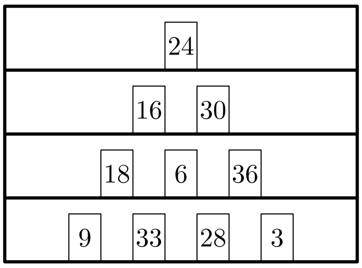
Aufgabe 1. Auf einem Jahrmarkt gibt es ein spezielles Dosenwurfspiel: Auf jeder Dose steht eine Zahl. Man darf beliebige Dosen umwerfen, gewinnt aber nur, wenn die Summe ihrer Zahlen genau 50 ergibt. Finde eine solche Menge von Dosen aus denen in der Abbildung und gib alle ihre Zahlen in aufsteigender Reihenfolge an.



Ergebnis. $6, 16, 28$

Lösung. Die meisten Zahlen auf den Dosen sind Vielfache von 3. Wenn 50 durch 3 geteilt wird, beträgt der Rest 2. Daher muss die Summe der Zahlen auf den ausgewählten Dosen bei Division durch 3 ebenfalls den Rest 2 ergeben. Deswegen muss mindestens eine Zahl enthalten sein, die nicht durch 3 teilbar ist. Die einzigen solchen Zahlen sind 16 und 28.

Es ist nicht möglich, nur eine dieser Zahlen zu verwenden: Die beiden Zahlen 16 und 28 haben bei Division durch 3 jeweils den Rest 1. Das Addieren einer beliebigen Anzahl von Vielfachen von 3 zu 16 oder 28 ändert diesen Rest nicht, so dass die Summe nicht 50 ergeben kann. Daher müssen sowohl 16 als auch 28 verwendet werden. Ihre Summe beträgt $16 + 28 = 44$, was bei Division durch 3 den Rest 2 ergibt. Um auf 50 zu kommen, fehlt noch $50 - 44 = 6$. Diese Zahl kommt auf einer der Dosen vor und es gibt keine Möglichkeit, 6 irgendwie als Summe von Zahlen auf den Dosen zu bilden. Daher muss man die Dosen mit den Zahlen 6, 16 und 28 umwerfen.

Aufgabe 2. Anna hat drei gewöhnliche sechsseitige Würfel: einen roten, einen blauen und einen gelben. Jeder Würfel hat wie üblich die Augenzahlen 1 bis 6 auf den Seitenflächen. Nachdem sie alle drei Würfel ein Mal geworfen hat, addiert sie die drei Augenzahlen. Auf wie viele verschiedene Arten kann sie die Augensumme 8 erhalten?

Ergebnis. 21

Lösung. Es gibt fünf Möglichkeiten, die Augensumme 8 mit drei Würfeln zu erhalten:

$$8 = 6 + 1 + 1 = 5 + 2 + 1 = 4 + 3 + 1 = 4 + 2 + 2 = 3 + 3 + 2.$$

Im Fall $6 + 1 + 1$ kann die Augenzahl 6 auf dem roten, dem blauen oder dem gelben Würfel erscheinen. Daher gibt es in diesem Fall drei Möglichkeiten. Analog dazu ergeben sich auch in den Fällen $4 + 2 + 2$ und $3 + 3 + 2$ jeweils drei Möglichkeiten. Im Fall $5 + 2 + 1$ gibt es $3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$ Möglichkeiten für die Verteilung der Augenzahlen auf den drei farbigen Würfeln. Dasselbe gilt für den Fall $4 + 3 + 1$. Daher gibt es insgesamt $3 \cdot 3 + 2 \cdot 6 = 21$ Möglichkeiten.

Aufgabe 3. Adam hat vier Kinder. Er bemerkt, dass sein derzeitiges Alter der Summe der Alter seiner drei ältesten Kinder entspricht, während sein Alter in sechs Jahren der Summe der Alter seiner drei jüngsten Kinder entsprechen wird. Wie groß ist der Altersunterschied zwischen Adams jüngstem und ältestem Kind?

Ergebnis. 12

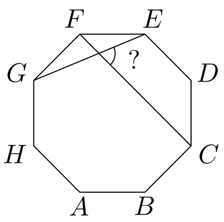
Lösung. Sei a das Alter von Adam und $k_1 \geq k_2 \geq k_3 \geq k_4$ das Alter seiner Kinder. Die Aufgabenstellung impliziert die Gleichungen $a = k_1 + k_2 + k_3$ und $a + 6 = (k_2 + 6) + (k_3 + 6) + (k_4 + 6)$. Setzt man die erste Gleichung in die zweite ein, erhält man $k_1 + k_2 + k_3 + 6 = k_2 + k_3 + k_4 + 18$, was zu $k_1 = k_4 + 12$ vereinfacht werden kann. Daher ist das älteste Kind 12 Jahre älter als das jüngste Kind.

Aufgabe 4. Eine Digitaluhr mit 24-Stunden-Display zeigt Uhrzeiten zwischen 00:00 und 23:59 an. Wie oft zeigt das Display im Laufe eines ganzen Tages genau vier der fünf Ziffern 1, 2, 3, 4, 5 an? Die Ziffern dürfen in beliebiger Reihenfolge erscheinen.

Ergebnis. 36

Lösung. Die Stunde muss eine zweistellige Zahl mit verschiedenen Ziffern aus $1, \ldots, 5$ sein, die 23 nicht überschreitet. Die einzigen Möglichkeiten sind 12, 13, 14, 15, 21 und 23. Da damit zwei Ziffern bereits benutzt wurden, verbleiben noch drei mögliche Ziffern für die Minuten. Dabei gibt es $3 \cdot 2 = 6$ Möglichkeiten, zwei verschiedene auszuwählen, und jede dieser Möglichkeiten ergibt auch eine gültige Minutenzahl. Also gibt es in jeder der sechs zulässigen Stunden jeweils sechs gültige Zeiten und damit $6 \cdot 6 = 36$ insgesamt.

Aufgabe 5. Gegeben ist ein regelmäßiges Achteck $ABCDEFGH$, siehe Abbildung. Bestimme die Größe des markierten spitzen Winkels in Grad, den die Diagonalen CF und EG einschließen.



Ergebnis. 67.5°

Lösung. Sei X der Schnittpunkt der zwei Diagonalen. Statt den Winkel $\angle CXE$ zu berechnen, berechnen wir den gleichgroßen Winkel $\angle FXG$. Da $BCFG$ ein Rechteck ist, gilt $\angle GFX = \angle GFC = 90°$. Weiters ist das Dreieck EFG gleichschenklig mit dem Winkel $\angle GFE = 135°$. Daraus ergibt sich $\angle XGF = \angle EGF = 22.5°$. Im Dreieck FGX beträgt der Winkel $\angle FXG = 180° - 90° - 22.5° = 67.5°$.

Aufgabe 6. Seien a, b, c, d, e fünf positive ganze Zahlen, sodass $a < b < c < d < e$ gilt und ihr arithmetisches Mittel 16 ist. Bestimme den maximal möglichen Wert von d.

Ergebnis. 36

Lösung. Aus

$$\frac{a+b+c+d+e}{5} = 16$$

folgt $a+b+c+d+e = 80$. Um d zu maximieren, minimieren wir die anderen Terme unter Berücksichtigung der Ordnungsbedingung: Die kleinstmöglichen Werte sind $a = 1$, $b = 2$, $c = 3$ und $e \geq d+1$. Daher gilt

$$80 = a+b+c+d+e \geq 1+2+3+d+(d+1) = 7+2d,$$

somit $2d \leq 73$ und folglich $d \leq 36$, denn d ist eine ganze Zahl. Diese Schranke wird durch $a = 1$, $b = 2$, $c = 3$, $d = 36$ und $e = 38$ erreicht. Diese Werte erfüllen die Ordnungsbedingung und ihre Summe ergibt 80. Somit ist der maximal mögliche Wert von d gleich 36.

Aufgabe 7. Ein Reisender näherte sich einem antiken Steintor in der Wüste und traf dort auf eine Sphinx, die ihm den Weg versperrte. Die Sphinx sagte: „Löse mein Rätsel und du darfst passieren! Ich denke an eine dreistellige Zahl mit den folgenden Eigenschaften:

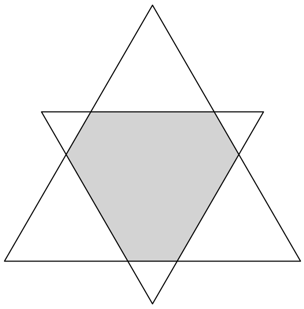
- Die Zahl ist ungerade,
- ihre Ziffern sind alle verschieden und werden von links nach rechts größer,
- sie ist durch 9 teilbar, aber wenn man eine beliebige Ziffer entfernt, ist das Ergebnis nicht mehr durch 9 teilbar,
- eine ihrer Ziffern ist 6.“

Welche Zahl hatte die Sphinx gewählt?

Ergebnis. 567

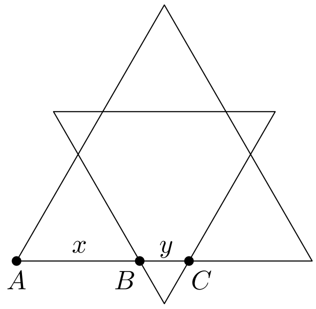
Lösung. Wegen der Teilbarkeit durch 9 ist die Quersumme eine durch 9 teilbare Zahl kleiner als $9+9+9 = 27$, also 9 oder 18. Da die Zahl ungerade ist, kann 6 nicht die Einerziffer sein, sondern muss die Zehner- oder die Hunderterziffer sein. Die Hunderterziffer kann aber nicht 6 sein, da dann die kleinstmögliche Quersumme $6+7+8 = 21 > 18$ ist. Somit ist 6 die Zehnerziffer und daher die Einerziffer mindestens 7. Deswegen kann die Quersumme nur 18 sein und die Summe aus Hunderter- und Einerziffer ist dann 12. Die einzigen aufsteigenden Optionen sind $(3,9)$, $(4,8)$, und $(5,7)$: Die erste scheidet aus, weil das Entfernen der 9 die durch 9 teilbare Zahl 36 ergibt und die zweite ist ausgeschlossen, weil 468 eine gerade Zahl ist. Damit ist $(5,7)$ die einzig mögliche Wahl. Die Zahl der Sphinx ist also 567.

Aufgabe 8. Zwei gleichseitige Dreiecke sind wie in der Abbildung dargestellt angeordnet. Ihre entsprechenden Seiten verlaufen parallel und sie haben denselben Umkreismittelpunkt. Die Seitenlängen betragen 17 cm im größeren Dreieck und 11 cm im kleineren Dreieck. Die gemeinsame Fläche beider Dreiecke ist ein Sechseck, das in der Abbildung grau schattiert ist. Bestimme den Umfang dieses Sechsecks (in cm).

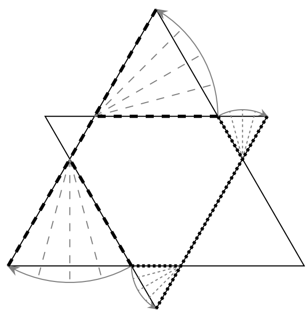


Ergebnis. 28

Lösung. Durch die Überlappung entstehen außerhalb des schattierten Sechsecks drei kleinere und drei größere kongruente gleichseitige Dreiecke. Setzt man $\overline{AB} = x$ und $\overline{BC} = y$, so ist die Seitenlänge des größeren Dreiecks $2x + y = 17$ und die des kleineren $x + 2y = 11$. Addition der beiden Gleichungen ergibt $3x + 3y = 28$, was genau dem Umfang des Sechsecks entspricht.



