = \frac{2}{3}.$$



Beispiel 2.17

Das Volumen unter der Paraboloidfläche $z = x^2 + y^2$ über dem Rechteck $R = [0,1] \times [0,1]$ erhält man mit Hilfe von Satz 2.16 wie folgt:

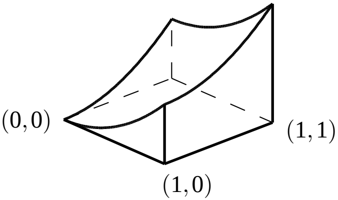
$$\iint_R (x^2+y^2)\,\mathrm{d}(x,y) = \int_0^1 \left(\int_0^1 (x^2+y^2)\,\mathrm{d}y \right)\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \left(x^2 \int_0^1 \mathrm{d}y + \int_0^1 y^2\,\mathrm{d}y \right)\,\mathrm{d}x$$

$$= \int_0^1 \left(x^2(1-0) + \frac{1^3}{3} - \frac{0^3}{3} \right)\mathrm{d}x = \int_0^1 \left(x^2 + \frac{1}{3} \right)\mathrm{d}x = \frac{1^3}{3} - \frac{0^3}{3} + \frac{1}{3}(1-0) = \frac{2}{3}.$$

Vorgangsweise:

Im inneren Integral ist y die Integrationsvariable; x wird als Konstante aufgefasst.

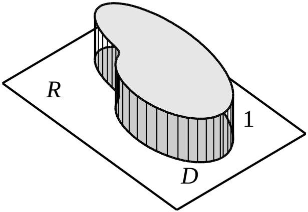
Nach Auswertung des inneren Integrals wird das äußere Integral berechnet, nun mit x als Integrationsvariable.



Integration über allgemeinere beschränkte Bereiche $D \subset \mathbb{R}^2$:

Die **Indikatorfunktion** des Bereichs D ist

$$\mathbb{1}_D(x,y) = \begin{cases} 1, & (x,y) \in D, \\ 0, & (x,y) \notin D. \end{cases}$$

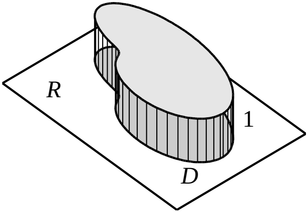


Integration über allgemeinere beschränkte Bereiche $D \subset \mathbb{R}^2$:

Die **Indikatorfunktion** des Bereichs D ist

$$\mathbb{1}_D(x,y) = \begin{cases} 1, & (x,y) \in D, \\ 0, & (x,y) \notin D. \end{cases}$$

- Wir schließen den beschränkten Bereich D in ein Rechteck R ($D \subset R$) ein.
- Falls das Riemannintegral über die Indikatorfunktion von D existiert, so stellt es das Volumen des über D errichteten Zylinders der Höhe eins dar und somit den **Flächeninhalt von** D dar.
- Das Ergebnis hängt nicht von der Größe des einschließenden Rechtecks ab, da die Indikatorfunktion außerhalb des Bereichs D den Wert Null annimmt.



Definition 2.18

Es sei D ein beschränkter Bereich und R ein einschließendes Rechteck.

(a) Falls die Indikatorfunktion von D Riemann-integrierbar ist, so heißt der Bereich D **messbar** und man setzt

$$\iint_D \mathrm{d}(x,y) = \iint_R \mathbb{1}_D(x,y)\,\mathrm{d}(x,y).$$

Definition 2.18

Es sei D ein beschränkter Bereich und R ein einschließendes Rechteck.

(a) Falls die Indikatorfunktion von D Riemann-integrierbar ist, so heißt der Bereich D **messbar** und man setzt

$$\iint_D \mathrm{d}(x,y) = \iint_R \mathbb{1}_D(x,y)\,\mathrm{d}(x,y).$$

(b) Eine Teilmenge $N \subset \mathbb{R}^2$ heißt **Nullmenge**, falls $\iint_N \mathrm{d}(x,y) = 0$ ist.

Definition 2.18

Es sei D ein beschränkter Bereich und R ein einschließendes Rechteck.

(a) Falls die Indikatorfunktion von D Riemann-integrierbar ist, so heißt der Bereich D **messbar** und man setzt

$$\iint_D \mathrm{d}(x,y) = \iint_R \mathbb{1}_D(x,y)\,\mathrm{d}(x,y).$$

(b) Eine Teilmenge $N \subset \mathbb{R}^2$ heißt **Nullmenge**, falls $\iint_N \mathrm{d}(x,y) = 0$ ist.

(c) Für eine beschränkte Funktionen $z = f(x,y)$ wird das Integral über einen messbaren Bereich D definiert als

$$\iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}(x,y) = \iint_R f(x,y)\mathbb{1}_D(x,y)\,\mathrm{d}(x,y),$$

falls $f(x,y)\mathbb{1}_D(x,y)$ Riemann-integrierbar ist.

