

# 1 Kurze Einführung in die Analytische Geometrie

## 1.1 Koordinatensysteme und Koordinaten ganz kurz

Um einen Punkt in der Ebene beschreiben zu können benötigt man ein *Koordinatensystem*. Dieses besteht aus zwei Geraden (den Achsen), welche (i) sich in genau einem Punkt schneiden (den Nullpunkt) und (ii) auf denen jeweils ein Punkt im Abstand von 1 Meter markiert ist (zur Festlegung des Längenmaßes).

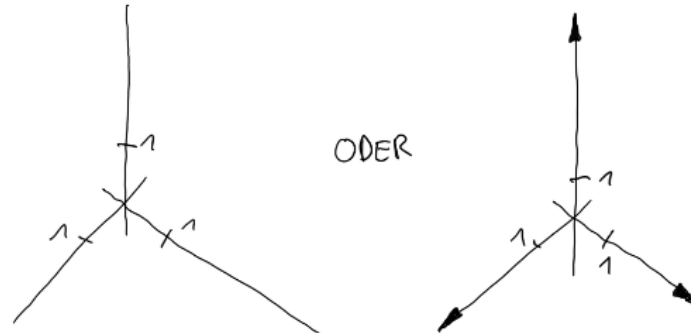


Figure 1: Zwei Darstellungen eines Koordinatensystems im Raum.

Ein Punkt  $P$  in der Ebene (der beiden Achsen) kann wie folgt beschrieben werden. Wir denken uns zwei Geraden parallel zu den Achsen in den Punkt  $P$  verschoben und markieren ihre Schnittpunkte mit den Achsen. Die Abstände dieser Markierungen vom Nullpunkt werden die Koordinaten des Punkte genannt (vgl. Abb. 2).

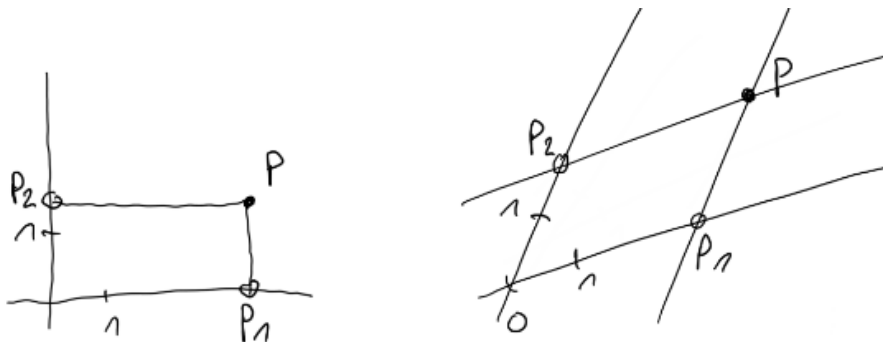


Figure 2: Darstellung eines Punktes  $P = (P_1, P_2)$  und seiner Koordinaten  $P_1$  und  $P_2$  bzgl. zwei verschiedener Koordinatensysteme in der Ebene.

Es gibt zwei verschiedene Möglichkeiten um mit den Koordinaten den Punkt  $P$  zu beschreiben, nämlich  $P = (P_1, P_2)$  (im Rechtssystem) und  $P = (P_2, P_1)$  (im Linkssystem). Informieren Sie sich kurz im Internet über solche Systeme! Häufig arbeitet man mit einem Rechtssystem bei dem der Winkel zwischen den Achsen 90 Grad (bzw.  $\frac{\pi}{2}$  Radiant) beträgt. Die Menge der Punkte in der Ebene bzw. des dreidimensionalen Raumes bezeichnet man üblicherweise mit  $\mathbb{R}^2$  bzw.  $\mathbb{R}^3$ .

Analoges gilt für Koordinaten im Raum.

## 1.2 Länge einer Strecke

Aufgrund des Satzes des Pythagoras ist die Länge der Strecke  $\overline{PQ}$  zwischen den Punkten  $P = (P_1, P_2, P_3)$  und  $Q = (Q_1, Q_2, Q_3)$  gegeben durch (vgl. Abb 3. )

$$\text{Länge von } PQ := \overline{PQ} := \sqrt{(Q_1 - P_1)^2 + (Q_2 - P_2)^2 + (Q_3 - P_3)^2} =: |P - Q|.$$

Insbesondere gilt für die Länge der Strecke zwischen den Punkt  $V = (V_1, V_2, V_3)$  und dem Nullpunkt  $O = (0, 0, 0)$ :

$$\text{Länge von } VO := \overline{VO} = \sqrt{V_1^2 + V_2^2 + V_3^2} =: |V|.$$

Üblicherweise bezeichnet man die Länge der Strecke  $PQ$  auch mit  $|P - Q|$  bzw.  $|Q - P|$  (siehe Abschnitt 1.3).

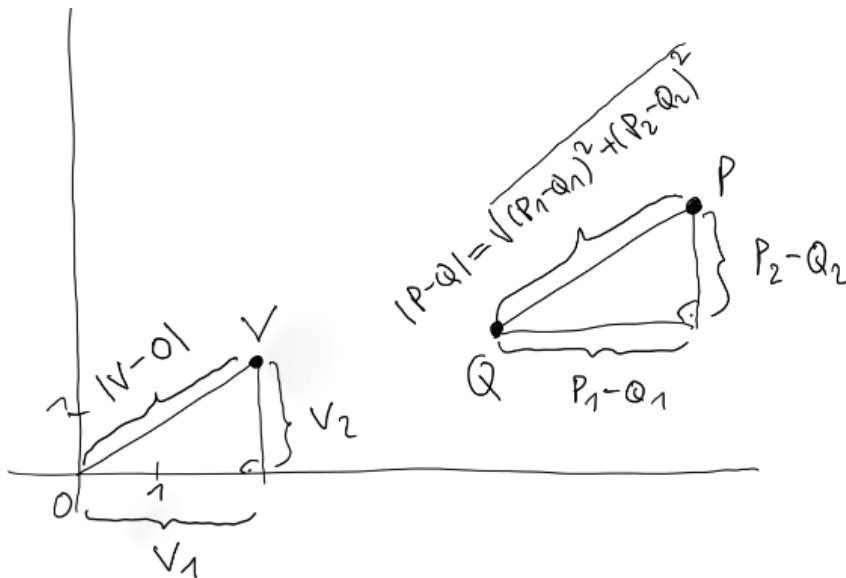


Figure 3: Abstand von zwei Punkten  $P$  und  $Q$  bzw.  $0$  und  $V$  in der Ebene und die Länge der Strecken  $PQ$  und  $VO$ . Statt den Vektor  $V - 0$  schreibt man oft (schlampig)  $V$ .

## 1.3 Vektoren und deren Länge bzw. Norm

Ein Vektor  $v$  ist durch die Differenz zweier Punkte eindeutig bestimmt, z.B.  $v = P - Q$ , und er kann überall hin verschoben sein. Genau genommen ist ein Vektor eine Menge von 'Pfeilen', die durch einen Pfeil, z.B. mit Anfangspunkt  $Q$  und Endpunkt  $P$ , repräsentiert wird (vgl. Abb. 4).