Alternative Lösung. Diese Lösung liefert einen Beweis ohne Worte, indem sie die Seiten des Sechsecks jeweils einer Seite der beiden gegebenen gleichseitigen Dreiecke zuordnet. Daher ist der Umfang des Sechsecks genau die Summe der Seitenlängen der gegebenen gleichseitigen Dreiecke, nämlich $17 + 11 = 28$.



Aufgabe 9. Tina möchte sich für ihren Sportverein anziehen. Sie muss genau ein T-Shirt, eine kurze Hose, ein Paar gleichfarbige Socken und ein Paar gleichfarbige Turnschuhe tragen. Zusätzlich darf sie wahlweise ein Haarband tragen. Sie besitzt T-Shirts in den Farben Weiß, Gelb, Grün, Blau und Rot, kurze Hosen und Haarbänder in Weiß, Schwarz und Grau, Socken in Weiß, Rot und Orange und schließlich Turnschuhe in Weiß und Schwarz. Sie trägt weiße Socken nur dann, wenn ihr gesamtes Outfit weiß ist – einschließlich des Haarbands, falls sie eines trägt. Auf wie viele verschiedene Arten kann Tina sich für ihren Sportverein kleiden?

Ergebnis. 242

Lösung. Tina muss genau ein T-Shirt, eine kurze Hose, ein Paar Socken und ein Paar Turnschuhe tragen und kann wahlweise ein Haarband tragen. Alle zulässigen Möglichkeiten, sich dem entsprechend zu kleiden, werden wie folgt gezählt.

1. Fall: Die Socken sind weiß.

Unter den gegebenen Bedingungen dürfen weiße Socken nur getragen werden, wenn das T-Shirt, die kurzen Hosen und die Turnschuhe allesamt weiß sind, wobei das Haarband entweder nicht getragen wird oder ebenfalls weiß ist. Damit ergeben sich 2 Möglichkeiten.

2. Fall: Die Socken sind nicht weiß.
Da die Socken rot oder orange sein können, ergeben sich 2 Wahlmöglichkeiten für die Socken. In diesem Fall gibt es keine weiteren Einschränkungen. Damit gibt es 5 Möglichkeiten für das T-Shirt, 3 für die kurzen Hosen, 2 für die Turnschuhe und 4 für das Haarband, nämlich keines, ein weißes, ein schwarzes oder ein graues zu tragen. Daher kann sich Tina in diesem Fall auf

$$5 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 2 = 240$$

Arten kleiden.

Addiert man beide Fälle, ergibt sich eine Gesamtzahl von $240 + 2 = 242$ Möglichkeiten.

Aufgabe 10. Finde eine vierstellige Zahl mit den folgenden Eigenschaften:

- Die Hunderterziffer ist doppelt so groß wie die Tausenderziffer.
- Die Einerziffer ist dreimal so groß wie die Zehnerziffer.
- Quadriert man jede Ziffer der Zahl, so ergibt die Summe dieser Quadrate 95.

Ergebnis. 1239

Lösung. Sei $ABCD$ die gesuchte Zahl, wobei A, B, C und D ihre Ziffern sind. Laut Angaben gilt $B = 2A$ und $D = 3C$. Also ergibt sich

$$A^2 + B^2 + C^2 + D^2 = A^2 + (2A)^2 + C^2 + (3C)^2 = 5A^2 + 10C^2 = 95,$$

was sich zu $A^2 + 2C^2 = 19$ vereinfacht. Da die rechte Seite ungerade ist, muss A ungerade sein. Weiters ist A eine Ziffer und $A^2 \leq 19$. Also kann A nur 1 oder 3 sein. Der Wert $A = 3$ führt zu $2C^2 = 10$, also $C^2 = 5$, aber diese Bedingung kann durch keine Ziffer C erfüllt werden. Also muss $A = 1$ sein, woraus $2C^2 = 18$ und $C = 3$ folgt. Deswegen ist $B = 2$ und $D = 9$, und die gesuchte Zahl ist 1239.

Aufgabe 11. Sandi ist eine positive Person. Daher möchte sie die Kästchen in dem Ausdruck

$$\square\, 1\, \square\, 2\, \square\, 3\, \square\, 4\, \square\, 5$$

entweder mit einem Pluszeichen oder einem Minuszeichen so ausfüllen, dass das Ergebnis eine positive Zahl ist. Auf wie viele Arten kann sie das tun?

Ergebnis. 16

Lösung. Die Summe $\pm 1 \pm 2 \pm 3 \pm 4 \pm 5$ kann niemals 0 sein. Das gilt, weil $1 + 2 + 3 + 4 + 5 = 15$ ungerade ist und jede Änderung des Vor-/Rechenzeichens die Summe um eine gerade Zahl ändert, sodass das Ergebnis immer ungerade ist. Wenn man nun beliebige Zeichen wählt und jedes Pluszeichen in ein Minuszeichen und jedes Minuszeichen in ein Pluszeichen umwandelt, ändert sich das Ergebnis von positiv zu negativ oder umgekehrt. Dadurch entsteht eine perfekte Paarung zwischen positiven und negativen Ergebnissen. Für jedes der fünf Kästchen können unabhängig voneinander entweder ein Plus- oder ein Minuszeichen gewählt werden, sodass es für jede Position 2 Möglichkeiten gibt und somit insgesamt $2^5 = 32$ verschiedene Möglichkeiten, Plus- und Minuszeichen einzutragen. Da keine davon Null ergibt, muss genau die Hälfte positiv sein, sodass Sandi auf 16 Arten ein positives Ergebnis erzielen kann.

Aufgabe 12. In der unten gezeigten schriftlichen Addition steht jeder Buchstabe für eine Ziffer. Gleiche Buchstaben stehen für dieselbe Ziffer, unterschiedliche Buchstaben für unterschiedliche Ziffern.

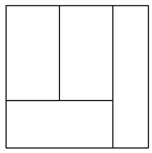
$$\begin{array}{cccc} & A & A & A \\ + & A & A & B \\ + & A & C & C \\ \hline 2 & 0 & 2 & 6 \end{array}$$

Finde die dreistellige Zahl ABC.

Ergebnis. 619

Lösung. Da die erste Ziffer aller drei Zahlen gleich ist, muss A die Bedingungen $3A \leq 20$ und $3A \geq 18$ erfüllen, da bei der Addition von drei Zahlen kein Übertrag von mehr als 2 möglich ist. Daher ist $A = 6$. Daraus folgt, dass die Summe der Ziffern B und C in der Einerstelle 10 ergibt. Somit entsteht ein Übertrag von 1 von der Einerstelle in die Zehnerstelle. Daher muss $C = 9$ gelten und daraus folgt $B = 1$. Somit ist $ABC = 619$.

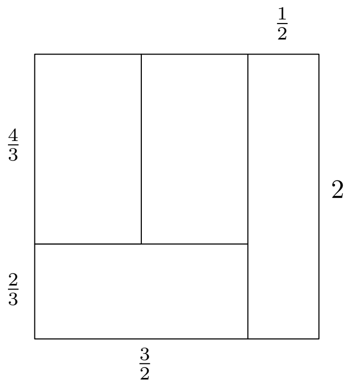
Aufgabe 13. Das Bild zeigt ein Quadrat mit der Seitenlänge 2, das in vier Rechtecke unterteilt ist. Alle Rechtecke haben gleichen Flächeninhalt. Berechne die Summe ihrer Umfänge.



Hinweis: Eine Seite, die zu zwei Rechtecken gehört, ist in beiden Umfängen zu berücksichtigen.

Ergebnis. $\dfrac{53}{3} = 17\dfrac{2}{3}$

Lösung. Da das Quadrat den Flächeninhalt 4 hat, hat jedes Rechteck den Flächeninhalt 1. Daraus ergibt sich unmittelbar, dass die Breite des rechten Rechtecks $\frac{1}{2}$ ist, sodass die Breite des unteren linken Rechtecks $2 - \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$ ist und seine Höhe somit $1 : \frac{3}{2} = \frac{2}{3}$ beträgt. Folglich beträgt die gemeinsame Höhe der beiden verbleibenden Rechtecke $2 - \frac{2}{3} = \frac{4}{3}$. Um die Summe der vier Umfänge zu ermitteln, nimmt man den Umfang des äußeren Quadrats, welcher $4 \cdot 2 = 8$ ist, und addiert die doppelte Gesamtlänge der inneren Strecken, da jede in zwei Rechtecken gezählt wird. Die Längen der inneren Strecken sind 2, $\frac{3}{2}$ und $\frac{4}{3}$, sodass ihre doppelte Summe $2 \cdot \left(2 + \frac{3}{2} + \frac{4}{3}\right) = \frac{29}{3}$ beträgt. Daher ist die gesuchte Summe der Umfänge $8 + \frac{29}{3} = \frac{53}{3}$.



Aufgabe 14. Brigitta bildet eine lange Ziffernfolge, indem sie den vierstelligen Block 2026 gemäß den folgenden Regeln 2026 Mal hintereinander schreibt: Sie beginnt mit der Zahl 2026 und fährt dann mit 6202 fort, was 2026 in umgekehrter Reihenfolge ist, wobei die sich wiederholende Ziffer 6 an der Verbindungsstelle weggelassen wird. Sie fährt fort, indem sie zwischen der normalen und der umgekehrten Reihenfolge von 2026 wechselt und jedes Mal die letzte Ziffer des vorhergehenden Blocks als erste Ziffer des nächsten Blocks verwendet, sodass benachbarte Blöcke sich genau in einer Ziffer überlappen. In der folgenden Darstellung sind die ersten sechs von insgesamt 2026 Blöcken zu sehen.

$$\underbrace{2\,0\,2\,6}_{1}\overbrace{\,2\,0\,2}^{2}\underbrace{\,0\,2\,6}_{3}\overbrace{\,2\,0\,2}^{4}\underbrace{\,0\,2\,6}_{5}\overbrace{\,2\,0\,2}^{6}\ \ldots$$

Bestimme die Summe der Ziffern der resultierenden Zahl.

Ergebnis. 12 158

Lösung. Die Ziffernsumme nach einmaligem Schreiben von 2026 beträgt 10. Nach dem ersten Block werden bei jedem geraden Block die Ziffern 202 angehängt, wodurch sich die Ziffernsumme um 4 erhöht, und bei jedem ungeraden Block 026 hinzugefügt, wodurch sich die Summe um 8 erhöht.

Auf diese Weise erhöht sich die Summe jedes Mal um 12, wenn nach dem ersten Block zwei Blöcke hinzugefügt werden, was wegen $1 + 2 \cdot 1012 = 2025$ genau 1012 Mal geschieht. Am Ende bleibt der 2026. Block übrig, der eine gerade Nummer trägt und somit die Summe um 4 erhöht. Insgesamt ergibt sich $10 + 1012 \cdot 12 + 4 = 12\,158$.

Aufgabe 15. Es ist 8:00 Uhr morgens. Wie spät wird es in 260320261998 Stunden sein, wenn es in der Zwischenzeit keine Zeitumstellung wie beispielsweise zwischen Sommer- und Winterzeit gibt?

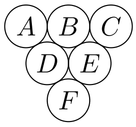
Ergebnis. 14 Uhr bzw. 2 Uhr nachmittags.

Lösung. Da ein Tag 24 Stunden hat, wiederholt sich die gleiche Tageszeit alle 24 Stunden. Also genügt es, den Rest der Division von $N = 260320261998$ durch 24 zu bestimmen. Dies könnte durch eine schriftliche Division erfolgen. Einfacher ist es jedoch, die Reste der Division durch 3 und 8 getrennt zu berechnen und die Ergebnisse zu kombinieren, was möglich ist, da 3 und 8 teilerfremd sind.