Definition 2.18

Es sei D ein beschränkter Bereich und R ein einschließendes Rechteck.

(a) Falls die Indikatorfunktion von D Riemann-integrierbar ist, so heißt der Bereich D **messbar** und man setzt

$$\iint_D \mathrm{d}(x,y) = \iint_R \mathbb{1}_D(x,y)\,\mathrm{d}(x,y).$$

(b) Eine Teilmenge $N \subset \mathbb{R}^2$ heißt **Nullmenge**, falls $\iint_N \mathrm{d}(x,y) = 0$ ist.

(c) Für eine beschränkte Funktionen $z = f(x,y)$ wird das Integral über einen messbaren Bereich D definiert als

$$\iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}(x,y) = \iint_R f(x,y)\mathbb{1}_D(x,y)\,\mathrm{d}(x,y),$$

falls $f(x,y)\mathbb{1}_D(x,y)$ Riemann-integrierbar ist.

Beispiele für Nullmengen im $\mathbb{R}^2$:

Einzelne Punkte, Geradenstücke oder glatte Kurvenstücke in der Ebene.

Bemerkung 2.19

(a) Ist D ein messbarer Bereich, N eine Nullmenge und f auf den jeweiligen Bereichen integrierbar, so gilt

$$\iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}(x,y) = \iint_{D\setminus N} f(x,y)\,\mathrm{d}(x,y).$$

Bemerkung 2.19

(a) Ist D ein messbarer Bereich, N eine Nullmenge und f auf den jeweiligen Bereichen integrierbar, so gilt

$$\iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}(x,y) = \iint_{D\setminus N} f(x,y)\,\mathrm{d}(x,y).$$

(b) Es sei $D = D_1 \cup D_2$. Falls $D_1 \cap D_2$ eine Nullmenge bildet, so gilt

$$\iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}(x,y) = \iint_{D_1} f(x,y)\,\mathrm{d}(x,y) + \iint_{D_2} f(x,y)\,\mathrm{d}(x,y).$$

Das Integral über einen Gesamtbereich D erhält man also als Summe der Integrale über Teilbereiche.

Eine wichtige Klasse von Bereichen D, über denen die Integration einfach ist, sind die **Normalbereiche**.

Definition 2.20

(a) Eine Teilmenge $D \subset \mathbb{R}^2$ heißt **Normalbereich vom Typ I**, wenn gilt:

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,;\, a \leq x \leq b,\ u(x) \leq y \leq o(x)\}$$

mit stetigen unteren und oberen Begrenzungsfunktionen $x \to u(x)$, $x \to o(x)$.

Eine wichtige Klasse von Bereichen D, über denen die Integration einfach ist, sind die **Normalbereiche**.

Definition 2.20

(a) Eine Teilmenge $D \subset \mathbb{R}^2$ heißt **Normalbereich vom Typ I**, wenn gilt:

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,;\, a \le x \le b,\ u(x) \le y \le o(x)\}$$

mit stetigen unteren und oberen Begrenzungsfunktionen $x \to u(x)$, $x \to o(x)$.

(b) Eine Teilmenge $D \subset \mathbb{R}^2$ heißt **Normalbereich vom Typ II**, wenn gilt:

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,;\, c \le y \le d,\ l(y) \le x \le r(y)\}$$

mit stetigen linken und rechten Begrenzungsfunktionen $y \to l(y)$, $y \to r(y)$.

Satz 2.21 Integration über Normalbereiche

Es sei D ein Normalbereich und $f : D \to \mathbb{R}$ stetig.

Dann gilt für **Normalbereiche vom Typ I**

$$\iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}(x,y) = \int_a^b \left(\int_{u(x)}^{o(x)} f(x,y)\,\mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x$$

und für **Normalbereiche vom Typ II**

$$\iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}(x,y) = \int_c^d \left(\int_{l(y)}^{r(y)} f(x,y)\,\mathrm{d}x \right) \mathrm{d}y.$$

Beweis: Die Aussage folgt aus Satz 2.16 unter Beachtung, dass f außerhalb von D durch Null fortgesetzt werden kann.

Beispiel 2.22

Volumen unter der Paraboloidfläche $z = x^2 + y^2$ über dem Dreieck

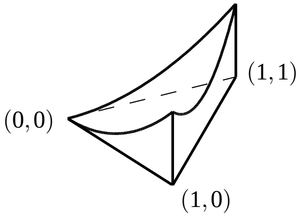
$$D = \{(x,y)\ ;\ 0 \le x \le 1, 0 \le y \le 1 - x\}:$$

D als Normalbereich vom Typ I mit den Begrenzungen $u(x) = 0$, $o(x) = 1 - x$.