**Bemerkung 1** *So etwas kennen Sie schon! Denn  $\frac{1}{2}$ ,  $\frac{2}{4}$  und  $\frac{0.1}{0.2}$  sind drei unterschiedliche Repräsentanten von Einhalb. (Oder  $1$ ,  $\frac{2}{2}$  und  $\frac{7-3}{4}$  für die Eins.) D.h. Eine Zahl ist genau genommen eine Menge von äquivalenten Objekten, welche je einen Repräsentanten der Zahl darstellen. Das wichtige ist, dass das Rechnen mit den Repräsentanten nicht zu Widersprüchen führt; aber man kann beweisen, dass dem tatsächlich so ist. Dies ist z.B. eine Aufgabe der Mathematik.*

Jetzt müssten wir aber noch genau erklären wie man mit den Pfeilen (Representanten) bzw. Vektoren (Mengen) rechnet, aber wir setzen voraus das Sie dies schon wissen bzw. selbst mithilfe des Internets oder einem Buch lernen können. An anderer Stelle wird noch mehr über die Rechenregel von Vektoren besprochen!

Beachte:  $v := (V_1, V_2, V_3)$  bezeichnet den Vektor mit Representanten  $(V_1, V_2, V_3)$ , d.h. der Pfeil der im Nullpunkt  $O = (0, 0, 0)$  startet und in Punkt  $V := (V_1, V_2, V_3)$  endet. Sehr oft schreibt man auch  $v := (v_1, v_2, v_3)$ . Man müsste eigentlich folgendes schreiben: Es sei  $v_1 := (V_1, V_2, V_3)$  ein Representant des Vektors  $v$  .... Aber niemand macht dies, es sei den, man beweist, das das Rechnen mit Vektoren widerspruchsfrei ist.

Die *Länge* bzw. *Norm* eines Vektors  $v := (v_1, v_2, v_3)$  ist definiert durch

$$|v| := |V - 0| := \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2}.$$

Ein Vektor mit Länge bzw. Norm 1 wird *normiert* genannt. Jeder Vektor  $m$  kann durch  $\frac{m}{|m|}$  normiert werden.

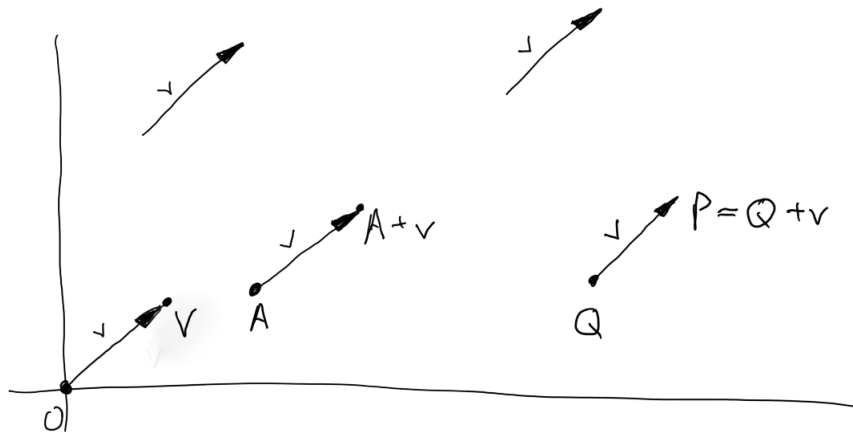


Figure 4: Darstellungen des Vektors  $v$ . Die Punkte  $V$ ,  $A$ ,  $P$  und  $Q$  sind in der Ebene fixiert, aber der Vektor  $v$  kann überall in der Ebene verschoben sein. Ist der Vektor  $v$  bei  $Q$ , so gilt  $v = P - Q$  und ist der Vektor bei  $A$  so liegt seine Spitze bei  $A + v$ .

**Beispiel 1** Gegeben ist ein gleichseitiges Dreieck mit der Seitenlänge  $a = 10$ . Eine der Seiten liegt auf der  $x$ -Achse mit Anfangspunkt bei  $x = 0$  und Endpunkt bei  $x = a$ . Gebe die Koordinaten der drei Eckpunkte des Dreiecks an.

Zuerst machen Sie sich eine Skizze mit allem drum und dran! Der 'erste' Eckpunkt liegt bei  $A = (0, 0)$  und der 'zweite' Eckpunkt bei  $B = (a, 0) = (10, 0)$ . Beim Dritten müssen wir ein wenig rechnen (Skizze!). Wenn alle drei Seiten gleich sind dann folgt, dass alle Innenwinkel gleich sind und zwar  $\frac{180^\circ}{3}$  also  $60^\circ$  bzw.  $\frac{\pi}{3}$ . (Die Summe der Innenwinkel eines Dreieckes ergibt  $180^\circ$  bzw.  $\pi$ !) Mit Hilfe des Pythagoras und ihrer Skizze folgt

$$a^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 + h^2 \quad , \text{wobei } h \text{ die Höhe des Dreieckes über der Seite } AB \text{ ist.}$$

*Achtung:* Es ist üblich die Seite eines Dreieckes mit  $a$  als auch seine Länge mit  $a$  zu bezeichnen. Wir werden dies vermeiden. In diesem Beispiel bezeichnet  $a$  nur die Länge der Seite.

Damit folgt für die Höhe

$$h = \sqrt{a^2 - \frac{a^2}{4}} = a \sqrt{1 - \frac{1}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2} a.$$

Da der letzte Punkt des Dreiecks die Koordinaten  $\frac{a}{2}$  und  $\frac{\sqrt{3}}{2} a$  hat, folgt  $C = \left(\frac{a}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2} a\right)$ .

Zur Probe rechnen wir alles Seiten als Längen der Vektoren  $B - A$ ,  $C - B$  und  $A - C$  aus. Der Einfachheit halber rechnen wir ihre Quadrate aus, sodass die Wurzel vermieden wird.

$$|B - A|^2 = (B_1 - A_1)^2 + (B_2 - A_2)^2 = (a - 0)^2 + (0 - 0)^2 = a^2 \quad (\text{richtig}),$$

$$|C - B|^2 = (C_1 - B_1)^2 + (C_2 - B_2)^2 = \left(\frac{a}{2} - a\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2} a - 0\right)^2 = \frac{a^2}{4} + \frac{3a^2}{4} = a^2 \quad (\text{richtig})$$

und

$$|A - C|^2 = (A_1 - C_1)^2 + (A_2 - C_2)^2 = \left(0 - \frac{a}{2}\right)^2 + \left(0 - \frac{\sqrt{3}}{2} a\right)^2 = a^2 \quad (\text{richtig}).$$

Wir haben natürlich verwendet, dass  $(-1)^2 = +1$ . Dies war natürlich eine sehr sehr einfache Aufgabe. Wie könnte man diese Aufgabe komplizierter bzw. allgemeiner machen? Überlegen Sie sich zwei ähnliche Beispiele mit Hilfe einer Zeichnung (und unter Verwendung von Zirkel und Lineal).