Da die Quersumme von N den Wert $48 = 3 \cdot 16$ ergibt, ist N durch 3 teilbar. Der Rest einer Zahl beim Teilen durch 8 wird durch die letzten drei Ziffern bestimmt. Weil 998 den Rest 6 beim Teilen durch 8 lässt, hat auch N Rest 6 beim Teilen durch 8. Daher muss der Rest von N bei der Division durch 24 eine Zahl kleiner als 24 sein, die durch 3 teilbar ist und bei Division durch 8 den Rest 6 lässt. Die einzige Möglichkeit hierfür ist 6.

Daher rückt die Uhr nach N Stunden um denselben Betrag vor wie nach 6 Stunden. Deswegen wird es 14:00 Uhr (oder 2 Uhr nachmittags) sein.

Aufgabe 16. Es gibt eine Weintraube, die wie auf dem Bild angeordnet ist. Eine Beere darf nur gegessen werden, wenn alle Beeren direkt darunter (d.h. die eine oder zwei Beeren, die sie unten berührt) bereits gegessen wurden. Beispielsweise muss Beere D vor A und B gegessen werden. In wie vielen verschiedenen Reihenfolgen kann die gesamte Traube gegessen werden?



Ergebnis. 16

Lösung. In der Ausgangskonfiguration ist Beere F die einzige Beere, die gegessen werden kann, wobei die Beeren A, B, C, D und E übrig bleiben. Nun können wir entweder Beere D oder E essen. Die Situation ist offensichtlich symmetrisch, also beginnen wir mit E und lassen die Beeren A, B, C und D übrig. Dann können wir die Beeren C oder D essen:

- Wenn wir C wählen, müssen wir D essen, gefolgt von entweder A oder B. Das ergibt 2 Möglichkeiten.
- Wenn wir D wählen, können wir als nächstes A, B oder C essen, gefolgt von den beiden übrigen in beliebiger Reihenfolge. Das ergibt hier $3 \cdot 2$ Möglichkeiten.

Wir beginnen also immer mit F, wählen dann zwischen D oder E und haben dann $2 + 6 = 8$ verschiedene Möglichkeiten. Das ergibt insgesamt $1 \cdot 2 \cdot 8 = 16$ mögliche Arten, die Beeren zu essen.

Aufgabe 17. Sei x eine positive ganze Zahl mit

$$\mathrm{kgV}(x, 2^5 \cdot 3^3 \cdot 5^4 \cdot 7^2) = 2^6 \cdot 3^3 \cdot 5^4 \cdot 7^2 \quad \text{und} \quad \mathrm{kgV}(x, 2^8 \cdot 3^4 \cdot 5^3 \cdot 7) = 2^8 \cdot 3^4 \cdot 5^3 \cdot 7^2.$$

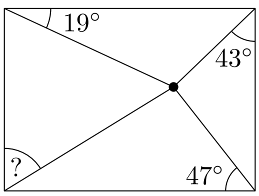
Wie viele verschiedene Werte kann $\mathrm{ggT}(x, 2^2 \cdot 3^4 \cdot 5^2 \cdot 7^3)$ annehmen?

Hinweis: $\mathrm{ggT}(a, b)$ und $\mathrm{kgV}(a, b)$ bezeichnen den größten gemeinsamen Teiler bzw. das kleinste gemeinsame Vielfache der ganzen Zahlen a und b.

Ergebnis. 12

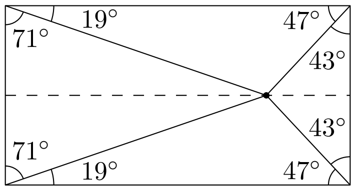
Lösung. Die Zahl x muss die Form $2^a \cdot 3^b \cdot 5^c \cdot 7^d$ haben, denn es dürfen keine anderen Primzahlen vorkommen, da diese sonst in den Faktorisierungen der gegebenen Werte für die kleinsten gemeinsamen Vielfachen auftauchen müssten. Die erste Bedingung entspricht $a = 6$, $b \leq 3$, $c \leq 4$ und $d \leq 2$, während die zweite Bedingung zu $a \leq 8$, $b \leq 4$, $c \leq 3$ und $d = 2$ führt. Insgesamt gilt daher $a = 6$, $b \leq 3$, $c \leq 3$ und $d = 2$. Das bedeutet, dass in der Primfaktorzerlegung von $\mathrm{ggT}(x, 2^2 \cdot 3^4 \cdot 5^2 \cdot 7^3)$ der Exponent von 2 gleich 2 ist, der Exponent von 3 eine ganze Zahl aus der Menge $\{0, 1, 2, 3\}$ ist, der Exponent von 5 eine ganze Zahl aus der Menge $\{0, 1, 2\}$ ist und der Exponent von 7 gleich 2 ist. Daraus folgt, dass $\mathrm{ggT}(x, 2^2 \cdot 3^4 \cdot 5^2 \cdot 7^3)$ genau $4 \cdot 3 = 12$ verschiedene Werte annehmen kann.

Aufgabe 18. Ein Punkt befindet sich innerhalb eines Rechtecks, wie in der Abbildung zu sehen ist. Drei Winkel sind markiert. Bestimme die Größe des mit einem Fragezeichen markierten Winkels in Grad.



Ergebnis. 71°

Lösung. Durch Berechnung der Komplementärwinkel an den beiden rechten Eckpunkten können wir schlussfolgern, dass der gegebene innere Punkt auf der gemeinsamen Mittelsenkrechten der beiden vertikalen Seiten des Rechtecks liegt. Daher ist die gesamte Konfiguration symmetrisch bezüglich dieser Mittelsenkrechten. Die Größe des gesuchten Winkels beträgt folglich $90° - 19° = 71°$.



Aufgabe 19. Alina will sich eine Halskette aus zwei verschiedenen Perlenarten basteln. Dafür hat sie insgesamt 100 Perlen gekauft, und zwar mehr günstige als teure. Die günstigen Perlen kosteten insgesamt 459 Gulden. Jede teure Perle kostete 13 Gulden mehr als jede günstige Perle. Alle Preise in Gulden sind positive ganze Zahlen. Wie viele Gulden hat Alina für die teuren Perlen bezahlt?

Ergebnis. 1078

Lösung. Sei g die Anzahl der günstigen Perlen und p ihr ganzzahliger Preis in Gulden. Dann gilt $g \cdot p = 459$. Da es insgesamt 100 Perlen gibt, von denen mehr günstig als teuer sind, gilt $50 < g < 100$. Da der Preis eine ganze Zahl ist, muss g ein Teiler von $459 = 3^3 \cdot 17$ sein, der strikt zwischen 50 und 100 liegt. Der einzige solche Teiler ist $g = 51$. Somit ist $p = 459 : 51 = 9$ und jede teure Perle kostet $p + 13 = 22$ Gulden. Da die Anzahl der teuren Perlen $100 - 51 = 49$ ist, hat Alina $49 \cdot 22 = 1078$ Gulden für die teuren Perlen bezahlt.

Aufgabe 20. In der Gleichung

$$\frac{M \cdot A \cdot T \cdot H}{N \cdot A \cdot B \cdot O \cdot J} = G \cdot A \cdot M \cdot E$$

steht jeder Buchstabe für eine Ziffer. Gleiche Buchstaben stehen für dieselbe Ziffer, unterschiedliche Buchstaben für unterschiedliche Ziffern. Das Symbol $\cdot$ bezeichnet die Multiplikation. Wie viele verschiedene Werte kann das Produkt $M \cdot A \cdot N \cdot G \cdot O$ annehmen?

Ergebnis. 1

Lösung. Da die zehn verschiedenen Buchstaben M, A, T, H, N, B, O, J, G, E vorkommen, werden die Ziffern 0 bis 9 jeweils genau einmal verwendet, was bedeutet, dass ein Buchstabe gleich 0 ist. Daraus folgt, dass beide Seiten der Gleichung notwendigerweise gleich 0 sind. Insbesondere erscheint 0 auf beiden Seiten, darf aber gleichzeitig nicht im Nenner des Bruchs vorkommen. Der einzige solche Buchstabe ist M, weshalb $M = 0$ sein muss. Somit gilt $M \cdot A \cdot N \cdot G \cdot O = 0$, unabhängig von den Werten der übrigen Buchstaben, sodass das Produkt genau einen Wert annehmen kann.

Aufgabe 21. Drei Leuchttürme liegen an einer geraden Küstenlinie. Der Abstand zwischen je zwei benachbarten Leuchttürmen beträgt jeweils 13 km. Ein Schiff auf See ist 10 km von einem der beiden äußeren Leuchttürme und 13 km vom mittleren Leuchtturm entfernt. Wie viele Kilometer ist das Schiff vom anderen äußeren Leuchtturm entfernt?

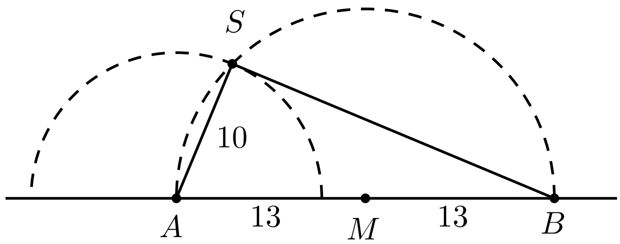
Hinweis: Die Erdkrümmung soll hierbei vernachlässigt werden.

Ergebnis. 24

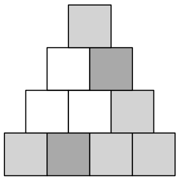
Lösung. Sei S die Position des Schiffes, A und B die beiden äußeren Leuchttürme und M der Leuchtturm in der Mitte. Wegen $\overline{MS} = \overline{MA} = \overline{MB} = 13$ liegen die Punkte A, B und S auf einem Kreis mit M als Mittelpunkt und AB als Durchmesser. Nach dem Satz des Thales ist das Dreieck ABS rechtwinklig mit dem rechten Winkel im Eckpunkt S. Mit $\overline{AB} = \overline{MA} + \overline{MB} = 26$ und $\overline{AS} = 10$ liefert der Satz des Pythagoras

$$\overline{BS} = \sqrt{\overline{AB}^2 - \overline{AS}^2} = \sqrt{26^2 - 10^2} = \sqrt{576} = 24.$$

Somit beträgt der Abstand vom Schiff zum anderen äußeren Leuchtturm 24 km.



Aufgabe 22. Auf wie viele Arten kann man jedem der zehn quadratischen Bausteine einer Pyramide der Höhe 4 eine von drei Farben zuweisen, sodass jede nach oben ausgerichtete Teilpyramide der Höhe 2 entweder mit allen drei Farben oder nur mit einer Farbe gefärbt ist? Ein Beispiel für eine solche Färbung ist in der Abbildung zu sehen.



Ergebnis. 81

Lösung. Unter den gegebenen Bedingungen wird die Farbgebung der Pyramide vollständig durch die Farbgebung der unteren Reihe bestimmt, da jede Farbgebung der unteren Reihe eindeutig zu einer Farbgebung der gesamten Pyramide ergänzt werden kann. Da für jeden Baustein drei Farben ausgewählt werden können, gibt es insgesamt $3^4 = 81$ mögliche Farbgebungen.

Aufgabe 23. Jeder Ecke eines regulären 100-Ecks ist genau eine Zahl aus $1, 2, \ldots, 100$ zugeordnet, und zwar alle verschieden, so dass der absolute Betrag der Differenz der Zahlen jedes Paares von gegenüberliegenden Ecken dieselbe feste Zahl n ist. Bestimme die Summe aller möglichen verschiedenen Werte von n.

Ergebnis. 93

Lösung. Sei n eine positive ganze Zahl, für die eine solche Anordnung existiert. Dann muss die Zahl 1 mit $n+1$ gepaart werden – in dem Sinne, dass sie an zwei gegenüberliegenden Positionen platziert sind. Als nächstes muss 2 mit $n+2$ gepaart sein, und wenn wir so fortfahren, sehen wir, dass k mit $n+k$ für alle $k = 1, 2, \ldots, n$ gepaart sein muss. Insbesondere wird n mit $2n$ gepaart.