Dann gilt

$$\iint_D (x^2+y^2)\,\mathrm{d}(x,y) = \int_0^1 \left(\int_0^{1-x} (x^2+y^2)\,\mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x$$

$$= \int_0^1 \left(x^2 \int_0^{1-x} \mathrm{d}y + \int_0^{1-x} y^2\,\mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x = \int_0^1 \left(x^2(1-x) + \frac{(1-x)^3}{3} \right) \mathrm{d}x = \frac{1}{6}.$$



Anwendungen des Bereichsintegrals

Vereinfachte Notation:

- Für die anwendungsorientierte Modellbildung ist es günstig, eine vereinfachte Notation für die Riemannsummen im Falle **äquidistanter Zerlegungen** Z_x, Z_y einzuführen. Sind alle Intervalllängen gleich, so schreibt man

$$\Delta x = x_i - x_{i-1}, \quad \Delta y = y_j - y_{j-1}$$

und bezeichnet

$$\Delta A = \Delta x \, \Delta y$$

als das **Flächenelement** des Gitters G.

Vereinfachte Notation:

- Für die anwendungsorientierte Modellbildung ist es günstig, eine vereinfachte Notation für die Riemannsummen im Falle **äquidistanter Zerlegungen** Z_x, Z_y einzuführen. Sind alle Intervalllängen gleich, so schreibt man

$$\Delta x = x_i - x_{i-1}, \quad \Delta y = y_j - y_{j-1}$$

  und bezeichnet

$$\Delta A = \Delta x \Delta y$$

  als das **Flächenelement** des Gitters G.

- Nimmt man dann die rechte obere Ecke $\mathbf{p}_{ij} = (x_i, y_j)$ des Teilrechtecks $[x_{i-1}, x_i] \times [y_{j-1}, y_j]$ als Zwischenpunkt, so schreibt sich die zugehörige Riemannsumme als

$$S = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} f(x_i, y_j) \Delta A = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} f(x_i, y_j) \Delta x \Delta y.$$

Anwendung 2.23 Masse als Integral der Dichte

- Ein dünner, ebener Körper D besitze die **Dichte** $\rho(x, y)$ [Masse/Flächeneinheit] im Punkt (x, y).

Anwendung 2.23 Masse als Integral der Dichte

- Ein dünner, ebener Körper D besitze die **Dichte** $\rho(x,y)$ [Masse/Flächeneinheit] im Punkt (x,y).
- **Konstante Dichte:** Gesamtmasse $=$ Dichte ρ mal Flächeninhalt A.

Anwendung 2.23 Masse als Integral der Dichte

- Ein dünner, ebener Körper D besitze die **Dichte** $\rho(x,y)$ [Masse/Flächeneinheit] im Punkt (x,y).
- **Konstante Dichte:** Gesamtmasse $=$ Dichte ρ mal Flächeninhalt A.
- **Variable Dichte:** Z.B. auf Grund von Materialänderungen von Punkt zu Punkt.

  Wir unterteilen D in kleine Teilrechtecke mit Seiten Δx, Δy. Die in einem Teilrechteck um (x,y) befindliche Masse ist näherungsweise gleich

$$\rho(x,y)\,\Delta A = \rho(x,y)\,\Delta x\,\Delta y;$$

  die **Gesamtmasse** somit näherungsweise gleich

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}\rho(x_i,y_j)\,\Delta x\,\Delta y.$$

  Dies ist aber gerade eine Riemannsumme für

$$M = \iint_D \rho(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$

Dies zeigt, dass das Integral über die Dichtefunktion ein plausibles Modell für die Gesamtmasse eines flächigen Körpers darstellt.

Bemerkung 2.24

In Anlehnung an die Bezeichnung ΔA für das Flächenelement schreibt man auch

$$\Delta m = \rho(x,y)\Delta A$$

und nennt Δm das **Massenelement**.

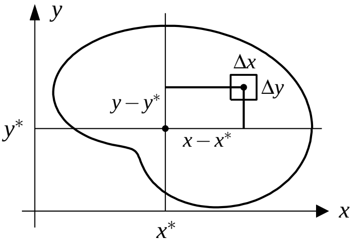
Ebenso sind dann für die Integrale folgende Schreibweisen gebräuchlich:

$$M = \iint_D \rho(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \iint_D \rho(x,y)\,\mathrm{d}A = \iint_D \mathrm{d}m.$$

Anwendung 2.25 Schwerpunkt

Betrachten einen flächigen Körper D. Die beiden **statischen Momente** eines kleinen, nahe (x,y) befindlichen Teilrechtecks in Bezug auf einen Punkt (x^*,y^*) sind

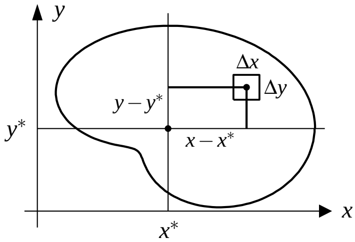
$$(x-x^*)\rho(x,y)\,\Delta x\,\Delta y, \quad (y-y^*)\rho(x,y)\,\Delta x\,\Delta y.$$



Anwendung 2.25 Schwerpunkt

Betrachten einen flächigen Körper D. Die beiden **statischen Momente** eines kleinen, nahe (x,y) befindlichen Teilrechtecks in Bezug auf einen Punkt (x^*,y^*) sind

$$(x-x^*)\rho(x,y)\,\Delta x\,\Delta y, \quad (y-y^*)\rho(x,y)\,\Delta x\,\Delta y.$$



Bedeutung der statischen Momente: Multipliziert mit der Erdbeschleunigung g ergeben sich gerade die Drehmomente in Bezug auf die Achsen durch (x^*,y^*) in Koordinatenrichtung (Kraft mal Kraftarm).