**Aufgaben 1** Zeichnen Sie sich ein Trapez auf und dann berechnen Sie die Koordinaten seiner Eckpunkte für verschiedene Angaben! Dazu müssen Sie sich natürlich überlegen welche Daten (Längen und Winkel) ein Trapez eindeutig bestimmen. Zur Probe messen Sie die Koordinaten aus der Zeichnung. Nicht die Längen der Diagonalen also die Längen von  $AC$  und  $BD$  vergessen! Wenn dies zu schwer ist beginnen Sie mit einem Rechteck. Bei einem Testbeispiel würde noch der Umfang und die Fläche des Trapez berechnet werden müssen. **VERSCHIEBEN SIE DIESE AUFGABE NICHT AUF MORGEN! UND WIEDERHOLEN SIE DIESE AUFGABEN MEHRFACH!**

**Tip 1** Eine (neue schwierige) Aufgabe einmal gemacht ist oft keinmal gemacht! Eine (schwierige) Aufgabe nach längerer Zeit wieder gemacht, ist oft wie zum ersten Mal gemacht! Nur einfache Aufgaben zu rechnen ist anfangs gut, aber später sogar wie keine Aufgabe zu rechnen. Ändern sie Aufgaben sinnvoll ab und überprüfen Sie ihre Ergebnis auf unterschiedliche Weise. Dies kann ihnen beim Test auf mannigfache Weise helfen. Natürlich macht es auch Sinn an einem Tag nur einfache Aufgaben zu rechnen bzw. zu wiederholen, aber keine Fehler machen. Und dabei konzentriert sein! Seien Sie konsequent, Sie sind alt und erfahren genug dafür!

## 1.4 Skalar- und Kreuzprodukt von Vektoren

Das Skalarprodukt von zwei Vektoren  $v := (v_1, v_2, v_3)$  und  $w := (w_1, w_2, w_3)$  ist definiert durch

$$v \cdot w := v_1 w_1 + v_2 w_2 + v_3 w_3 = \sum_{l=1}^3 v_l w_l.$$

Man schreibt auch oft  $\langle v, w \rangle$  statt  $v \cdot w$ . Für zwei Dimensionen gilt natürlich  $v \cdot w := v_1 w_1 + v_2 w_2$ . Für die Länge des Vektors gilt dann

$$|v| = \sqrt{v \cdot v} \quad \text{und} \quad |v|^2 = v \cdot v.$$

Das Ergebnis folgender Aufgabe ist oft nützlich auswendig zu wissen.

**Beispiel 2** Gegeben ist der Vektor  $v = (v_1, v_2) = (4, 3)$  in der Ebene. Bestimme einen Vektor  $n$  der Normal zu  $v$  ist.

Es muss  $v \cdot n = 0$  gelten, also

$$0 = v \cdot n = (v_1, v_2) \cdot (n_1, n_2) = v_1 n_1 + v_2 n_2 = 4 n_1 + 3 n_2 .$$

Probieren ergibt  $4 \cdot (-3) + 3 \cdot 4 = 0$ , also

$$n = (-v_2, v_1) .$$

(Wegen  $4 \cdot 3 + 3 \cdot (-4) = 0$  ist auch  $(v_2, -v_1) = (3, -4)$  ein Normalvektor zu  $v$ .) In Worten, ein Normalvektor (in 2D!) zu  $(v_1, v_2)$  kann erhalten werden indem man (i)  $v_1$  und  $v_2$  vertauscht und (ii) vor einem der Komponenten ein Minus schreibt.

Soll der Normalvektor normiert sein, dann folgt

$$n = \frac{1}{\sqrt{(-3)^2 + 4^2}} (-3, 4) = \frac{1}{5} (-3, 4) .$$

Probe:  $(-3, 4) \cdot (4, 3) = (-3) \cdot 4 + 4 \cdot 3 = 0$  und  $\frac{1}{5} (-3, 4) \cdot (4, 3) = \frac{1}{5} \cdot (-3) \cdot 4 + \frac{1}{5} 4 \cdot 3 = 0$ . Hier hat  $\cdot$  zwei verschiedene Bedeutungen einerseits eine Verknüpfung zwischen zwei Vektoren (Skalarprodukt) und andererseits eine Verknüpfung zwischen reellen Zahlen (gewöhnliche Multiplikation)!

Was passiert im Raum? Wieviele Normalvektoren gibt es zu  $v = (4, 3, 1)$ ? Unendlich viele? Machen Sie sich eine Skizze!

**Aufgaben 2** Wie kann man das Skalarprodukt von zwei Vektoren mit Hilfe der Kosinusfunktion definieren? (Internet!)

**Beispiel 3** Gegeben ist ein gleichseitiges Dreieck mit den Eckpunkten  $A$ ,  $B$  und  $C$ . Berechnen Sie die Winkel mit Hilfe der Kosinusfunktion und zur Probe mit der Sinusfunktion. Benütze dazu die folgende Tabelle:

- $\sin(0^\circ) = \frac{1}{2} \sqrt{0} = 0$ ,       $\cos(0^\circ) = \frac{1}{2} \sqrt{4} = 1$
- $\sin(30^\circ) = \frac{1}{2} \sqrt{1} = \frac{1}{2}$ ,       $\cos(30^\circ) = \frac{1}{2} \sqrt{3}$
- $\sin(45^\circ) = \frac{1}{2} \sqrt{2}$ ,       $\cos(45^\circ) = \frac{1}{2} \sqrt{2}$
- $\sin(60^\circ) = \frac{1}{2} \sqrt{3}$ ,       $\cos(60^\circ) = \frac{1}{2} \sqrt{1} = \frac{1}{2}$
- $\sin(90^\circ) = \frac{1}{2} \sqrt{4} = 1$ ,       $\cos(90^\circ) = \frac{1}{2} \sqrt{0} = 0$

Aus einer guten Skizze und der Symmetrie folgt, dass alle Winkel gleich sind. Für den Winkel  $\alpha$  beim Eckpunkt  $A$  folgt

$$\cos(\alpha) = \frac{\overline{AB}/2}{\overline{AB}} = \frac{1}{2} .$$

Weil der Winkel spitz ist, d.h. Winkel zwischen  $0^\circ$  und  $90^\circ$  liegt, folgt aus obiger Tabelle:  $\alpha = 60^\circ$ . Zur Probe verwenden wir noch die Sinusfunktion. Es gilt

$$\cos(\alpha) = \frac{h}{\overline{AB}} = \frac{1}{2} \quad , \text{wobei } h \text{ die Höhe über der Seite } AB \text{ ist.}$$

Aus Beispiel 1 kennen wir die Höhe, nämlich  $h = \frac{\sqrt{3}}{2} \overline{AB}$ , und damit folgt

$$\sin(\alpha) = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2} \overline{AB}}{\overline{AB}} = \frac{\cancel{\sqrt{3}} \overline{AB} \cancel{2}}{\overline{AB} \cancel{2}} = \frac{\sqrt{3}}{2} .$$

Aus der Tabelle folgt nun wieder  $\alpha = 60^\circ$ . Natürlich wissen wir schon aus Beispiel 1, dass alle Winkel gleich  $60^\circ$  sind. Es geht darum, dass Sie lernen ihre Rechnungen auf unterschiedliche Weise zu überprüfen und so keinen Unsinn zu lernen und zugleich geübt zu werden. Ein Sportler muss (aktiv) trainieren, sonst wird er nicht erfolgreich sein und Mathematik muss man genauso aktiv betreiben. Kein Sportler hat als Fundament Hoffnung oder denkt das brauche ich eh nicht, sondern er trainiert und trainiert!