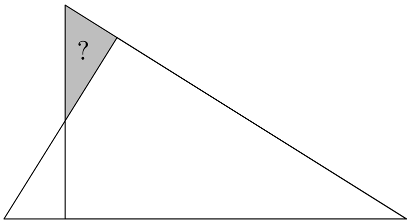
Somit wird jede Zahl aus dem Block $\{1, 2, \ldots, 2n\}$ mit einer anderen Zahl aus demselben Block gepaart, und dieser Block kann von den übrigen Zahlen $\{2n+1, \ldots, 100\}$ getrennt werden. Wenn $2n = 100$ ist, ist der Prozess beendet. Andernfalls wiederholen wir die gleiche Argumentation beginnend mit $2n+1$, das mit $3n+1$ gepaart sein muss, und fahren analog fort.

Damit teilt sich die Menge $\{1, 2, \ldots, 100\}$ in disjunkte Blöcke der Länge $2n$. Dies ist genau dann möglich, wenn 100 durch $2n$ teilbar ist, das heißt, genau dann, wenn n ein positiver Teiler von 50 ist.

Es ist leicht zu sehen, dass diese Konstruktion für jeden solchen Teiler eine gültige Paarung ergibt, nämlich durch Zusammenfügen von $\frac{100}{2n}$ Blöcken wie oben. Daher ist die Antwort die Summe aller positiven Teiler von 50, also

$$1 + 2 + 5 + 10 + 25 + 50 = 93.$$

Aufgabe 24. Man nehme zwei rechtwinklige Dreiecke mit den Seitenlängen 5, 12 und 13 und lege sie so übereinander, dass sie den Eckpunkt mit dem kleinsten Winkel gemeinsam haben und sich entlang ihrer Kanten teilweise überlappen, so wie es in der Abbildung zu sehen ist. Wie groß ist der Flächeninhalt eines der Dreiecke, das nicht zum überlappenden Gebiet gehört, beispielsweise des grau gefärbten?



Ergebnis. $\frac{6}{5} = 1.2$

Lösung. Das graue Dreieck ist ähnlich zum großen rechtwinkligen Dreieck, da beides rechtwinklige Dreiecke sind und sie zusätzlich noch den oberen Winkel in der Abbildung gemeinsam haben. Dabei ist die Länge der kürzesten Seite des grauen Dreiecks gleich $13 - 12 = 1$.
Also ist der Ähnlichkeitsfaktor zwischen den beiden rechtwinkligen Dreiecken $1 : 5$, weshalb die zweite Kathete im grauen Dreieck die Länge $\frac{12}{5}$ hat. Der gesuchte Flächeninhalt ergibt sich nun zu

$$\frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \frac{12}{5} = \frac{6}{5}.$$

Aufgabe 25. Jeder der sieben Zwerge wählte eine positive ganze Zahl. Alle Zwerge kennen die Zahlen, die die anderen gewählt haben. Schneewittchen fragte jeden Zwerg, welche Zahl er gewählt hatte.

- Der erste Zwerg schwieg.
- Der zweite Zwerg sagte: „Meine Zahl ist gleich der Zahl des ersten Zwergs."
- Der dritte Zwerg sagte: „Meine Zahl ist gleich der Summe der Zahlen des ersten und zweiten Zwergs."
- Der vierte Zwerg sagte: „Meine Zahl entspricht der Summe der Zahlen des ersten, zweiten und dritten Zwergs."
- ...
- Der siebte Zwerg sagte: „Meine Zahl entspricht der Summe der Zahlen des ersten bis sechsten Zwergs."

Es ist bekannt, dass die Summe der sieben ausgewählten Zahlen 46 beträgt. Es ist auch bekannt, dass genau ein Zwerg gelogen hat. Alle anderen Zwerge haben Aussagen gemacht, die sich auf die anfangs ausgewählten Zahlen beziehen. Bestimme alle Zahlen, die der lügende Zwerg ausgewählt haben könnte.

Ergebnis. 7 oder 14

Lösung. Seien $a_1, a_2, \ldots, a_7$ die von den Zwergen ausgewählten Zahlen. Zunächst kann man zeigen, dass entweder der sechste oder der siebte Zwerg gelogen haben muss.

Angenommen, der siebte Zwerg hat die Wahrheit gesagt. Dann ist seine Zahl $a_7 = a_1 + \cdots + a_6$ und für die Gesamtsumme gilt $a_1 + \cdots + a_7 = 2a_7 = 46$, woraus $a_7 = \frac{46}{2} = 23$ folgt. Wenn der sechste Zwerg auch die Wahrheit gesagt hätte, dann wäre $a_6 = a_1 + \cdots + a_5$ und somit $a_7 = a_1 + \cdots + a_6 = 2a_6$, was auf $a_6 = \frac{23}{2}$ führt. Dies widerspricht der Tatsache, dass a_6 eine positive ganze Zahl sein muss. Also muss in diesem Fall der sechste Zwerg gelogen haben.

Daher kann man sicher sein, dass in jedem Fall die ersten fünf Zwerge die Wahrheit gesagt haben und es folgt

$$a_2 = a_1, \quad a_3 = a_1 + a_2 = 2a_1, \quad a_4 = a_1 + a_2 + a_3 = 4a_1, \quad a_5 = a_1 + \cdots + a_4 = 8a_1$$

und somit $a_1 + \cdots + a_5 = 16a_1$. Außerdem ist mindestens einer der Werte a_6 oder a_7, nämlich derjenige, der zum wahrheitsgetreu antwortenden Zwerg gehört, größer oder gleich $a_1 + \cdots + a_5 = 16a_1$, so dass

$$a_1 + \cdots + a_7 \geq 16a_1 + 16a_1 = 32a_1$$

gelten muss. Weil die Gesamtsumme 46 ist, ergibt sich $32a_1 \leq 46$ und somit $a_1 = 1$, da ja a_1 eine positive ganze Zahl sein muss. Folglich ist $a_2 = 1$, $a_3 = 2$, $a_4 = 4$ und $a_5 = 8$, woraus man $a_1 + \cdots + a_5 = 16$ erhält.

Jetzt betrachtet man die letzten beiden Zwerge. Wenn der sechste Zwerg die Wahrheit gesagt hat, dann ist $a_6 = 16$, so dass wegen der Gesamtsumme 46 die Zahl $a_7 = 46 - (16 + 16) = 14$ sein muss. Wenn dagegen der sechste Zwerg gelogen hat, dann hat der siebte Zwerg die Wahrheit gesagt und es gilt $a_7 = a_1 + \cdots + a_6 = 16 + a_6$. Aus der vorherigen Berechnung hat man dann in diesem Fall $a_7 = 23$, was zu $a_6 = 7$ führt.

Beide Fälle erfüllen die Bedingung, dass genau ein Zwerg gelogen hat, so dass der lügende Zwerg entweder die Zahl 7 oder die Zahl 14 ausgewählt haben könnte.

Aufgabe 26. Für die Kommunikation mit einem Satelliten im Orbit werden sechs verschiedene Kanäle aus der Menge $\{1, 2, \ldots, 13\}$ ausgewählt. Dabei ist nur die Kanalauswahl relevant – zwei Auswahlen gelten als gleich, wenn sie dieselben sechs Kanäle enthalten, unabhängig von der Reihenfolge. Um die beste Übertragungsrate zu erzielen, muss die Auswahl mindestens ein Kanalpaar enthalten, dessen Kanalnummern sich um eine ungerade Zahl unterscheiden. Wie viele solcher Kanalauswahlen sind möglich?

Ergebnis. 1708

Lösung. Die Nummern zweier ausgewählten Kanäle unterscheiden sich genau dann um eine ungerade Zahl, wenn sie unterschiedliche Parität haben. Anstatt direkt alle Kanalauswahlen zu zählen, die die Aufgabenstellung erfüllen, betrachtet man hier besser das Komplement: Man subtrahiert von allen insgesamt möglichen Auswahlen an Kanälen diejenigen Auswahlen, die keine ungeraden Differenzen in den Kanalnummern aufweisen.

Eine Menge von sechs Kanälen hat genau dann keine ungeraden Differenzen, wenn jedes Paar eine gerade Differenz aufweist, was nur dann der Fall ist, wenn alle sechs Kanäle die gleiche Parität haben. In der Menge $\{1, 2, \ldots, 13\}$ gibt es sieben ungerade Zahlen und sechs gerade. Deshalb ist die Anzahl an Auswahlen mit nur ungeraden oder nur geraden Kanälen $\binom{7}{6} + \binom{6}{6} = 8$.

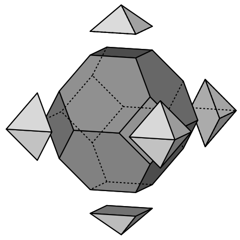
Da es insgesamt $\binom{13}{6} = 1716$ Auswahlen für sechs Kanäle gibt, ist die Anzahl der Auswahlen mit mindestens einer ungeraden Differenz $1716 - 8 = 1708$.

Aufgabe 27. Sei N eine 7-stellige Zahl, die durch jede ihrer Ziffern teilbar ist. Wenn alle Ziffern von N verschieden und ungleich Null sind, berechne die Summe der Ziffern von N.

Ergebnis. 36

Lösung. Da N sieben verschiedene Ziffern ungleich Null hat, ist mindestens eine davon gerade, sodass N gerade ist. Wäre 5 eine Ziffer, würde die Teilbarkeit durch 5 nun dazu führen, dass N auf 0 endet. Das wäre ein Widerspruch dazu, dass alle Ziffern ungleich Null sind. Daher wird 5 ausgeschlossen. Folglich besteht N aus sieben Ziffern der Menge $\{1,2,3,4,6,7,8,9\}$ und daher wird genau eine Ziffer aus dieser Menge weggelassen. Die Ziffer 9 kann nicht weggelassen werden, denn ansonsten würde N aus den Ziffern der Menge $\{1,2,3,4,6,7,8\}$ mit der Ziffernsumme 31 bestehen, die nicht durch 3 teilbar wäre, obwohl die Zahl N die Ziffer 3 enthält. Daher muss die 9 unter den Ziffern von N vorkommen, sodass die Zahl N durch 9 teilbar ist und damit auch ihre Ziffernsumme. Da $1+2+3+4+6+7+8+9=40$ ist, muss die Ziffer 4 weggelassen werden, um die Ziffernsumme 36 zu erhalten, das einzig mögliche Vielfache von 9. Ein Beispiel für eine solche Zahl ist $N = 9867312$.

Aufgabe 28. Ein abgestumpftes Oktaeder entsteht, indem man die Ecken eines regelmäßigen Oktaeders so abschneidet, dass ein Polyeder mit acht regelmäßigen sechseckigen Flächen und sechs quadratischen Flächen übrig bleibt. Wie groß ist das Volumen des abgestumpften Oktaeders im Verhältnis zum Volumen des ursprünglichen Oktaeders?



Hinweis: Ein regelmäßiges Oktaeder ist ein Körper mit acht kongruenten gleichseitigen Dreiecken als Seitenflächen.

