1. Beispiel (10 Punkte)

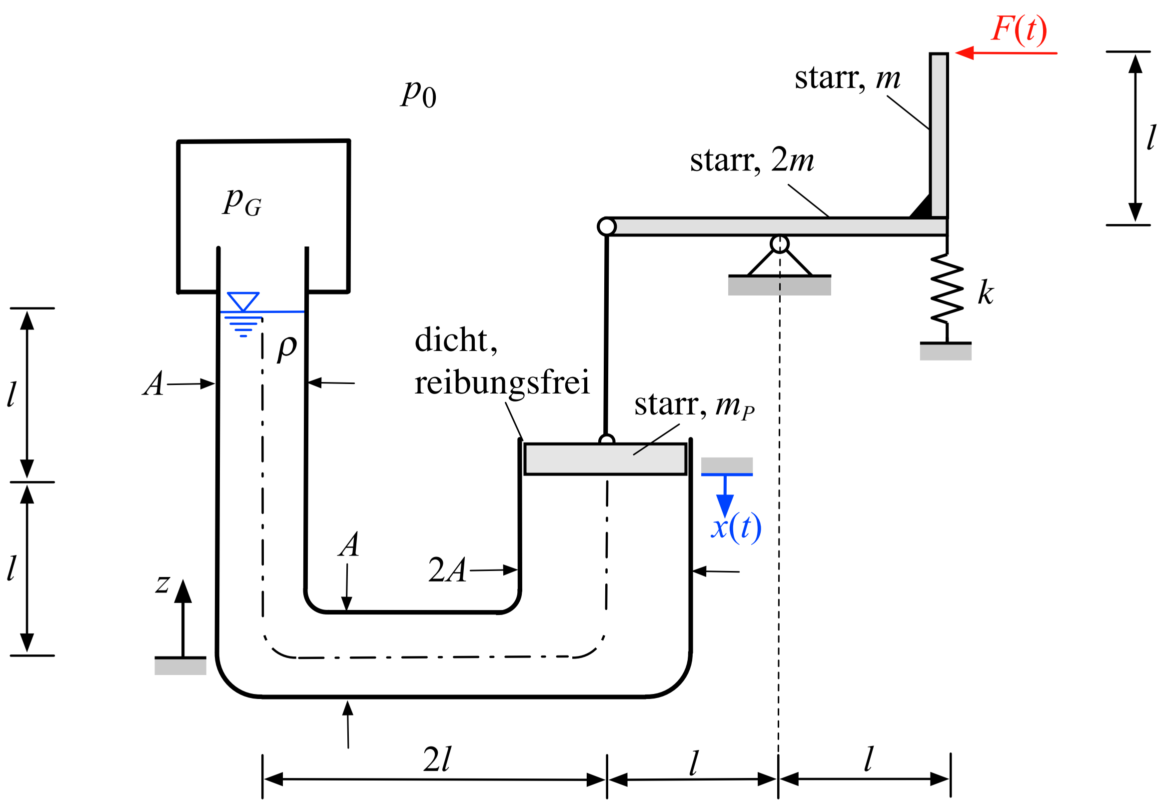
Gegeben:

Schwingende Flüssigkeitssäule mit federnd gelagertem Stab lt. Skizze in entspannter Federlage:

- Starrer Stab: Masse $2m$, Länge $2l$
- Starrer Stab: Masse m, Länge l
- Starrer Kolben: Masse m_P
- Linear elastische Feder: Federsteifigkeit k
- Rohr: Längenmaß l, Querschnittsflächenmaß A
- Inkompressible, reibungsfrei strömende schwere Flüssigkeit mit der Dichte ρ
- Umgebungsdruck p_0
- Gasdruck $p_G \gg p_0$
- Einzelkraft $F(t)$

Gesucht:

1. Anzahl der Freiheitsgrade und Wahl der Lagekoordinate(n)
2. Bewegungsgleichung(en) des Systems für kleine Schwingwege
3. Statische Gleichgewichtslage des Kolbens



Lösung zum 1. Beispiel

1. Anzahl der Freiheitsgrade

1 FG;   LK: $x(t)$ ... vertikale Verschiebung des Kolbens

2. Bewegungsgleichung für kleine Schwingungen

$$\left(m+\frac{m_p}{2}+9\rho Al\right)\ddot{x}+3\rho A\ddot{x}x+\frac{3}{2}\rho A\dot{x}^2+\left(\frac{1}{2}k+3\rho gA\right)x=-p^*A-\rho gAl+\frac{(m_p-m)g}{2}+\frac{F(t)}{2}$$

3. Statisches Gleichgewicht des Kolbens

$$x_{stat}=\frac{-p^*A-\rho gAl+\frac{(m_p-m)g}{2}}{\frac{1}{2}k+3\rho gA}$$

2. Beispiel (10 Punkte)

Gegeben:

Ebenes schwingungsfähiges System laut Skizze, welches sich in der gezeichneten Lage unter Wirkung der Gewichtskräfte im statischen Gleichgewicht befindet:

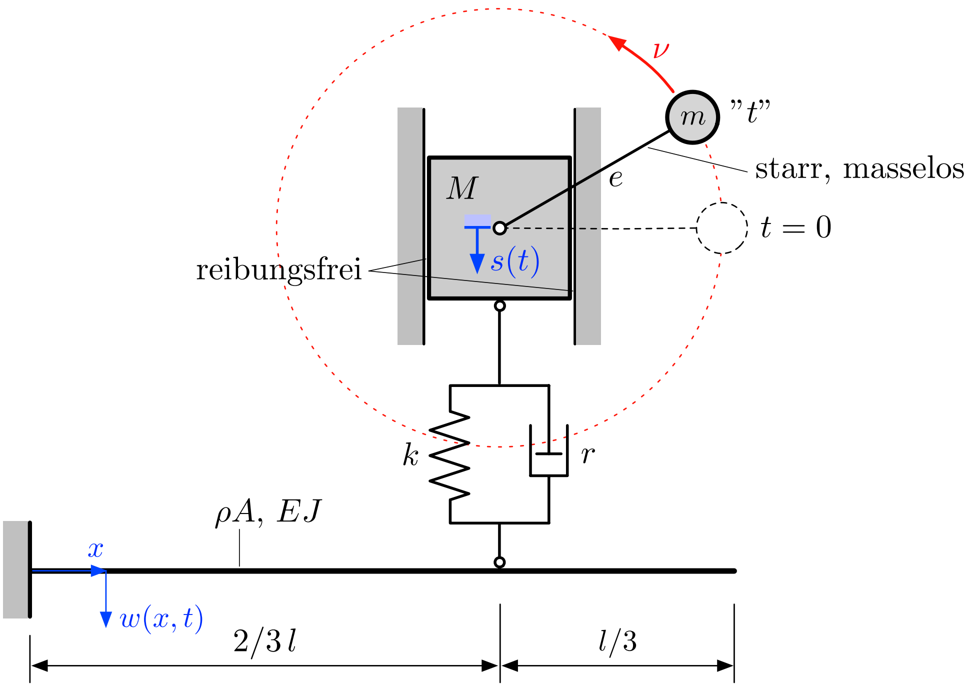
- Linear elastischer Biegestab: Masse pro Längeneinheit ρA, Biegesteifigkeit EJ, Länge l
- Punktmasse M
- Punktmasse m, die über einen starren masselosen Stab (Länge e) gelenkig mit der Punktmasse M verbunden ist und mit der Frequenz ν rotiert
- Linear elastische Feder: Federsteifigkeit k
- Geschwindigkeitsproportionaler Dämpfer: Dämpferkonstante r
- Lagekoordinate: $s(t)$

Gesucht:

1. Anzahl der Freiheitsgrade des Ersatzsystems bei Verwendung des folgenden *Ritz*schen Ansatzes für die Durchbiegung w des Biegestabs:

   $$w^*(x,t) = q(t)\varphi(x)\,,\; \varphi(x) = \left(\frac{x}{l}\right)^2\,,\; 0 \leq x \leq l$$

2. a) Kinetische Energie
   b) Potentielle Energie
   c) Generalisierte Kräfte
   des Ersatzsystems für Schwingungen um die statische Gleichgewichtslage
3. Bewegungsgleichung(en) des Ersatzsystems mit den *Lagrange*schen Gleichungen



Lösung zum 2. Beispiel

1. Anzahl der Freiheitsgrade

2 FHG, $s(t)$ … vertikale Verschiebung der Punktmasse M

$q(t)$ … Durchbiegung des Biegeträgers an der Stelle $x = l$

2.a) Kinetische Energie

$$T = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{5}\rho A l\,\dot{q}^2 + M\dot{s}^2 + m\left((e\nu)^2 - 2\,e\nu\cos(\nu t)\,\dot{s} + \dot{s}^2\right)\right]$$

2.b) Potentielle Energie

$$U = \frac{1}{2}\left[\frac{4\,EJ}{l^3}q^2 + k\left(s - \frac{4}{9}q\right)^2\right]$$

$$W = 0$$

2.c) Generalisierte Kräfte

$$Q_q = \frac{4}{9}r\left(\dot{s} - \frac{4}{9}\dot{q}\right)$$

$$Q_s = -r\left(\dot{s} - \frac{4}{9}\dot{q}\right)$$

3. Bewegungsgleichungen

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{5}\rho A l & 0 \\ 0 & M+m \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \ddot{q} \\ \ddot{s} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{16}{81}r & -\frac{4}{9}r \\ -\frac{4}{9}r & r \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \dot{q} \\ \dot{s} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{4EJ}{l^3} + \frac{16}{81}k & -\frac{4}{9}k \\ -\frac{4}{9}k & k \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} q \\ s \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ -m\,e\nu^2\sin(\nu t) \end{Bmatrix}$$