**Aufgaben 3** Wie ist das Kreuzprodukt von zwei Vektoren definiert und welche Eigenschaften hat es. (Es gibt zwei Varianten, eine bei der man die Koordinaten auf eine bestimmte Weise miteinander multipliziert und eine bei der die Sinusfunktion verwendet wird.)

**Aufgaben 4** Wie ist das Spatprodukt von drei Vektoren definiert und welche Eigenschaften hat es. Berechne das Spatprodukt der drei Vektoren  $a = (1, 3, 2)$ ,  $b = (6, 4, 5)$  und  $c = (8, 7, 9)$ .  
Lsg.:  $-21$ .

**Aufgaben 5** Berechne das Volumen des Parallelepipedes, welches durch die drei Vektoren  $a$ ,  $b$  und  $c$  aufgespannt wird. Genau wann ist dieses Volumen gleich Null? Berechne die Volumina für die drei Fälle (i)  $a = (1, 2, 3)$ ,  $b = (4, 5, 6)$  und  $c = (7, 8, 9)$ , (ii)  $a = (1, 3, 2)$ ,  $b = (6, 4, 5)$  und  $c = (8, 7, 9)$  und (iii)  $a = (1, 1, 1)$ ,  $b = (1, 1, 0)$  und  $c = (1, 0, 0)$ .  
Lsg.: Die Volumina sind  $V_1 = |0| = 0$ ,  $V_2 = |-21| = 21$  und  $V_3 = |-1| = 1$ .

## 1.5 Darstellung von Geraden in der Ebene

Was ist eine Gerade? Die einfachste Gerade in der Ebene ist gegeben durch

$$g_0 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, t \mapsto 1 \quad (\text{klassische Funktion})$$

und ihr Graph ist in Abb. 5 dargestellt. Diese Kurve können wir auch wie folgt definieren

$$g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2, t \mapsto (t, 1) \quad (\text{Kurve in Parameterdarstellung}),$$

wobei  $(t, 1)$  die Koordinaten der Punkte der Kurve genannt werden.  $g(t)$  ist der Punkt der dem Parameter  $t$  zugeordnet ist. Die Punkte  $P := (4, 1)$ ,  $Q := (\pi, 1)$  und  $R := (1, 1)$  liegen auf der Kurve  $g_2$ , aber nicht die Punkte  $U := (4, 4)$ ,  $V := (\pi, \pi)$  und  $W := (0, 0)$ .

Wir definieren  $g$  als Gerade und jede andere Gerade kann durch eine Rotation oder<sup>1</sup> Verschiebung in die Gerade  $g$  übergeführt werden. Umgekehrt kann jede andere Gerade durch Rotation oder Verschiebung aus der Geraden  $g$  erhalten werden.

**Aufgaben 6** Geben Sie eine Parameterdarstellung einer vertikalen Geraden an.

Eine alternative Darstellung der Geraden  $g$  ist gegeben durch

$$\begin{pmatrix} x - 0 \\ y - 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{bzw.} \quad (X - A) \cdot n = 0,$$

wobei

$$X := (x, y)^T, \quad A := (0, 1)^T \quad \text{und} \quad n := (0, 1)^T$$

---

<sup>1</sup>Mathematisches 'oder' also 'und/oder'.

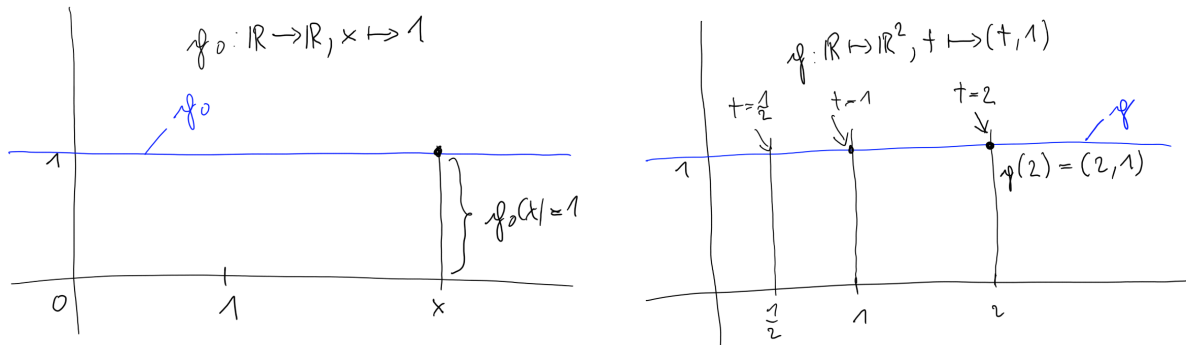


Figure 5: Darstellung einer Geraden mit Hilfe der Funktion  $g_0 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto 1$  als auch durch die Parameterdarstellung  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2, t \mapsto (t, 1)$ . Mit der Parameterdarstellung kann jede Gerade dargestellt werden, insbesondere eine vertikale Gerade.

Beachte die Notation

$$0 := (0, 0)^T = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad A := (a_1, a_2)^T = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}.$$

In Worten, *Transponieren* von  $(a_1, a_2)$  ergibt  $A$ . Man spart damit Platz in einem Skriptum. Hier ist  $A$  ein Punkt auf der Geraden (,denn  $g_0(a_1) = g_0(0) = 1 = a_2$ ,) und  $n$  ist ein Vektor normal zur Geraden. Achtung: Sehr oft stellt man einem Punkt  $P$  mit  $(P_1, P_2)$  und nicht mit  $\begin{pmatrix} P_1 \\ P_2 \end{pmatrix}$  dar, dies kann zur Verwirrung führen.

Ganz allgemein kann eine Gerade durch einen Punkt  $A$  auf der Geraden und einen Normalvektor  $n$  der Geraden dargestellt werden, nämlich durch (vgl. Abb 6)

$$(X - A) \cdot n = 0 \quad \text{bzw.} \quad \begin{pmatrix} x - a_1 \\ y - a_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{Hesseform der Geraden.}$$

Man schreibt oft auch  $X \cdot n - d = 0$ , wobei  $d = A \cdot n$  den (minimalen) Abstand der Geraden zum Nullpunkt  $(0, 0)$  angibt falls die Länge (bzw. Norm) von  $n$  gleich 1 ist. Die *Hessesche Normalform* ist gegeben durch

$$(X - A) \cdot \frac{n}{|n|} = 0.$$

Der (minimalen) Abstand der Geraden zum Nullpunkt ist immer  $A \cdot \frac{n}{|n|}$ .