Ergebnis. $\dfrac{8}{9}$

Lösung. Ein regelmäßiges Oktaeder mit der Kantenlänge a hat das Volumen ka^3 für eine bestimmte Konstante k. Tatsächlich lässt sich leicht zeigen, dass $k = \frac{1}{3}\sqrt{2}$ ist, aber dies ist für die Lösung nicht erforderlich. Um das abgestumpfte Oktaeder zu erhalten, wird von jedem der sechs Eckpunkte des Oktaeders ein halbes Oktaeder, also eine Pyramide mit quadratischer Grundfläche, mit der Kantenlänge $\frac{a}{3}$ entfernt. Das entfernte Volumen entspricht dem Volumen von drei Oktaedern mit der Kantenlänge $\frac{a}{3}$. Das entfernte Gesamtvolumen beträgt daher $3 \cdot k\left(\frac{a}{3}\right)^3 = \frac{1}{9}ka^3$. Das Volumen des abgestumpften Oktaeders als Bruchteil des Volumens des ursprünglichen Oktaeders beträgt also

$$\frac{1}{ka^3}\left(ka^3 - \frac{1}{9}ka^3\right) = \frac{8}{9}.$$

Aufgabe 29. Bestimme alle reellen Lösungen der Gleichung

$$8\left(4^x + 4^{-x}\right) - 54\left(2^x + 2^{-x}\right) + 101 = 0.$$

Ergebnis. ± 1, ± 2

Lösung. Setzt man $a = 2^x + 2^{-x}$, so ist $4^x + 4^{-x} = a^2 - 2$. Durch Einsetzen in die gegebene Gleichung erhält man

$$8(a^2-2) - 54a + 101 = 0,$$

was sich zu

$$8a^2 - 54a + 85 = 0$$

vereinfachen lässt. Das Lösen dieser quadratischen Gleichung führt auf

$$a_{1,2} = \frac{54 \pm \sqrt{54^2 - 4\cdot 8\cdot 85}}{2\cdot 8} = \frac{54 \pm 2\sqrt{27^2 - 8\cdot 85}}{2\cdot 8} = \frac{27 \pm \sqrt{729-680}}{8} = \frac{27\pm 7}{8}$$

und damit zu den Ergebnissen

$$a_1 = \frac{17}{4} \text{ und } a_2 = \frac{5}{2}.$$

Im ersten Fall ergibt sich

$$2^x + \frac{1}{2^x} = \frac{17}{4},$$

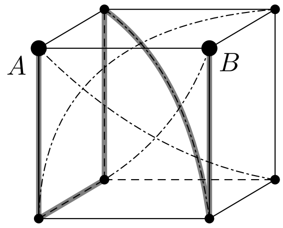
was zu $2^x = 4$ oder $2^x = \frac{1}{4}$ und somit zu den Lösungen $x_1 = 2$ und $x_2 = -2$ führt. Im zweiten Fall erhält man

$$2^x + \frac{1}{2^x} = \frac{5}{2},$$

was zu $2^x = 2$ oder $2^x = \frac{1}{2}$ und somit zu den Lösungen $x_3 = 1$ und $x_4 = -1$ führt. Also sind alle Lösungen der ursprünglichen Gleichung ± 1 und ± 2.

Aufgabe 30. Auf dem würfelförmigen Planeten *Railbox Prime* gibt es acht Städte, eine an jeder Ecke des Würfels. Entlang jeder Kante des Würfels verlaufen Bahnstrecken, sodass Städte, die Endpunkte einer Kante sind, direkt miteinander verbunden sind. Weiter gibt es vier „Tunnelbahnstrecken", die das Innere des Planeten durchqueren und jeweils zwei gegenüberliegende Eckstädte miteinander verbinden.

Ein Besucher startet in einer Eckstadt A und möchte eine benachbarte Eckstadt B erreichen, die eine Kante entfernt ist. Er möchte genau fünf Bahnstrecken nehmen, keine Stadt mehr als ein Mal besuchen und bei der Ankunft anhalten. Wie viele solcher Routen sind möglich, wenn der Besucher mindestens eine Tunnelbahn auf seinem Weg benutzen will? Das Diagramm zeigt ein Beispiel für eine solche Route.



Ergebnis. 28

Lösung. Färbt man die acht Eckstädte wie ein 3D-Schachbrett in zwei Farben, so führt jede Bahnstrecke immer von einer Stadt der einen Farbe zu einer Stadt der anderen Farbe, egal ob es sich um eine Strecke längs einer Kante oder durch einen Tunnel handelt. Da der Besucher in einer Stadt der einen Farbe startet und in genau fünf Abschnitten in einer benachbarten Stadt der anderen Farbe endet, muss die Route zwischen den Farben wechseln und daher genau zwei Zwischenstädte jeder Farbe besuchen, wobei alle besuchten Städte unterschiedlich sein müssen. Darüber hinaus ist in der vorliegenden Konfiguration mit Tunneln jedes Paar von Städten unterschiedlicher Farben direkt durch eine Bahnstrecke verbunden.

Zuerst werden alle Routen der Länge 5 gezählt, ohne die Tunnelbedingung zu berücksichtigen. Jede Route hat die Form

$$A \to b_1 \to a_2 \to b_2 \to a_3 \to B,$$

wobei b_1, b_2 unterschiedliche Städte der Farbe von B sowie a_2, a_3 unterschiedliche Städte der Farbe von A sind. Es gibt $3 \cdot 2$ Möglichkeiten, das geordnete Paar (b_1, b_2) aus den drei Städten der Farbe von B außer B auszuwählen, und es gibt $3 \cdot 2$ Möglichkeiten, das geordnete Paar (a_2, a_3) aus den drei Städten der Farbe von A außer A auszuwählen. Somit gibt es insgesamt $(3 \cdot 2) \cdot (3 \cdot 2) = 36$ Routen der Länge 5.

Nun müssen diejenigen Routen abgezogen werden, die überhaupt keinen Tunnel verwenden, d.h. Routen, die nur Kantenstrecken benutzen. Da der erste Streckenabschnitt nicht direkt zu B führen kann, sind nur zwei erste Streckenabschnitte möglich. Von jedem dieser beiden ersten Streckenabschnitte gibt es genau 4 Möglichkeiten, eine Route der Länge 5 zu B nur mit Kanten zu vervollständigen, was $2 \cdot 4 = 8$ Routen nur mit Kanten ergibt.

Daher beträgt die Anzahl der Routen der Länge 5, die mindestens einen Tunnel nutzen, $36 - 8 = 28$.

Aufgabe 31. Einst gab es eine Wahl mit 2026 Wählern und den vier Kandidaten A, B, C und D. Kandidat A schnitt am schlechtesten ab und erhielt nur ein Sechstel der Stimmen von Kandidat B. Kandidat C erhielt genau 446 Stimmen weniger als alle anderen Kandidaten zusammen. Kandidat D gewann die Wahl mit weniger als 800 Stimmen. Jeder Wähler gab genau eine Stimme für einen der vier Kandidaten ab. Wie viele Stimmen erhielt Kandidat A?

Ergebnis. 63

Lösung. Bezeichnen wir die einzelnen Stimmenzahlen mit a, b, c und d. Dies sind nicht-negative ganze Zahlen, die folgende Bedingungen erfüllen:

$$\begin{aligned} a+b+c+d &= 2026, \\ b &= 6a, \\ c &= (a+b+d) - 446, \\ a < d,\ b < d,\ c < d \text{ und } d &< 800, \\ a < b,\ a < c \text{ und } a &< d. \end{aligned}$$

Wenn wir c zu beiden Seiten der dritten Gleichung addieren, erhalten wir

$$2c = a + b + c + d - 446 = 2026 - 446 = 1580.$$

Daher ist $c = 790$, woraus sich weiter

$$a + b + d = 2026 - 790 = 1236$$

ergibt. Nach dem Einsetzen von $b = 6a$ erhalten wir

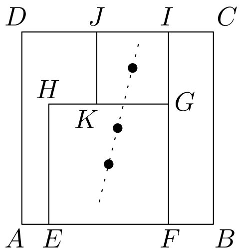
$$a + 6a + d = 1236 \quad \text{oder} \quad d = 1236 - 7a.$$

Da $d < 800$ und gleichzeitig $d > c = 790$ ist, folgt $791 \leq d \leq 799$. Daher gilt

$$791 \leq 1236 - 7a \leq 799 \quad \text{oder} \quad 437 \leq 7a \leq 445.$$

Die einzige Zahl, die im gegebenen Intervall durch 7 teilbar ist, ist $441 = 7 \cdot 63$. Daher lautet die Antwort $a = 63$. Man kann dann noch $b = 378$ und $d = 795$ berechnen und sieht, dass alle Bedingungen der Aufgabenstellung tatsächlich erfüllt sind.

Aufgabe 32. Drei Quadrate $ABCD$, $EFGH$ und $KGIJ$ sind so angeordnet wie in der Abbildung dargestellt: Die Punkte E und F liegen auf der Strecke AB, die Punkte I und J liegen auf der Strecke CD und der Punkt K liegt auf der Strecke GH. Außerdem liegen die Mittelpunkte der drei Quadrate auf einer gemeinsamen Geraden. Bestimme die Länge der Strecke FB, wenn die Längen $\overline{AD} = 7$ und $\overline{HK} = 1$ gegeben sind.



Ergebnis. $\dfrac{12}{7}$

Lösung. Seien a und b die Seitenlängen der Quadrate $EFGH$ und $KGIJ$. Aus der Aufgabenstellung kann man die Gleichungen $7 = \overline{AD} = \overline{JK} + \overline{HE} = a + b$ und $1 = \overline{HK} = \overline{HG} - \overline{KG} = a - b$ herleiten. Die Lösungen dieses linearen Gleichungssystems sind $a = 4$ und $b = 3$.

Die Gerade durch die Mittelpunkte aller drei Quadrate teilt den Flächeninhalt jedes dieser Quadrate in zwei gleich große Hälften. Also kann man den Flächeninhalt des Rechtecks $FBCI$ durch

$$\frac{1}{2}(a+b)^2 - \frac{1}{2}a^2 - \frac{1}{2}b^2 = ab$$

berechnen. Die Fläche des Rechtecks $FBCI$ kann aber auch durch $\overline{FB} \cdot (a + b)$ bestimmt werden. Aus diesen beiden Gleichungen ergibt sich $\overline{FB} = \dfrac{ab}{a+b} = \dfrac{12}{7}$.

Aufgabe 33. An der Tafel stehen mehrere Zahlen, darunter auch die Zahl 2026. Wenn man die Zahl 2026 löscht, verringert sich das arithmetische Mittel der Zahlen auf der Tafel um 6. Wenn man stattdessen eine weitere Zahl 2026 an die Tafel schreibt, erhöht sich das arithmetische Mittel um 4. Berechne die Summe der ursprünglich auf der Tafel stehenden Zahlen.

Ergebnis. 10 010

Lösung. Sei S die Summe der ursprünglichen n Zahlen. Dann gilt

$$\frac{S - 2026}{n - 1} = \frac{S}{n} - 6,$$
$$\frac{S + 2026}{n + 1} = \frac{S}{n} + 4.$$

Diese Gleichungen können vereinfacht werden zu

$$S = 2032n - 6n^2,$$
$$S = 2022n - 4n^2.$$

Wenn man die zweite Gleichung von der ersten subtrahiert, erhält man

$$0 = S - S = (2032 - 2022)n + (-6 + 4)n^2 = 10n - 2n^2 = 2n(5 - n).$$

Wegen $n \neq 0$ folgt somit $n = 5$. Also ist $S = 2032n - 6n^2 = 10\,010$.

Aufgabe 34. Ein Floh springt entlang des Umfangs eines Kreises. Sein erster Sprung hat einen Zentriwinkel von $1°$, das heißt, der Winkel zwischen den Radien zu den Endpunkten des Sprungs beträgt $1°$. Jeder nachfolgende Sprung erfolgt in die gleiche Richtung und hat einen Zentriwinkel von $2°$, dann $3°$ und so weiter. Bei welchem Sprung landet der Floh zum ersten Mal wieder an seinem Ausgangspunkt?