Anwendungen des Bereichsintegrals

- Der **Schwerpunkt** des flächigen Körpers D ist jener Punkt (x_S, y_S), in Bezug auf den die **Summe der statischen Momente verschwindet**:

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}(x_i - x_S)\,\rho(x_i, y_j)\,\Delta x\,\Delta y \approx 0, \quad \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}(y_j - y_S)\,\rho(x_i, y_j)\,\Delta x\,\Delta y \approx 0.$$

- Der **Schwerpunkt** des flächigen Körpers D ist jener Punkt (x_S, y_S), in Bezug auf den die **Summe der statischen Momente verschwindet**:

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}(x_i - x_S)\,\rho(x_i, y_j)\,\Delta x\,\Delta y \approx 0, \quad \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}(y_j - y_S)\,\rho(x_i, y_j)\,\Delta x\,\Delta y \approx 0.$$

- Lässt man die Feinheit des unterteilenden Gitters gegen Null gehen, so ergeben sich im **Grenzübergang**

$$\iint_D (x - x_S)\,\rho(x, y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = 0, \quad \iint_D (y - y_S)\,\rho(x, y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = 0$$

als Bedingungsgleichungen für den **Schwerpunkt**, also

$$x_S = \frac{1}{M}\iint_D x\,\rho(x, y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y, \quad y_S = \frac{1}{M}\iint_D y\,\rho(x, y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y,$$

wobei M die Gesamtmasse bezeichnet.

- Der **Schwerpunkt** des flächigen Körpers D ist jener Punkt (x_S, y_S), in Bezug auf den die **Summe der statischen Momente verschwindet**:

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}(x_i - x_S)\,\rho(x_i,y_j)\,\Delta x\,\Delta y \approx 0, \quad \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}(y_j - y_S)\,\rho(x_i,y_j)\,\Delta x\,\Delta y \approx 0.$$

- Lässt man die Feinheit des unterteilenden Gitters gegen Null gehen, so ergeben sich im **Grenzübergang**

$$\iint_D (x - x_S)\,\rho(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = 0, \quad \iint_D (y - y_S)\,\rho(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = 0$$

als Bedingungsgleichungen für den **Schwerpunkt**, also

$$x_S = \frac{1}{M}\iint_D x\,\rho(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y, \quad y_S = \frac{1}{M}\iint_D y\,\rho(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y,$$

wobei M die Gesamtmasse bezeichnet.

- Für den Spezialfall einer Belegung **konstanter Dichte** $\rho(x,y) \equiv 1$ erhält man den **geometrischen Schwerpunkt** des Bereichs D.

Beispiel 2.26 Geometr. Schwerpunkt eines gleichschenklig-rechtwinkligen Δ

$D = \{(x,y)\,;\, 0 \le x \le a,\, 0 \le y \le a-x\}$ ist ein gleichschenklig-rechtwinkliges Dreieck mit Kathetenlänge a.

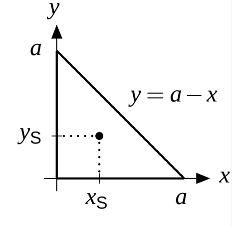
Mit Belegung $\rho(x,y) \equiv 1$ ergibt sich als **Fächeninhalt** $M = a^2/2$.

Das **erste statische Moment** ist

$$\iint_D x\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_0^a \left(\int_0^{a-x} x\,\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x = \int_0^a \left(x\int_0^{a-x}\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x = \int_0^a x\big((a-x)-0\big)\,\mathrm{d}x$$
$$= \int_0^a (ax-x^2)\,\mathrm{d}x = a\left(\frac{a^2}{2}-\frac{0^2}{2}\right)-\left(\frac{a^3}{3}-\frac{0^3}{3}\right) = \frac{1}{6}a^3.$$

Für die x-**Koordinate des Schwerpunkts** ergibt sich somit

$$x_S = \frac{1}{M}\cdot\frac{1}{6}a^3 = \frac{2}{a^2}\cdot\frac{1}{6}a^3 = \frac{a}{3}.$$



Aus Symmetriegründen gilt $y_S = x_S$.