**Beispiel 4** Gegeben ist die Gerade  $h$  durch die Hesseform  $X \cdot n - d = 0$  mit normierten normal Vektor  $n$ , d.h.  $|n| := \sqrt{n \cdot n} = \sqrt{n_1^2 + n_2^2} = 1$ . Zeige, dass  $|d|$  den (minimalen) Abstand der Geraden zum Nullpunkt  $(0, 0)$  angibt.

Aus der Skizze in Abb. 6 sehen wir, dass der Punkt  $Q$  derjenige Punkt auf der Geraden  $h$  ist mit minimalen Abstand (,denn die Gerade durch den Nullpunkt und  $Q$  steht normal auf  $h$ ). Damit muss es eine reelle Zahl  $\lambda$  geben, sodass  $Q = 0 + \lambda n = \lambda n$ . Deshalb ist der Abstand durch  $|Q - 0|$  gegeben, also

$$\min \text{ Abstand} = |Q| = |\lambda n| = |\lambda| |n| = |\lambda|.$$

Jetzt müssen wir noch  $\lambda$  berechnen. Weil  $Q$  auf der Geraden  $h$  liegt muss  $Q \cdot n - d = 0$  gelten, also<sup>2</sup>

$$0 = Q \cdot n - d = (\lambda n) \cdot n - d = \lambda - d \quad (n \cdot n = |n| = 1).$$

<sup>2</sup>Wir erinnern an die Vektorraumregel:  $(\lambda n) \cdot m = \lambda(n \cdot m) = (\lambda m) \cdot n$  für eine reelle Zahl  $\lambda$  und Vektoren  $n, m$ .

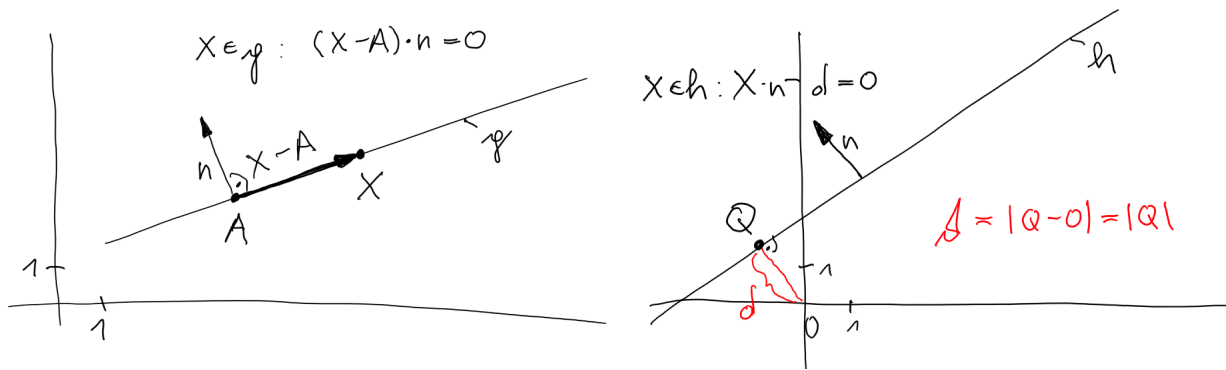


Figure 6: Darstellung einer Geraden mit Hilfe der Hesseform. Es werden ein Punkt  $A$  auf der Geraden und ein Normalvektor  $n$  zur Geraden benötigt. Falls  $|n| = 1$  gilt, dann ist der kleinste Abstand (bzw. der Normalabstand) der Geraden zum Nullpunkt gegeben durch  $d := A \cdot n$ . Andernfalls ist dieser Abstand durch  $d := A \cdot \frac{n}{|n|}$  gegeben.

*Dies ist aber äquivalent zu  $\lambda = d$  und somit ist der minimal Abstand der Geraden zum Nullpunkt gegeben durch  $|d|$ . Warum muss  $n$  normiert sein?*

Die Parameterdarstellung einer Geraden<sup>3</sup> auf der die Punkte  $A$  und  $B$  liegen lautet

$$X(t) = A + t(B - A) \quad \text{für alle reellen Zahlen } t.$$

Dies ist eine Funktion die jedem  $t \in \mathbb{R}$  einen Punkt  $X(t)$  zuordnet. Sie hat die Eigenschaft

$$X(0) = A \quad \text{und} \quad X(1) = B,$$

d.h. die Punkte  $A$  und  $B$  liegen tatsächlich auf der Geraden. Wir sehen, dass eine Gerade durch zwei Punkte gegeben ist; sie ist sogar eindeutig durch zwei Punkte gegeben. Vgl. Abb. 7.

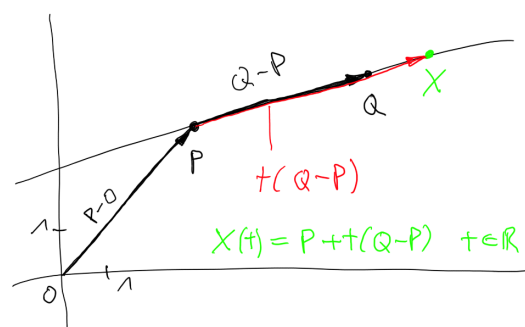


Figure 7: Darstellung einer Geraden mit Hilfe ihrer Parameterdarstellung. Es werden zwei verschiedene Punkte  $P$  und  $Q$ , die auf der Geraden liegen, benötigt.

**Beispiel 5** Bestimme die Gleichungen der Gerade die eindeutig durch zwei Punkte  $P = (\pi, 2)$  und  $Q = (3\pi, 8)$  gegeben ist. (Zeichnen Sie sich die Gerade auf!)

<sup>3</sup>Diese Darstellung gilt nicht nur in der Ebene sondern auch im Raum!

Von den zwei Punkten  $P$  und  $Q$  bekommen wir sofort die Parameterdarstellung der Geraden, nämlich

$$X(t) = P + t(Q - P),$$

also

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P_1 + t(Q_1 - P_1) \\ P_2 + t(Q_2 - P_2) \end{pmatrix} \quad \text{bzw.} \quad \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \pi + t(3\pi - \pi) \\ 2 + t(8 - 2) \end{pmatrix}$$

Damit ist die Gerade durch die Gleichungen (nun mit konkreten Zahlen)

$$x(t) = \pi + 2\pi t \quad \text{und} \quad y(t) = 2 + 6t \quad (t \text{ ist Parameter})$$

eindeutig gegeben. Wir können diese Gleichungen noch zu einer Gleichung vereinfachen indem wir bei einer den Parameter  $t$  isolieren, z.B.  $t = \frac{x}{2\pi} - \frac{1}{2}$  (erste Gleichung) und somit  $y = 2 + 6 \left( \frac{x}{2\pi} - \frac{1}{2} \right)$  (einsetzen in zweite Gleichung). Zusammenfassend erhalten wir

$$\frac{3}{\pi}x - y = 1 \quad (x \text{ und } y \text{ sind die Unbekannten})$$

als Geradengleichung. Natürlich können Sie auch  $y = \frac{3}{\pi}x - 1$  oder  $x = \frac{\pi}{3}(1 - y)$  oder ... schreiben. Wir sehen, dass diese Gerade die  $x$ -Achse bei  $x = \frac{\pi}{3}$  und die  $y$ -Achse bei  $y = -1$  schneidet und die positive Steigung  $\frac{3}{\pi}$  hat.