Ergebnis. 80

Lösung. Nach n Sprüngen hat der Floh einen Zentriwinkel von

$$1 + 2 + \cdots + n = \tfrac{1}{2}n(n+1)$$

Grad zurückgelegt. Gesucht ist das kleinste n, sodass diese Zahl ein Vielfaches von 360 ist. Das bedeutet, dass $n(n+1)$ ein Vielfaches von $720 = 16 \cdot 9 \cdot 5$ sein muss. Da zwei aufeinanderfolgende Zahlen teilerfremd sind, muss jeder der drei Faktoren entweder n oder $n+1$ teilen. Indem man die Vielfachen des größten Faktors 16 betrachtet, bekommt man für n folgende Kandidaten in aufsteigender Reihenfolge: 15, 16, 31, 32, 47, 48, 63, 64, 79 und schließlich 80, das selbst durch 5 teilbar und dessen Nachfolger $n+1 = 81$ durch 9 teilbar ist. Folglich ist 80 die gesuchte Anzahl von Sprüngen ist.

Aufgabe 35. Im Königreich *Naboia* gibt es drei magische Gilden: die Gilde des Feuers, die Gilde des Wassers und die Gilde des Windes. Jede Gilde besteht aus zwei Meistermagiern und zwei Magierlehrlingen. Um das Reich zu verteidigen, müssen vier Kampfpaare gebildet werden, die jeweils aus einem Meister und einem Lehrling bestehen, wobei kein Paar zwei Magier derselben Gilde enthalten darf. Außerdem muss jede Gilde mindestens einen Meister und mindestens einen Lehrling zu den vier Paaren beitragen. Auf wie viele Arten können die Kampfpaare gebildet werden?

Hinweis: Jeder Meister und jeder Lehrling ist eine eigenständige Person. Daher ist es wichtig, welcher Magier in welchem Paar auftritt, aber die Reihenfolge, in der die vier Paare aufgeführt sind, ist irrelevant.

Ergebnis. 768

Lösung. Da vier Lehrlinge ausgewählt werden und jede Gilde mindestens einen Lehrling stellen muss, muss die Verteilung der Lehrlinge unter den Gilden in einer beliebigen Reihenfolge $(2, 1, 1)$ lauten. Ebenso werden vier Meister ausgewählt und jede Gilde muss mindestens einen Meister stellen, sodass die Verteilung der Meister ebenfalls $(2, 1, 1)$ lauten muss.

Es gibt zwei Fälle, je nachdem, ob die Gilde, die zwei Meister stellt, auch zwei Lehrlinge stellt oder nicht.

Im *ersten Fall* stellt eine einzige Gilde X sowohl zwei Lehrlinge als auch zwei Meister. Es gibt 3 Auswahlmöglichkeiten für X. Aus den verbleibenden zwei Gilden können die Lehrlinge auf $2 \cdot 2 = 4$ Arten ausgewählt werden, und ebenso können die Meister auf $2 \cdot 2 = 4$ Arten ausgewählt werden.

Für jede solche Auswahl müssen die beiden Lehrlinge aus X mit den beiden Meistern aus den beiden anderen Gilden gepaart werden, was auf 2 Arten geschehen kann. Sobald dies festgelegt ist, müssen die beiden verbleibenden Lehrlinge mit den beiden Meistern aus X gepaart werden, was wiederum auf 2 Arten geschehen kann. Daher gibt es in diesem Fall $2 \cdot 2 = 4$ gültige Möglichkeiten, Meister mit Lehrlingen zu paaren. Daher trägt dieser Fall $3 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 = 192$ Paarungen bei.

Im *zweiten Fall* stellt eine Gilde X zwei Lehrlinge zur Verfügung, während eine andere Gilde Y zwei Meister zur Verfügung stellt. Es gibt 3 Auswahlmöglichkeiten für X und, sobald diese festgelegt ist, 2 Auswahlmöglichkeiten für Y. Die verbleibenden Lehrlinge können aus den beiden anderen Gilden auf $2 \cdot 2 = 4$ Arten ausgewählt werden, und die verbleibenden Meister können auf die gleiche Anzahl von Arten ausgewählt werden. Für jede solche Auswahl gibt es $3 \cdot 2 = 6$ zulässige Möglichkeiten, die Meister-Lehrling-Paare zu bilden: Die beiden Lehrlinge aus X können zwei beliebigen der drei verfügbaren Meister zugewiesen werden, und sobald diese Auswahl getroffen ist, müssen die verbleibenden Lehrlinge und Meister auf eindeutige Weise gepaart werden. Folglich trägt dieser Fall $3 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 6 = 576$ Paarungen bei.

Addiert man beide Fälle, so ergeben sich $192 + 576 = 768$ Möglichkeiten, die Kampfpaare gemäß den gegebenen Bedingungen zu bilden.

Aufgabe 36. Seien $x \neq 0$ und $y \neq 0$ zwei reelle Zahlen mit den Eigenschaften $x + \frac{1}{y} = \sqrt[3]{2}$ und $y + \frac{1}{x} = 3\sqrt[3]{4}$. Bestimme den Wert von $x^2y + \frac{1}{xy^2}$.

Ergebnis. $3\sqrt[3]{2}$

Lösung. Multipliziert man die beiden gegebenen Terme, so erhält man

$$\left(x + \frac{1}{y}\right)\left(y + \frac{1}{x}\right) = xy + \frac{1}{xy} + 2.$$

Nach Einsetzen der entsprechenden Werte ergibt sich

$$xy + \frac{1}{xy} = \left(x + \frac{1}{y}\right)\left(y + \frac{1}{x}\right) - 2 = 3 \cdot 2 - 2 = 4.$$

Um den gesuchten Term zu erzeugen, kann man analog vorgehen:

$$\left(xy + \frac{1}{xy}\right)\left(x + \frac{1}{y}\right) = x^2y + \frac{1}{xy^2} + x + \frac{1}{y}$$

Mit den nun bekannten Werten folgt

$$x^2y + \frac{1}{xy^2} = 4\sqrt[3]{2} - \sqrt[3]{2} = 3\sqrt[3]{2}.$$

Aufgabe 37. Gegeben ist ein Sehnenviereck $ABCD$ mit den Winkeln $\angle ADB = 48°$ und $\angle BDC = 56°$. Innerhalb des Dreiecks ABC wird ein Punkt X so gewählt, dass $\angle XCB = 24°$ gilt und der Strahl AX den Winkel $\angle BAC$ halbiert. Bestimme die Größe des Winkels $\angle CBX$ in Grad.

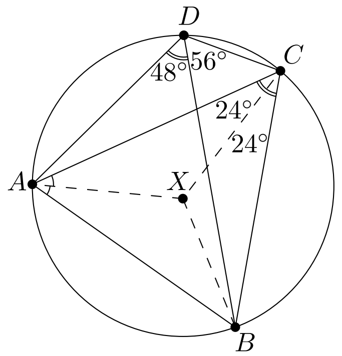
Hinweis: Ein Sehnenviereck ist ein Viereck, bei dem alle vier Eckpunkte auf einem Kreis liegen.

Ergebnis. 38°

Lösung. Die Winkel $\angle ADB$ und $\angle ACB$ sind gleich groß, da sie beide Peripheriewinkel über der Sehne AB sind. Also ist

$$\angle ACX = \angle ACB - \angle XCB = \angle ADB - \angle XCB = 48° - 24° = 24° = \angle XCB.$$

Daher ist CX die Winkelhalbierende des Winkels $\angle ACB$, woraus zusammen mit der gegebenen Eigenschaft von AX folgt, dass X der gemeinsame Schnittpunkt aller drei Winkelhalbierenden des Dreiecks ABC ist. Der Punkt X ist also der Inkreismittelpunkt des Dreiecks ABC.



Nun kann man den gesuchten Winkel über die Winkelsumme im Dreieck ABC berechnen und erhält

$$\angle CBX = \frac{\angle CBA}{2} = \frac{180° - \angle BAC - \angle ACB}{2} = \frac{180° - 56° - 48°}{2} = 38°.$$

Dabei wurde $\angle BAC = \angle BDC$ benutzt, was aus der Tatsache folgt, dass beide Winkel Peripheriewinkel über der Sehne BC sind.

Aufgabe 38. Die Spezies *Nabionicula simplex* hat ein sehr primitives Gehirn, das in eine linke und eine rechte Gehirnhälfte unterteilt ist, die jeweils aus zwei Arten von Zellen bestehen, nämlich aus Neuronen und Gliazellen. Keine Zelle ist mit einer anderen Zelle derselben Gehirnhälfte verbunden, aber zwischen jedem Zellpaar aus verschiedenen Gehirnhälften besteht genau eine bidirektionale Verbindung. In einem Nabionicula simplex gibt es 168 Verbindungen Neuron–Neuron, 48 Verbindungen Gliazelle–Gliazelle und 191 Verbindungen Neuron–Gliazelle. Wie viele Neuronen hat diese Spezies insgesamt?

Ergebnis. 29

Lösung. Seien n_1 die Anzahl der Neuronen und g_1 die Anzahl der Gliazellen in einer der Gehirnhälften und n_2 und g_2 die entsprechenden Anzahlen in der anderen. Aus der Aufgabenstellung hat man $n_1n_2 = 168$, $g_1g_2 = 48$ und $n_1g_2 + n_2g_1 = 191$ gegeben. Daher gilt

$$(n_1 + g_1)(n_2 + g_2) = 168 + 48 + 191 = 407 = 11 \cdot 37.$$

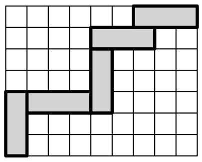
Da es in jeder Gehirnhälfte mindestens eine Zelle jedes Typs geben muss, kann ohne Einschränkung der Allgemeinheit festgelegt werden, dass $n_1 + g_1 = 11$ ist. Ebenso gilt

$$(n_1 - g_1)(n_2 - g_2) = 168 + 48 - 191 = 25.$$

Zusammen mit der Tatsache, dass n_1 ein Teiler von 168 und g_1 ein Teiler von 48 sein muss, folgt $n_1 = 8$ und $g_1 = 3$. Hieraus ergibt sich $n_2 = 168 : 8 = 21$ und die Gesamtzahl der Neuronen beträgt $n_1 + n_2 = 29$.

Alternative Lösung. Die Notation wird aus der vorherigen Lösung verwendet. Da die Zahl $n_1g_2 + n_2g_1 = 191$ ungerade ist, muss einer der beiden Summanden ungerade sein. Ohne Einschränkung der Allgemeinheit sei dies n_2g_1. Dies bedeutet, dass sowohl n_2 als auch g_1 ungerade sind. Da andererseits $n_1n_2 = 168 = 2^3 \cdot 21$ und $g_1g_2 = 48 = 2^4 \cdot 3$ ist, muss n_1 durch 2^3 und g_2 durch 2^4 teilbar sein. Daher ist n_1g_2 ein Vielfaches von $2^3 \cdot 2^4 = 2^7 = 128$, und da es kleiner als 191 ist, muss es gleich 128 sein, woraus $n_1 = 2^3 = 8$ und $g_2 = 2^4$ folgt. Weiter ergibt sich $n_2 = 168 : 8 = 21$, was schließlich zum Ergebnis $n_1 + n_2 = 29$ führt.

Aufgabe 39. Agnes hat fünf identische gerade, „I“-förmige Trimino-Steine und möchte damit auf einem rechteckigen 7×9-Gitter einen zusammenhängenden Pfad bilden, der die linke untere Ecke mit der rechten oberen Ecke verbindet. Jedes Trimino besteht aus einem mittleren Quadrat und zwei Endquadraten. Der Pfad muss so gelegt werden, dass sich jeweils zwei aufeinanderfolgende Triminos entlang genau einer gemeinsamen Gitterkante berühren, wobei diese Kante jeweils zu Endquadraten beider Triminos gehören muss. Ein solcher Pfad ist in der folgenden Abbildung dargestellt. Auf wie viele verschiedene Arten kann Agnes einen solchen Pfad bilden?