Integrale in Polarkoordinaten

- Falls der Integrationsbereich D ein Kreisringsektor ist, so lässt sich das Integral einer Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ besonders vorteilhaft in Polarkoordinaten berechnen.
  Ebene Polarkoordinaten:

$$x = r\cos\varphi\,, \qquad y = r\sin\varphi\,.$$

- Falls der Integrationsbereich D ein Kreisringsektor ist, so lässt sich das Integral einer Funktion $f: D \to \mathbb{R}$ besonders vorteilhaft in Polarkoordinaten berechnen.
  Ebene Polarkoordinaten:

$$x = r\cos\varphi\,, \qquad y = r\sin\varphi\,.$$

- Ein **Kreisringsektor** lässt sich in folgender Form schreiben:

$$D = \{(x,y) : \alpha \leq \varphi \leq \beta, p \leq r \leq q\}.$$

- Falls der Integrationsbereich D ein Kreisringsektor ist, so lässt sich das Integral einer Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ besonders vorteilhaft in Polarkoordinaten berechnen.
  Ebene Polarkoordinaten:

$$x = r\cos\varphi\,, \qquad y = r\sin\varphi\,.$$

- Ein **Kreisringsektor** lässt sich in folgender Form schreiben:

$$D = \{(x,y) : \alpha \le \varphi \le \beta,\, p \le r \le q\}.$$

- Wir zerlegen die Intervalle $[p,q]$ für den Radius und $[\alpha,\beta]$ für den Winkel in **äquidistante Teilintervalle**

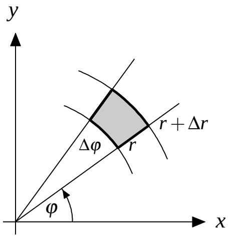
$$Z_r : p = r_0 < r_1 < r_2 < \ldots < r_{n-1} < r_n = q,$$
$$Z_\varphi : \alpha = \varphi_0 < \varphi_1 < \varphi_2 < \ldots < \varphi_{m-1} < \varphi_m = \beta$$

mit **Intervalllängen** $\Delta r = r_i - r_{i-1}$, $\Delta\varphi = \varphi_j - \varphi_{j-1}$.

- In (x, y)-Koordinaten ergibt sich eine Aufteilung des Bereichs D in kleine Teilbereiche A_{ij}, die von radialen Strahlen und Kreisbögen begrenzt sind.

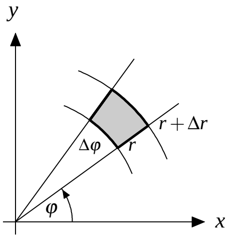
- In (x,y)-Koordinaten ergibt sich eine Aufteilung des Bereichs D in kleine Teilbereiche A_{ij}, die von radialen Strahlen und Kreisbögen begrenzt sind.
- Misst man den Winkel im Bogenmaß, so ist die Fläche eines Kreissektors vom Radius R und Öffnungswinkel θ gleich $R^2\theta/2$. Die Fläche eines Teilbereichs A_{ij} ist daher mit $r = r_i, \varphi = \varphi_j$ gleich

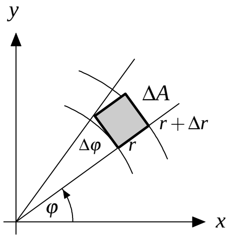
$$\frac{1}{2}(r+\Delta r)^2\Delta\varphi - \frac{1}{2}r^2\Delta\varphi = r\Delta r\Delta\varphi + \frac{1}{2}(\Delta r)^2\Delta\varphi.$$



- In (x, y)-Koordinaten ergibt sich eine Aufteilung des Bereichs D in kleine Teilbereiche A_{ij}, die von radialen Strahlen und Kreisbögen begrenzt sind.
- Misst man den Winkel im Bogenmaß, so ist die Fläche eines Kreissektors vom Radius R und Öffnungswinkel θ gleich $R^2\theta/2$. Die Fläche eines Teilbereichs A_{ij} ist daher mit $r = r_i, \varphi = \varphi_j$ gleich

$$\frac{1}{2}(r+\Delta r)^2\Delta\varphi - \frac{1}{2}r^2\Delta\varphi = r\Delta r\Delta\varphi + \frac{1}{2}(\Delta r)^2\Delta\varphi.$$





- Wir bezeichnen mit $\Delta A = r\Delta r\Delta\varphi = r\Delta\varphi \cdot \Delta r$

  das **Flächenelement in Polarkoordinaten**; es stimmt mit der Teilfläche A_{ij} bis auf einen Fehler $(\Delta r)^2\Delta\varphi/2$ kleinerer Größenordnung überein.

$$\frac{1}{2}(r+\Delta r)^2\Delta\varphi - \frac{1}{2}r^2\Delta\varphi = r\Delta r\Delta\varphi + \frac{1}{2}(\Delta r)^2\Delta\varphi.$$

- Die Riemannsummen für das Integral $\iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}(x,y)$ schreiben sich dann als

$$S = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} f(r_i\cos(\varphi_j), r_i\sin(\varphi_j))\,r_i\Delta r\Delta\varphi$$

$$+\frac{1}{2}\Delta r\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} f(r_i\cos(\varphi_j), r_i\sin(\varphi_j))\Delta r\Delta\varphi.$$