**Satz 1** Jede Gerade in der Ebene ist gegeben durch

$$ax + by + c = 0 \quad , \text{wobei } a, b \text{ und } c \text{ drei (fixe) reelle Zahlen sind.}$$

Genauer, alle  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$  liegen auf einer Geraden (definiert durch  $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ ) genau dann, wenn die obige Gleichung gilt.

**Aufgaben 7** Welche Tripel  $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$  bestimmen ein vertikale Gerade und welche eine horizontale? Es gibt natürlich unendlich viele für jede Gerade, denn die Gleichung kann mit jeder Zahl  $\neq 0$  multipliziert werden ohne die Lösung zu verändern, wie z.B.  $3ax + 3by + 3c = 3 \cdot 0 = 0$ . Achtung: Dies gilt nicht fürs quadrieren und wurzelziehen! Und noch etwas, es gilt

$$\sqrt{a^2 + b^2} \neq a + b \quad (\text{Ein häufiger schwerer Fehler!}).$$

Ok jetzt sind wir stark abgedriftet.

**Beispiel 6** Bestimme die Hesseform der Gerade die eindeutig durch die zwei Punkte  $P = (\pi, 2)$  und  $Q = (3\pi, 8)$  gegeben ist und bestimme ihren (minimalen) Abstand zum Nullpunkt.

Ein Normalvektor zur Geraden steht natürlich normal auf den Vektor  $Q - P = (2\pi, 6)$  der parallel zur Geraden liegt. Mit Hilfe von Aufgabe 2 folgt  $n = (-6, 2\pi)$ . Damit ergibt sich die Hesseform:

$$(X(t) - P) \cdot n = 0 \quad \text{bzw.} \quad X(t) \cdot n - d = 0 \quad \text{mit} \quad d = P \cdot n,$$

wobei der Normalvektor nicht normiert ist. Normieren des Normalvektors ergibt:

$$X(t) \cdot \frac{n}{|n|} - \tilde{d} = 0 \quad \text{mit} \quad \tilde{d} = P \cdot \frac{n}{|n|} \quad \text{und} \quad |n| = \sqrt{6^2 + 4\pi^2} \approx 8,688$$

und der (minimale) Abstand ist gegeben durch

$$|\tilde{d}| = \left| P \cdot \frac{n}{|n|} \right| = \frac{|(\pi, 2) \cdot (-6, 2\pi)|}{\sqrt{6^2 + 4\pi^2}} = \frac{|-6\pi + 4\pi|}{\sqrt{6^2 + 4\pi^2}} = \frac{2\pi}{\sqrt{6^2 + 4\pi^2}} \approx 0,723.$$

Zeichnen Sie die Gerade, dann die Normale zur Geraden durch den Nullpunkt und messen Sie den Abstand mit dem Lineal. Wiederholen Sie dieses Beispiel als Aufgabe mit anderen (netteren) Zahlen (,die Sie aus einer Zeichnung entnehmen).

**Beispiel 7** Gegeben sind die Punkte  $A = (0, 1, 0)$ ,  $B = (1, 0, 0)$ ,  $C = (0, 0, 2)$  und  $D = (3, -6, 8)$  im Raum. Bestimme die Parameterdarstellung der Geraden die durch die Punkte  $A$  und  $B$  bzw.  $C$  und  $D$  gehen. Berechne weiters den Schnittpunkt der beiden Geraden.

Die Parameterform der beiden Geraden lauten

$$X(t) = A + t(B - A) \quad \text{und} \quad Y(s) = C + s(D - C) \quad \text{für} \quad t, s \in \mathbb{R}$$

und ihr Schnittpunkt muss

$$A + t(B - A) = C + s(D - C) \quad \text{bzw.} \quad (t, 1 - t, 0) = (3s, -6s, 2 + 6s)$$

erfüllen (falls er existiert). Dies sind drei Gleichungen für die zwei Unbekannten  $t$  und  $s$  und Sie lauten

$$t = 3s, \quad 1 - t = -6s \quad \text{und} \quad 2 + 6s = 0.$$

Aus der letzten folgt  $s = -\frac{1}{3}$  und aus der ersten folgt  $t = -1$ . Damit es einen Schnittpunkt geben kann muss noch die zweite Gleichung erfüllt sein. Einsetzen in die zweite Gleichung ergibt:

$$2 = 1 - (-1) \stackrel{?}{=} -6 \left(-\frac{1}{3}\right) = 2 \quad (\text{Gleichung ist erfüllt!}).$$

*Achtung:* Angenommen es gibt keinen Schnittpunkt und man rechnet nur  $s$  und  $t$  aus, dann führen unterschiedliche Rechnungen zu unterschiedlichen (falschen) Lösungen. Setzt man aber  $s$  und  $t$  in alle drei Gleichungen ein, so sieht man das nicht alle Gleichungen gelten. Also kein wirklicher Widerspruch, den alle diese Lösungen sind falsch.

Für den Schnittpunkt, nennen wir in  $S$ , folgt nun

$$S = X(-1) = (-1, 1 - (-1), 0) = (-1, 2, 0).$$

Es gilt auch  $Y\left(-\frac{1}{3}\right) = S$ .

Übrigens, der Schnittpunkt existiert genau, dann wenn die Vektoren  $(B - A)$  und  $(D - C)$  nicht kollinear sind, es also keine reelle Zahl  $\lambda$  mit  $(B - A) = \lambda(D - C)$  gibt. Dies ist gleichbedeutend mit  $(B - A) \times (D - C) \neq 0$  (das Kreuzprodukt ist nicht der Nullvektor). Eine kleine Nebenrechnung zeigt  $(B - A) \times (D - C) = (0, -6, -3) \neq (0, 0, 0)$ , wie es sein sollte.

**Aufgaben 8** Gegeben sind die vier Punkte  $A := (1, 2)$ ,  $B := (3, 4)$ ,  $C := (4, 6)$  und  $D := (6, 9)$ . Bestimme die Parameterdarstellung der Geraden die durch die Punkte  $A$  und  $B$  bzw.  $C$  und  $D$  gehen. Berechne weiters den Schnittpunkt der beiden Geraden. Warum gibt es einen Schnittpunkt der Geraden in 2D (vergleiche die Normalvektoren)?

**Aufgaben 9** Gegeben sind zwei Geraden in 3 Dimensionen (!) mit Normalvektoren  $n_1$  und  $n_2$ . Kann die Existenz eines Schnittpunktes immer mit Hilfe von  $n_1$  und  $n_2$  gefolgert werden. Betrachten Sie verschiedene Beispiele mit Skizzen.