Ergebnis. 75

Lösung. Da Agnes nur fünf Triminos zur Verfügung hat, kann sich der Pfad niemals nach links oder unten bewegen: Jede solche Rückwärtsbewegung würde Gitterstrecke „verschwenden“, was mit nur fünf Steinen nicht wieder aufgeholt werden kann. Somit schreitet der Endpunkt des wachsenden Pfades stets nach oben und/oder rechts voran. Wir zählen die Pfade, indem wir eine 7×9-Tabelle ausfüllen: In jedes Gitterquadrat schreiben wir die Anzahl der Trimino-Pfade, deren aktueller Endpunkt, das ist das freie Endquadrat des letzten Triminos, in diesem Quadrat liegt.

Nach dem Platzieren des ersten Triminos vom linken unteren Eck aus muss der Endpunkt genau zwei Felder entfernt liegen: entweder zwei nach rechts, falls das erste Trimino horizontal gelegt ist, oder zwei nach oben, falls es vertikal platziert ist. Daher tragen wir eine 1 in die Felder $(0, 2)$ und $(2, 0)$ ein, wobei die Koordinaten von der linken unteren Ecke gezählt werden.

Nun füllen wir den Rest der Tabelle von links unten nach rechts oben. Um den Wert im Feld (x, y) zu bestimmen, betrachten wir die Möglichkeiten, wie ein Trimino dort enden kann. Ein in (x, y) endendes Trimino kann vertikal oder horizontal liegen, und in beiden Fällen muss es am Endquadrat an das vorherige Trimino anschließen. Daraus ergeben sich vier mögliche vorherige Endpunkte, nämlich $(x, y - 3)$ und $(x - 1, y - 2)$ im vertikalen Fall sowie $(x - 3, y)$ und $(x - 2, y - 1)$ im horizontalen Fall. Jeder dieser Fälle entspricht einer gültigen Fortsetzung eines bestehenden Pfades um ein Trimino. Daher ist der in (x, y) einzutragende Wert die Summe der bereits eingetragenen Werte in den Feldern

$$(x - 3, y), \ (x - 2, y - 1), \ (x - 1, y - 2), \ (x, y - 3),$$

wobei Felder außerhalb des Gitters den Beitrag 0 liefern.

0	0	4	0	0	22	0	0	75
1	0	0	6	0	0	22	0	0
0	1	0	0	6	0	0	18	0
0	0	2	0	0	6	0	0	13
1	0	0	2	0	0	4	0	0
0	0	0	0	1	0	0	2	0
0	0	1	0	0	1	0	0	1

Nachdem alle Felder auf diese Weise ausgefüllt wurden, ist der Wert 75 im Feld der rechten oberen Ecke genau die Anzahl der gültigen Trimino-Pfade vom linken unteren zum rechten oberen Eck.

Aufgabe 40. Seien a, b, c, d reelle Zahlen mit $a + b + c + d = 2$ und

$$\frac{a^2}{a + 2b} + \frac{b^2}{b + 2c} + \frac{c^2}{c + 2d} + \frac{d^2}{d + 2a} = 2026.$$

Bestimme den Wert von

$$\frac{b^2}{a + 2b} + \frac{c^2}{b + 2c} + \frac{d^2}{c + 2d} + \frac{a^2}{d + 2a}.$$

Ergebnis. 507

Lösung. Setze abkürzend

$$X = \frac{a^2}{a+2b} + \frac{b^2}{b+2c} + \frac{c^2}{c+2d} + \frac{d^2}{d+2a}$$

und

$$Y = \frac{b^2}{a+2b} + \frac{c^2}{b+2c} + \frac{d^2}{c+2d} + \frac{a^2}{d+2a}.$$

Die auftretenden Nenner haben alle eine Form wie $p + 2q$. Da in den Zählern der gegebenen Brüche nur Quadrate vorkommen, kann man die Nenner dieser Brüche eliminieren, indem man in den Zählern Terme der Form $p^2 - 4q^2 = (p + 2q)(p - 2q)$ erzeugt. Dies ergibt

$$\begin{aligned} X - 4Y &= \frac{a^2-4b^2}{a+2b} + \frac{b^2-4c^2}{b+2c} + \frac{c^2-4d^2}{c+2d} + \frac{d^2-4a^2}{d+2a} \\ &= (a-2b) + (b-2c) + (c-2d) + (d-2a) \\ &= -a-b-c-d = -(a+b+c+d) = -2. \end{aligned}$$

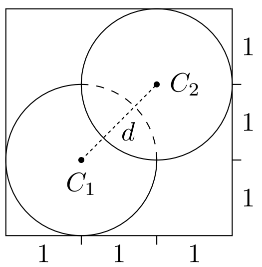
Daraus folgt $X - 4Y = -2$, also

$$Y = \frac{1}{4} \cdot (X+2) = \frac{2026+2}{4} = 507.$$

Aufgabe 41. In einem Quader mit einer quadratischen Grundfläche der Seitenlänge 3 und der Höhe a befinden sich zwei Tischtennisbälle, die beide Radius 1 haben. Der erste Ball liegt so, dass er zwei benachbarte vertikale Flächen des Quaders, die Unterseite des Quaders und den zweiten Ball berührt. Der zweite Ball liegt so, dass er die anderen beiden benachbarten vertikalen Flächen des Quaders, die Oberseite des Quaders und den ersten Ball berührt. Bestimme die Höhe a des Quaders.

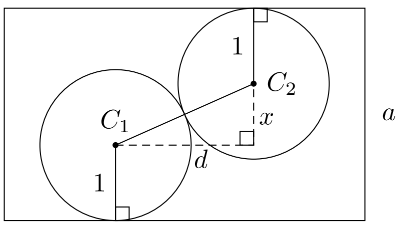
Ergebnis. $2 + \sqrt{2}$

Lösung. Seien C_1 und C_2 die Mittelpunkte der beiden Bälle und d der horizontale Abstand zwischen diesen Mittelpunkten. Dann ist d die Länge der Projektion der Strecke C_1C_2 auf die Unterseite des Quaders. Von oben betrachtet ergibt sich ein Quadrat mit der Seitenlänge 3, wobei C_1 von zwei benachbarten Seiten jeweils den Abstand 1 hat und C_2 von den beiden anderen benachbarten Seiten ebenfalls jeweils den Abstand 1 hat.



Daher liegen in dieser Draufsicht die Projektionen von C_1 und C_2 an gegenüberliegenden Ecken eines Quadrats mit der Seitenlänge 1. Folglich kann man d mit dem Satz des Pythagoras als $d = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$ berechnen.

Die vertikale Ebene, die beide horizontalen Flächen des Quaders diagonal schneidet, enthält die Mittelpunkte C_1 und C_2 der beiden Bälle. In der folgenden Abbildung kann man den Schnitt dieser Ebene mit den gegebenen Objekten sehen. Es entsteht ein Rechteck mit der gesuchten Höhe a.



Um nun a berechnen zu können, fehlt nur noch die Länge des vertikalen Abstands von C_1 und C_2, die in der Abbildung mit x bezeichnet wurde. Da die Hypotenuse des rechtwinkligen Dreiecks aus zwei Radien besteht, erhält man $x = \sqrt{2^2 - d^2} = \sqrt{2}$. Schließlich berührt der erste Ball die Unterseite und der zweite Ball die Oberseite des Quaders, sodass die Höhe des Quaders die Summe aus dem Radius des ersten Balls, dem vertikalen Abstand zwischen den Mittelpunkten und dem Radius des zweiten Balls ist.

Also ergibt sich die gesuchte Höhe des Quaders zu $a = 1 + x + 1 = 2 + \sqrt{2}$.

Alternative Lösung. Stellt man den Quader auf seiner quadratischen Grundfläche so in ein kartesisches Koordinatensystem, dass eine Ecke die Koordinaten $(0,0,0)$ hat und die Seiten des Quaders parallel zu den Koordinatenachsen ausgerichtet sind, dann hat die diagonal gegenüber liegende Ecke die Koordinaten $(3,3,a)$. Weil der erste Ball so liegt, dass er zwei benachbarte vertikale Flächen und die Unterseite des Quaders berührt, hat sein Mittelpunkt die Koordinaten $(1,1,1)$. Analog folgt, da der zweite Ball die anderen beiden benachbarten vertikalen Flächen und die Oberseite des Quaders berührt, dass dieser die Koordinaten $(3-1, 3-1, a-1) = (2,2,a-1)$ besitzt. Weil sich auch die beiden Bälle berühren, sind ihre Mittelpunkte genau zwei Radien voneinander entfernt, d.h. sie haben Abstand 2. Durch Berechnung des Abstands im Dreidimensionalen erhält man mit Hilfe des Satzes von Pythagoras die Gleichung $\sqrt{(2-1)^2+(2-1)^2+(a-2)^2} = 2$. Quadrieren ergibt $(a-2)^2 = 2$ und somit $a = \sqrt{2}+2$.

Aufgabe 42. Auf wie viele Arten kann eine 3×3-Tabelle mit den Ziffern $0, 1, \ldots, 9$ so gefüllt werden, dass jedes Feld genau eine Ziffer enthält, keine Ziffer mehr als einmal verwendet wird und die sechs Summen, die von den drei Zeilen und drei Spalten gebildet werden, entweder alle gerade oder alle ungerade sind? Hier ist ein Beispiel für eine gültige Tabelle, in der alle Zeilen- und Spaltensummen gerade sind:

$$\begin{matrix} 1 & 2 & 3 \\ 5 & 4 & 7 \\ 6 & 0 & 8 \end{matrix}$$

Ergebnis. 259 200

Lösung. Da $0+1+\cdots+9 = 45$ ungerade ist, ergibt das Weglassen einer ungeraden Ziffer eine gerade Gesamtsumme aller Zahlen der Tabelle. Folglich müssen dann alle Zeilen- und Spaltensummen gerade sein. Dies ist möglich mit vier ungeraden und fünf geraden Ziffern, wenn genau eine Zeile und eine Spalte (insgesamt fünf Zellen) die geraden Zahlen enthalten. Daher kann man alle derartigen Tabellen zählen, indem man die weggelassene ungerade Ziffer wählt (5 Möglichkeiten), dann die Zeile und Spalte mit ausschließlich geraden Ziffern bestimmt ($3 \cdot 3 = 9$ Möglichkeiten), anschließend die ungeraden Ziffern in beliebiger Reihenfolge platziert ($4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$ Möglichkeiten) und schließlich die geraden Ziffern in beliebiger Reihenfolge anordnet ($5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$ Möglichkeiten).

Analog wird die Summe aller drei Zeilen ungerade, wenn man eine gerade Ziffer weglässt. Folglich müssen dann alle Zeilen und Spalten ungerade Summen ergeben. Die einzige Möglichkeit, fünf ungerade Ziffern so in eine 3×3-Tabelle einzutragen, dass jede Zeile oder Spalte eine oder drei davon enthält, ist, sie in einer Zeile und einer Spalte zu platzieren. Die Anzahl der Tabellen wird in diesem Fall analog zum vorherigen Fall berechnet, nur mit vertauschten Rollen der geraden und ungeraden Ziffern.

Daher beträgt die gesuchte Anzahl $2 \cdot 5 \cdot 9 \cdot 24 \cdot 120 = 259\,200$.

Aufgabe 43. Die Summe von vier paarweise verschiedenen positiven ganzen Zahlen a, b, c und d ist 20 000. Bestimme den kleinstmöglichen Wert von $\operatorname{kgV}(a,b,c,d)$.

Hinweis: $\operatorname{kgV}(a,b,c,d)$ bezeichnet das kleinste gemeinsame Vielfache der ganzen Zahlen a, b, c und d. Dass die Zahlen a, b, c, d paarweise verschieden sind, heißt, dass keine zwei Zahlen gleich sind.