Integrale in Polarkoordinaten

$$\frac{1}{2}(r+\Delta r)^2\Delta\varphi - \frac{1}{2}r^2\Delta\varphi = r\Delta r\Delta\varphi + \frac{1}{2}(\Delta r)^2\Delta\varphi.$$

- Die Riemannsummen für das Integral $\iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}(x,y)$ schreiben sich dann als

$$S = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} f(r_i\cos(\varphi_j), r_i\sin(\varphi_j))r_i\Delta r\Delta\varphi$$
$$+\frac{1}{2}\Delta r\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} f(r_i\cos(\varphi_j), r_i\sin(\varphi_j))\Delta r\Delta\varphi.$$

- Mit $n,m\to\infty$ bzw. $\Delta r\to 0$, $\Delta\varphi\to 0$ geht der zweite Summand offenbar gegen Null, während der erste gegen das Riemannintegral

$$\iint_{[p,q]\times[\alpha,\beta]} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)\, r\,\mathrm{d}(r,\varphi)$$

konvergiert.

Wir haben damit den folgenden Satz hergeleitet:

Satz 2.27 Transformationsformel in Polarkoordinaten

Der Bereich D sei gegeben durch $D = \{(x,y) : \alpha \leq \varphi \leq \beta, p \leq r \leq q\}$ und $f : D \to \mathbb{R}$ sei eine Riemann-integrierbare Funktion.

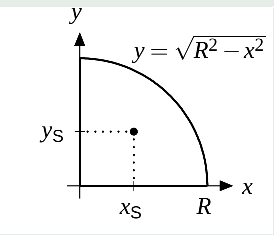
Dann gilt

$$\begin{aligned} \iint_D f(x,y)\, \mathrm{d}(x,y) &= \iint_{[p,q]\times[\alpha,\beta]} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)\, r\, \mathrm{d}(r,\varphi) \\ &= \int_p^q \int_\alpha^\beta f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)\, r\, \mathrm{d}\varphi\, \mathrm{d}r. \end{aligned}$$

Beispiel 2.28 Geometrischer Schwerpunkt eines Viertelkreises

Es sei D der Viertelkreis vom Radius R um $(0,0)$ im ersten Quadranten, also

$$D = \{(x,y)\,;\, 0 \leq r \leq R,\, 0 \leq \varphi \leq \pi/2\}$$



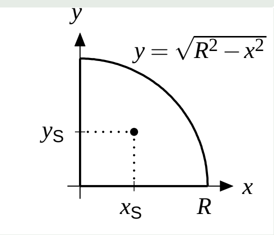
Mit $\rho(x,y) \equiv 1$ ergibt sich M als Flächeninhalt zu

$$R^2\pi/4.$$

Beispiel 2.28 Geometrischer Schwerpunkt eines Viertelkreises

Es sei D der Viertelkreis vom Radius R um $(0,0)$ im ersten Quadranten, also

$$D = \{(x,y)\,;\, 0 \le r \le R,\, 0 \le \varphi \le \pi/2\}$$



Mit $\rho(x,y) \equiv 1$ ergibt sich M als Flächeninhalt zu

$$R^2\pi/4.$$

Das erste statische Moment ist

$$\iint_D x\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_0^R \int_0^{\pi/2} r\cos\varphi\; r\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}r = \int_0^R r^2 \int_0^{\pi/2} \cos\varphi\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}r$$

$$= \int_0^R r^2\left(\sin\frac{\pi}{2} - \sin 0\right)\mathrm{d}r = \int_0^R r^2\,\mathrm{d}r = \frac{R^3}{3} - \frac{0^3}{3} = \frac{1}{3}R^3.$$

Für die x-Koordinate des Schwerpunkts ergibt sich somit $x_S = \frac{4}{R^2\pi}\cdot\frac{1}{3}R^3 = \frac{4R}{3\pi}$; aus Symmetriegründen gilt $y_S = x_S$.

Verallgemeinerung auf den $\mathbb{R}^n$

Verallgemeinerung des Integrals auf Funktionen in mehr als zwei Veränderlichen:

An Stelle von Rechtecken verwendet man n-dimensionale Quader zur Definition der entsprechenden Riemannsummen.

Für Funktionen $f:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ führen wir folgende Notationen ein:

$$\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n), \qquad y = f(\mathbf{x}) = f(x_1, x_2, \ldots, x_n).$$

Verallgemeinerung des Integrals auf Funktionen in mehr als zwei Veränderlichen:

An Stelle von Rechtecken verwendet man n-dimensionale Quader zur Definition der entsprechenden Riemannsummen.