## 1.6 Darstellung von Kreisen in der Ebenen

Die einfachste Gleichung für einen Kreis (in der x-y-Ebene) lautet

$$x^2 + y^2 = 1^2.$$

Mit Hilfe des Pythagoras folgt, dass dieser Kreis Radius 1 hat und wegen der Symmetrie muss der Mittelpunkt im Ursprung also bei  $(0, 0)$  liegen. Ein Kreis mit Mittelpunkt  $M = (x_m, y_m)$  und Radius ist gegeben durch die Gleichung

$$(x - x_m)^2 + (y - y_m)^2 = R^2.$$

Machen Sie sich eine Skizze von Kreisen mit Mittelpunkt bei  $M = (1, 0)$ ,  $M = (0, 1)$ ,  $M = (-1, 0)$  und  $M = (1, -1)$ .

**Beispiel 8** Berechne die Schnittpunkte der Kreise

$$x^2 + y^2 = 2 \quad \text{und} \quad \left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + y^2 = 1.$$

Die Schnittpunkte müssen beide Gleichungen erfüllen. Achtung: Wir haben zwei quadratische Gleichungen, d.h. es kann (i) keine Lösung existieren, (ii) eine Lösung existieren und (iii) (hier) zwei Lösungen existieren. (Man sieht dies auch mit drei Skizzen.) Aus der ersten Gleichung folgt

$$y^2 = 2 - x^2;$$

einsetzen in die zweite Gleichung ergibt

$$\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + (2 - x^2) = 1 \quad \text{also} \quad x^2 - 3x + \frac{9}{4} + 2 - x^2 = 1.$$

Für  $x$  folgt damit

$$x = \frac{1}{3} \left( \frac{9}{4} + 2 - 1 \right) = \frac{9 + 4}{12} = \frac{13}{12} > 1.$$

Weiters gilt  $x \in (1, \sqrt{2})$  ( $\sqrt{2}$  ist der Radius des größeren Kreises), denn

$$\frac{13}{12} < \sqrt{2} \quad \Leftrightarrow \quad 13^2 < 12^2 \cdot 2 \quad \Leftrightarrow \quad 169 < 144 \cdot 2 = 288,$$

wobei die letzte Ungleichung wahr ist. Für  $y$  folgt

$$y = \pm \sqrt{2 - x^2} = \pm \sqrt{\frac{2 \cdot 12^2 - 13^2}{12^2}} = \pm \frac{\sqrt{119}}{12}.$$

Die beiden Schnittpunkte sind damit gegeben durch

$$S_1 = \left( \frac{13}{12}, -\frac{\sqrt{119}}{12} \right) \quad \text{und} \quad S_2 = \left( \frac{13}{12}, \frac{\sqrt{119}}{12} \right).$$

Machen Sie sich eine Skizze.

**Aufgaben 10** Berechne die Schnittpunkte der Kreise

$$x^2 + (y - 1)^2 = 9 \quad \text{und} \quad (x - 2)^2 + y^2 = 3.5^2.$$

Zeichnen Sie beide Kreise mit Zirkel und Lineal. Zur Probe messen Sie die Koordinaten der Schnittpunkte in ihrer Skizze mit dem Lineal.

**Aufgaben 11** Berechne die Schnittpunkte des Kreises  $x^2 + (y - 1)^2 = 9$  mit der Geraden  $y = -2x + 1$ . Zeichnen Sie den Kreis, die Gerade und messen Sie die Schnittpunkte aus der Zeichnung.

## 1.7 Darstellung von Ebenen im Raum

Ähnlich wie bei Geraden *in einer Ebene* kann eine Ebene *im Raum* durch einen Punkt  $A$  im Raum und einen Normalvektor  $n$  der Ebene dargestellt werden und zwar durch

$$(X - A) \cdot n = 0 \quad \text{bzw.} \quad \begin{pmatrix} x - a_1 \\ y - a_2 \\ z - a_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{Hesseform der Ebene.}$$

Die *Parameterdarstellung einer Ebene* auf der die Punkte  $A$  und  $B$  liegen lautet

$$X(s, t) = A + s(B - A) + t(C - A) \quad \text{für alle reellen Zahlen } s, t.$$

Dies ist eine Funktion die jedem Paar  $(s, t) \in \mathbb{R}^2$  einen Punkt  $X(s, t)$  im Raum zuordnet. Sie hat die Eigenschaft

$$X(0, 0) = A, \quad X(1, 0) = B \quad \text{und} \quad X(0, 1) = C,$$

d.h. die Punkte  $A$ ,  $B$  und  $C$  liegen tatsächlich in der Ebene. Wir sehen, dass eine Ebene durch drei Punkte gegeben ist; sie ist sogar eindeutig durch drei Punkte gegeben. Nun haben wir zwei Parameter  $s$  und  $t$  (vgl. Abb. 8).

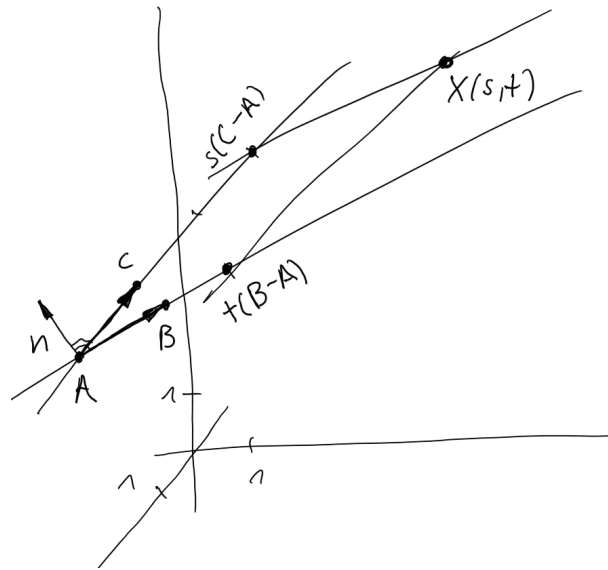


Figure 8: Darstellung einer Ebene mit Hilfe ihrer Parameterdarstellung. Es werden drei Punkte  $A$ ,  $B$  und  $C$ , die auf der Geraden liegen, benötigt.

**Beispiel 9** Gegeben sind die Gerade  $g$ , die durch die Punkte  $A$  und  $B$  geht und die Ebene  $E$ , die die Punkte  $A$ ,  $B$  und  $C$  enthält. Zeige, dass die Gerade in der Ebene liegt.

Anschaulich ist klar, dass dies gilt, aber wie beweist man dies? Weil  $g$  und  $E$  die Parameterdarstellungen

$$X_g(t) = A + t(B - A)$$

und

$$X_E(s, t) = A + s(B - A) + t(C - A)$$

haben, folgt

$$X_E(r, 0) = A + r(B - A) = X_g(r) \quad \text{für alle reellen Zahlen } r,$$

d.h. jeder Punkt der Geraden  $g$  liegt in der Ebene  $E$ , was zu zeigen war.