Für Funktionen $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ führen wir folgende Notationen ein:

$$\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n), \qquad y = f(\mathbf{x}) = f(x_1, x_2, \ldots, x_n).$$

Für das n**-fache Riemann-Integral** einer integrierbaren Funktion f über eine messbare Menge $D \subset \mathbb{R}^n$ schreibt man kurz

$$\int_D f(\mathbf{x})\,\mathrm{d}\mathbf{x} = \underset{D}{\int \cdots \int} f(x_1, \ldots, x_n)\,\mathrm{d}(x_1, \ldots, x_n)$$

und für das **Dreifachintegral** (auch **Volumenintegral** genannt) entsprechend

$$\iiint_D f(x,y,z)\,\mathrm{d}(x,y,z) = \iiint_D f\,\mathrm{d}V,$$

wobei man $\mathrm{d}V = \mathrm{d}(x,y,z)$ als **Volumenelement** bezeichnet.

Der **Inhalt** V einer messbaren Menge $D \subset \mathbb{R}^n$ berechnet sich wieder als Integral über die Indikatorfunktion:

$$V = \int_D \mathrm{d}\mathbf{x} = \int_{n\text{-dim Quader}} \mathbb{1}_D(\mathbf{x})\,\mathrm{d}\mathbf{x}.$$

Der **Inhalt** V einer messbaren Menge $D \subset \mathbb{R}^n$ berechnet sich wieder als Integral über die Indikatorfunktion:

$$V = \int_D \mathrm{d}\mathbf{x} = \int_{n\text{-dim Quader}} 1\!\!1_D(\mathbf{x})\,\mathrm{d}\mathbf{x}.$$

Mehrfachintegralen über Normalgebieten als iterierte Einfachintegrale:

Gelte beispielsweise

$$D = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,;\, a \le x \le b,\ u(x) \le y \le v(x),\ g(x,y) \le z \le h(x,y)\}$$

mit genügend glatten Funktionen u, v, g und h.

Dann liefert der **Satz von Fubini** für integrierbares f die Darstellung

$$\iiint_D f(x,y,z)\,\mathrm{d}(x,y,z) = \int_a^b \left(\int_{u(x)}^{v(x)} \left(\int_{g(x,y)}^{h(x,y)} f(x,y,z)\,\mathrm{d}z \right) \mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x.$$

Beispiel 2.29

Gegeben sei der Tetraeder

$$D = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3\,;\, x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0 \text{ und } x+y+z \leq 1\}.$$

Man berechne das Volumen von D sowie $\iiint_D x \,\mathrm{d}(x,y,z)$. Wegen

$$(x,y,z) \in D \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} 0 \leq x \leq 1, \\ 0 \leq y \leq 1-x, \\ 0 \leq z \leq 1-x-y, \end{cases}$$

ist das Volumen

$$V = \int_0^1 \int_0^{1-x} \int_0^{1-x-y} \mathrm{d}z\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \int_0^{1-x} (1-x-y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x$$

$$= \int_0^1 \left((1-x)(1-x) - \frac{(1-x)^2}{2}\right) \mathrm{d}x \; = \; \frac{1}{2} \int_0^1 (1-x)^2\,\mathrm{d}x = \frac{1}{6}.$$

Beispiel Fortsetzung

Weiters ist

$$\iiint_D x \,\mathrm{d}(x,y,z) = \int_0^1 \int_0^{1-x} \int_0^{1-x-y} x \,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \int_0^{1-x} x(1-x-y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x$$

$$= \int_0^1 \left(x(1-x)(1-x) - x\frac{(1-x)^2}{2} \right) \mathrm{d}x \;=\; \frac{1}{2}\int_0^1 x(1-x)^2\,\mathrm{d}x = \frac{1}{24}.$$

Beispiel Fortsetzung

Weiters ist

$$\iiint_D x \,\mathrm{d}(x,y,z) = \int_0^1 \int_0^{1-x} \int_0^{1-x-y} x \,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \int_0^{1-x} x(1-x-y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x$$

$$= \int_0^1 \left(x(1-x)(1-x) - x\frac{(1-x)^2}{2} \right) \mathrm{d}x \; = \; \frac{1}{2}\int_0^1 x(1-x)^2\,\mathrm{d}x = \frac{1}{24}.$$

Für den Schwerpunkt eines dreidimensionalen Körper der Masse M gilt:

$$x_S = \frac{1}{M} \iiint_D x\,\rho(x,y,z)\,\mathrm{d}(x,y,z),$$

$$y_S = \frac{1}{M} \iiint_D y\,\rho(x,y,z)\,\mathrm{d}(x,y,z),$$

$$z_S = \frac{1}{M} \iiint_D z\,\rho(x,y,z)\,\mathrm{d}(x,y,z).$$

Anwendung 2.30 Trägheitsmomente

- Die **kinetische Energie** eines Körpers der Masse m, der sich mit Geschwindigkeit v geradlinig fortbewegt, beträgt $E = \frac{1}{2}mv^2$.

  Dies entspricht der **Arbeit**, die aufgebracht werden muss, um den Körper auf Geschwindigkeit v zu bringen, und ist **proportional zur *trägen* Masse** m.

Anwendung 2.30 Trägheitsmomente

- Die **kinetische Energie** eines Körpers der Masse m, der sich mit Geschwindigkeit v geradlinig fortbewegt, beträgt $E = \frac{1}{2}mv^2$.

  Dies entspricht der **Arbeit**, die aufgebracht werden muss, um den Körper auf Geschwindigkeit v zu bringen, und ist **proportional zur *trägen* Masse** m.

- Anders die Situation eines um eine Achse $\mathbf{a}$ rotierenden Körpers. Seine kinetische Energie ist

$$E = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}mr^2\omega^2,$$

  wobei r den **Normalabstand zur Achse** und ω die **Winkelgeschwindigkeit** bedeutet.

  Offenbar spielt nun auch der Abstand zur Achse eine entscheidende Rolle; die **Arbeit**, um den Körper auf Winkelgeschwindigkeit ω zu bringen, ist **proportional zu** $I = mr^2$; diese Größe wird als **Trägheitsmoment** bezeichnet.

- Ein System von n **Punktmassen** $m_1, \ldots, m_n$ besitzt das Gesamtträgheitsmoment

$$I = \sum_{i=1}^{n} m_i r_i^2$$

bezüglich einer Achse $\mathbf{a}$, wobei die r_i wieder die Abstände der einzelnen Massen zur Drehachse bezeichnen.

- Ein System von n **Punktmassen** $m_1, \dots, m_n$ besitzt das Gesamtträgheitsmoment
$$I = \sum_{i=1}^{n} m_i r_i^2$$
bezüglich einer Achse $\mathbf{a}$, wobei die r_i wieder die Abstände der einzelnen Massen zur Drehachse bezeichnen.

- Der **Übergang ins Kontinuierliche** lässt sich daraus leicht mit Riemannsummen bewerkstelligen. Rotiert ein Körper $D \subset \mathbb{R}^3$ mit Dichte $\rho(x,y,z)$ um eine Achse $\mathbf{a}$, so beträgt sein **Trägheitsmoment**
$$\iiint_D r^2(x,y,z)\rho(x,y,z)\,\mathrm{d}(x,y,z),$$
wobei $r(x,y,z)$ den Abstand des Punktes (x,y,z) zur Drehachse bedeutet.

Beispiel 2.31

Ein Vollzylinder $D = \{(x,y,z) : 0 \le z \le H, x^2 + y^2 \le R^2\}$ mit konstanter Dichte ρ rotiere um die Zylinderachse (die z-Achse).

Dann gilt

$$I = \rho \iiint_D (x^2 + y^2)\,\mathrm{d}(x,y,z) = \rho \int_0^H \left(\iint_{\{x^2+y^2 \le R^2\}} (x^2 + y^2)\,\mathrm{d}(x,y) \right) \mathrm{d}z.$$

Führen wir in der (x,y)-Ebene Polarkoordinaten ein, so gilt weiter

$$I = \rho \int_0^H \left(\int_0^{2\pi} \int_0^R r^2\, r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\varphi \right) \mathrm{d}z = \rho H\, 2\pi \frac{R^4}{4} = \frac{1}{2} M R^2,$$

wobei M die Gesamtmasse des Zylinders bedeutet.

Die Integration vektorwertiger Funktionen:

Vektorwertige Funktion sind Funktionen von $\mathbb{R}^n$ mit Werten in $\mathbb{R}^m$.

Wir schreiben dafür

$$\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n), \qquad \mathbf{y} = [y_1, y_2, \ldots, y_m]^\mathsf{T}$$

und

$$\mathbf{y} = \mathbf{f}(\mathbf{x}), \qquad \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1(x_1, x_2, \ldots, x_n) \\ f_2(x_1, x_2, \ldots, x_n) \\ \vdots \\ f_m(x_1, x_2, \ldots, x_n) \end{bmatrix}.$$

Das **vektorwertige Integral** ist einfach **komponentenweise** zu verstehen:

$$\int_D \mathbf{f}(\mathbf{x})\,\mathrm{d}\mathbf{x} = \begin{bmatrix} \int\cdots\int_D f_1(x_1,\ldots,x_n)\,\mathrm{d}(x_1,\ldots,x_n) \\ \int\cdots\int_D f_2(x_1,\ldots,x_n)\,\mathrm{d}(x_1,\ldots,x_n) \\ \vdots \\ \int\cdots\int_D f_m(x_1,\ldots,x_n)\,\mathrm{d}(x_1,\ldots,x_n) \end{bmatrix}$$

Z.B. Formel für den Schwerpunkt $\mathbf{x}_\mathsf{S} = (x_\mathsf{S}, y_\mathsf{S}, z_\mathsf{S})$ eines dreidimensionalen Körpers der Masse M:

$$\mathbf{x}_\mathsf{S} = \frac{1}{M}\iiint_D \mathbf{x}\,\rho(\mathbf{x})\,\mathrm{d}V.$$