**Beispiel 10** Gegeben sind die Gerade  $g$ , die durch die Punkte  $P = (0, 0, 0)$  und  $Q = (1, 1, 1)$  geht und die Ebene  $E$ , die die Punkte  $A = (1, 0, 0)$ ,  $B = (0, 1, 0)$  und  $C = (0, 0, \pi)$  enthält. Berechne den Durchstoßpunkt der Geraden  $g$  durch die Ebene  $E$ .

Die Parameterdarstellungen von  $g$  und  $E$  lauten:

$$X_g(r) = rQ = r(1, 1, 1) \quad (\text{Weil } P = 0 \text{ ist!})$$

und

$$X_E(s, t) = A + s(B - A) + t(C - A) = (1, 0, 0) + s(-1, 1, 0) + t(-1, 0, \pi).$$

Die Bedingung für den Durchstoßpunkt lautet:

$$\text{Es gibt ein Tripel } (r, s, t) \in \mathbb{R}^3, \text{ sodass } X_g(r) = X_E(s, t) \text{ gilt.}$$

Wir erinnern, dass  $X_g(r) = X_E(s, t)$  nichts anderes als drei Gleichungen sind für drei Unbekannte und zwar

$$r = 1 - s - t, \quad r = s \quad \text{und} \quad r = \pi t.$$

Daraus folgt sofort  $r = s$  und  $t = \frac{r}{\pi} = \frac{s}{\pi}$ . Einsetzen in die erste der drei Gleichungen ergibt

$$s = 1 - s - \frac{s}{\pi} \quad \text{also} \quad s = \frac{1}{2 + \frac{1}{\pi}} = \frac{\pi}{2\pi + 1}$$

und damit gilt für die Parameter

$$r = s = \frac{\pi}{2\pi + 1} \quad \text{und} \quad t = \frac{r}{\pi} = \frac{1}{2\pi + 1}.$$

Gesucht ist eigentlich nur der Durchstoßpunkt, d.h.

$$X_g\left(\frac{\pi}{2\pi + 1}\right) = \frac{\pi}{2\pi + 1}(1, 1, 1) = \left(\frac{\pi}{2\pi + 1}, \frac{\pi}{2\pi + 1}, \frac{\pi}{2\pi + 1}\right).$$

Berechnen Sie zur Probe ob tatsächlich  $X_g\left(\frac{\pi}{2\pi+1}\right) = X_E\left(\frac{\pi}{2\pi+1}, \frac{1}{2\pi+1}\right)$  gilt.

**Beispiel 11** Gegeben sind zwei Ebenen  $E_I$  und  $E_{II}$ . Die Ebene  $E_I$  enthält die Punkte  $A = (1, 0, 0)$ ,  $B = (0, 1, 0)$  und  $C = (0, 0, 1)$  und die Ebene  $E_{II}$  enthält die Punkte  $P = (0, 0, 0)$ ,  $Q = (1, 0, 1)$  und  $R = (0, 1, 1)$ . Zeige, dass sich diese Ebenen in genau einer Geraden schneiden bzw. dass sie nicht parallel oder antiparallel sind<sup>4</sup>.

Die Parameterdarstellungen von  $E_1$  und  $E_2$  lauten:

$$X_I(s, t) = A + s(B - A) + t(C - A) = (1, 0, 0) + s(-1, 1, 0) + t(-1, 0, 1)$$

und

$$X_{II}(u, v) = P + u(Q - P) + v(R - P) = (0, 0, 0) + u(1, 0, 1) + v(0, 1, 1).$$

Die beiden Ebenen sind nicht parallel, falls ihre Normalenvektoren  $n_I$  und  $n_{II}$  nicht parallel sind. Zwei Normalenvektoren der beiden Ebenen sind gegeben durch

$$n_I = (B - A) \times (C - A) = (-1, 2, 0) \times (-1, 0, 1) = \dots = (1, 1, 1)$$

und

$$n_{II} = (Q - P) \times (R - P) = (1, 0, 1) \times (0, 1, 1) = \dots = (-1, -1, 1)$$

Machen Sie sich eine Skizze! Beachte die Normalenvektoren sind bis auf das Vorzeichen eindeutig.  $n_I$  und  $n_{II}$  sind nicht parallel bzw. antiparallel, falls ihr Kreuzprodukt nicht verschwindet. Wegen

$$n_I \times n_{II} = (1, 1, 1) \times (-1, -1, 1) = \dots = (2, -2, 0) \neq (0, 0, 0)$$

gibt es eine Schnittgerade.

---

<sup>4</sup>Man sagt auch kürzer kollinear.

**Beispiel 12** Gegeben sind zwei Ebene  $E_I$  und  $E_{II}$ . Die Ebene  $E_I$  enthält die Punkte  $A = (1, 0, 0)$ ,  $B = (0, 1, 0)$  und  $C = (0, 0, 1)$  und die Ebene  $E_{II}$  enthält die Punkte  $P = (0, 0, 0)$ ,  $Q = (1, 0, 1)$  und  $R = (0, 1, 1)$ . Berechne die Schnittgerade der beiden Ebenen.

Die Parameterdarstellungen von  $E_1$  und  $E_2$  lauten:

$$X_I(s, t) = A + s(B - A) + t(C - A) = (1, 0, 0) + s(-1, 1, 0) + t(-1, 0, 1)$$

und

$$X_{II}(u, v) = P + u(Q - P) + v(R - P) = (0, 0, 0) + u(1, 0, 1) + v(0, 1, 1).$$

Die Bedingung für die Schnittgerade lautet:

$$X_I(s, t) = X_{II}(u, v),$$

wobei einer der vier Parameter  $s$ ,  $t$ ,  $u$ ,  $v$  nicht durch die drei Gleichungen bestimmt wird. Die obige Bedingung impliziert folgende drei Gleichungen:

$$(i) \ 1 - s - t = u, \quad (ii) \ s = v \quad \text{und} \quad (iii) \ t = u + v.$$

Aus (i) und (ii) folgt  $s = v = t - u$ . Mit (i) folgt  $1 - (t - u) - t = u$  also  $t = 1$ .  $t = \frac{1}{2}$ , (ii) und (iii) implizieren  $s = v = 1 - u$ . Einsetzen von  $t = \frac{1}{2}$  in die Ebenengleichung  $E_I$  ergibt die gesuchte Gerade

$$X_g(s) := X_I\left(s, \frac{1}{2}\right) = (1, 0, 0) + s(-1, 1, 0) + \frac{1}{2}(-1, 0, 1) = \left(\frac{1}{2} - s, s, \frac{1}{2}\right).$$

**Aufgaben 12** Geben Sie sich eine Ebene vor und eine Gerade. Dann bestimmen Sie den Schnittpunkt der Geraden mit der Ebene. Überlegen Sie sich ein Beispiel für genau einen Schnittpunkt, eins ohne Schnittpunkt und eins mit unendlich vielen Schnittpunkten.