Ergebnis. 9 600

Lösung. Sei $L = \operatorname{kgV}(a,b,c,d)$ und sei $a > b > c > d$. Dann sind a, b, c, d Teiler von L, das heißt, man kann $L = aa_1 = bb_1 = cc_1 = dd_1$ schreiben mit gewissen positiven ganzen Zahlen a_1, b_1, c_1, d_1. Offensichtlich gilt $a_1 < b_1 < c_1 < d_1$. Daher ist $a_1 \geq 1$, $b_1 \geq 2$, $c_1 \geq 3$ und $d_1 \geq 4$. Damit folgt

$$a \leq L, \qquad b \leq \frac{L}{2}, \qquad c \leq \frac{L}{3}, \qquad d \leq \frac{L}{4}$$

sowie

$$20\,000 = a+b+c+d \leq L\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right) = \frac{25}{12}L.$$

Daraus ergibt sich unmittelbar $L \geq \frac{12 \cdot 20\,000}{25} = 9\,600$.

Um zu zeigen, dass $L = 9\,600$ erreichbar ist, genügt es,

$$a = 9\,600, \qquad b = \frac{9\,600}{2} = 4\,800, \qquad c = \frac{9\,600}{3} = 3\,200, \qquad d = \frac{9\,600}{4} = 2\,400$$

zu setzen. Die Summe dieser vier ganzen Zahlen ist $9\,600 \cdot \left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right) = 20\,000$. Damit ist 9 600 der gesuchte Minimalwert von L.

Aufgabe 44. Die Folge $a_1, a_2, a_3, \ldots$ sei definiert durch $a_n = \dfrac{n^2}{1.001^n}$. Bestimme den Index n, für den a_n in der Folge das Maximum annimmt.

Ergebnis. 2 001

Lösung. Der Quotient aufeinanderfolgender Folgenglieder ist

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)^2}{1.001 \cdot n^2} = \frac{1000 \cdot (n+1)^2}{1001 \cdot n^2}.$$

Also ist $a_{n+1} > a_n$ und äquivalent dazu $\frac{a_{n+1}}{a_n} > 1$ genau dann erfüllt, wenn $2000 \cdot n + 1000 > n^2$ gilt. Folglich ist diese Ungleichung genau dann erfüllt, wenn $n \cdot (n - 2000) < 1000$ gilt. Man überprüft leicht, dass diese Bedingung für $n \leq 2000$ erfüllt ist, da die linke Seite der letzten Ungleichung dann entweder negativ oder null ist, und für $n \geq 2001$ nicht mehr gilt. Deshalb ist die Folge bis zum Index 2001 streng monoton wachsend und danach streng monoton fallend:

$$a_1 < a_2 < \cdots < a_{2000} < a_{2001} > a_{2002} > a_{2003} > \ldots$$

Damit wird das Maximum der Folge bei a_{2001} angenommen und der gesuchte Index ist 2001.

Aufgabe 45. Fünf Freunde suchen sich Plätze für eine Show aus. Sie möchten alle in einer Reihe sitzen, die wie folgt angeordnet ist:

Es gibt eine Wand, vier Blöcke mit jeweils sechs Plätzen, die durch drei Gänge voneinander getrennt sind, und eine zweite Wand. Die Freunde sind schüchtern und möchten daher fünf Plätze so auswählen, dass sie ihre Plätze verlassen können, ohne Fremde bitten zu müssen aufzustehen, selbst wenn alle anderen Plätze besetzt sind. Wie viele solcher Fünfergruppen von Sitzen gibt es?

Ergebnis. 252

Lösung. Die Bedingung „sie können alle gehen, ohne jemanden zu bitten aufzustehen“ bedeutet, dass die ausgewählten Plätze zusammenhängende Gruppen bilden müssen, die an die Gänge angrenzen.

Wir teilen die fünf Freunde dazu in drei Gruppen auf (von denen einige möglicherweise leer sind), die den drei Gängen entsprechen. Wir fügen dazu in die Folge $FFFFF$ fünf Trennzeichen ein:

- Die drei Trennzeichen _ stehen für die Gänge selbst.
- Die zwei Trennzeichen $\emptyset$ stehen für nicht leere Blöcke weiterer Sitze in Blöcken, die nicht an die Wände angrenzen.

Nehmen wir eine solche Konfiguration, beispielsweise die Sequenz

$$\_\,\emptyset\, F\,\_\,\emptyset\, F\, F\,\_\, F\, F,$$

wobei F für einen Freund, _ für den Gang und $\emptyset$ für einen Block weiterer Sitze steht. Von links beginnend lautet sie wie folgt: Aus dem ersten Block werden keine Sitze ausgewählt. Im zweiten Block wird ein Sitzplatz neben dem zweiten Gang ausgewählt. Im dritten Block werden die beiden Sitze ganz rechts ausgewählt und schließlich werden im letzten Sitzblock die beiden Sitze ganz links ausgewählt.

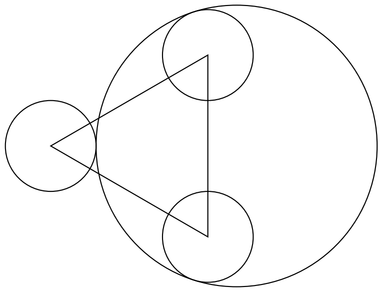
Diese Konfigurationen stehen in einer Eins-zu-Eins-Entsprechung zu allen gültigen Sitzplatzauswahlen. Da es fünf Freunde und sechs Sitze in jedem Block gibt, ist die Position des Trennzeichens $\emptyset$ in den beiden mittleren Blöcken immer eindeutig, und die Trennzeichen wechseln sich ab.

Wir zählen Anordnungen von fünf Freunden (die nicht zu unterscheiden sind, da es uns egal ist, welcher Freund wo innerhalb der ausgewählten Sitzplätze sitzt) und fünf Trennzeichen (sie haben zwei verschiedene Bedeutungen, die jedoch vollständig durch ihre Reihenfolge bestimmt werden, sodass für die Zählung keine weitere Unterscheidung erforderlich ist). Daher wählen wir 5 Positionen aus 10 aus, was

$$\binom{5+5}{5} = \binom{10}{5} = 252$$

Möglichkeiten ergibt.

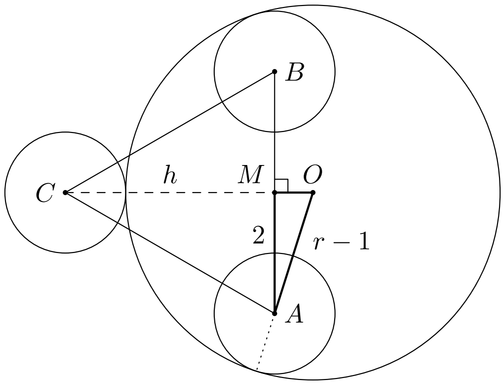
Aufgabe 46. Gegeben ist ein gleichseitiges Dreieck mit Seitenlänge 4. Um jeden Eckpunkt des Dreiecks wird ein kleiner Kreis mit Radius 1 gezogen. Bestimme den Radius desjenigen größeren Kreises, den zwei dieser kleinen Kreise von innen berühren und den der dritte kleine Kreis von außen berührt.



Ergebnis. $\dfrac{3\sqrt{3}+1}{2} = \dfrac{4-\sqrt{3}}{\sqrt{3}-1}$

Lösung. Sei ABC das gleichseitige Dreieck und O der Mittelpunkt des gesuchten Kreises k sowie r sein Radius. Die beiden kleinen Kreise k_A um A bzw. k_B um B sollen den gesuchten Kreis von innen, der kleine Kreis k_C um C ihn von außen berühren. Ferner sei M der Mittelpunkt der Seite AB und h die Höhe im gleichseitigen Dreieck. Es folgt $\overline{AM} = 2$ und $\overline{CM} = h = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 4 = 2\sqrt{3}$.

Da der Berührpunkt von k_A und k bzw. der von k_B und k jeweils von O den Abstand r hat, muss $\overline{OA} = r - 1 = \overline{OB}$ gelten. Deshalb liegt der Punkt O auf der Mittelsenkrechten von AB. Durch den Berührpunkt von k und k_C erhält man $\overline{OC} = r + 1$.



Befindet sich O außerhalb des Dreiecks ABC, ergibt sich

$$\overline{OM} = \overline{OC} - \overline{CM} = r + 1 - h.$$

Liegt O stattdessen innerhalb des Dreiecks ABC, so ist $\overline{OM} = \overline{CM} - \overline{OC}$. Da im Folgenden nur $\overline{OM}^2$ verwendet wird, spielt das keine Rolle.

Im rechtwinkligen Dreieck OMA folgt aus dem Satz des Pythagoras

$$\overline{OA}^2 = \overline{OM}^2 + \overline{AM}^2, \quad \text{also} \quad (r-1)^2 = (r+1-h)^2 + 2^2.$$

Nach Ausmultiplizieren und anschließendem Zusammenfassen ergibt sich

$$r = \frac{h^2 - 2h + 4}{2(h-2)}.$$

Das Einsetzen des Wertes $h = 2\sqrt{3}$ liefert schließlich das Ergebnis $r = \frac{4-\sqrt{3}}{\sqrt{3}-1} = \frac{3\sqrt{3}+1}{2}$.

Aufgabe 47. Ein Raum ist voll mit Zwergen, die jeweils 1.2 m groß sind, und ein anderer Raum ist voll mit Riesen, die jeweils 4 m groß sind. Nachdem 35 Riesen und 24 Zwerge aus ihrem Raum in den jeweils anderen gewechselt sind, war die durchschnittliche Körpergröße in beiden Räumen exakt gleich. Wie groß war die kleinste mögliche Gesamtzahl an Wesen, damit dies geschehen konnte?

Ergebnis. 117

Lösung. Seien r die Gesamtzahl der Riesen und z die Gesamtzahl der Zwerge. Nach dem Wechsel befinden sich im ersten Raum $z - 24$ Zwerge und 35 Riesen, und im zweiten Raum 24 Zwerge und $r - 35$ Riesen. Um die Formeln kurz zu halten, setzen wir $z_1 = z - 24$, $r_1 = 35$, $z_2 = 24$ und $r_2 = r - 35$ und bezeichnen die Größe eines Riesen mit h_r und die eines Zwerges mit h_z. Die Gleichheit der mittleren Körpergröße in den beiden Räumen nach dem Wechsel bedeutet dann

$$\frac{r_1 h_r + z_1 h_z}{r_1 + z_1} = \frac{r_2 h_r + z_2 h_z}{r_2 + z_2}.$$

Durch Umformen dieser Gleichung erhalten wir

$$(h_r - h_z)(r_1 z_2 - z_1 r_2) = 0.$$

Wegen $h_r \neq h_z$ folgt daraus $r_1 z_2 - z_1 r_2 = 0$, also

$$\frac{r_1}{z_1} = \frac{r_2}{z_2}.$$

Anschaulich ist das plausibel: Damit die Durchschnittsgrößen in beiden Räumen gleich sind, muss auch das Verhältnis Riesen : Zwerge in beiden Räumen gleich sein. Die konkreten Größen sind dabei irrelevant. Mit den bekannten Werten von r_1 und z_2 ergibt das

$$z_1 r_2 = r_1 z_2 = 35 \cdot 24 = 840.$$

Ziel ist es, die Gesamtzahl $z + r$ der Wesen zu minimieren. Wegen $z + r = z_1 + r_2 + 24 + 35$ ist das äquivalent dazu, $z_1 + r_2$ zu minimieren. Für zwei positive Zahlen mit festem Produkt ist die Summe minimal, wenn die Zahlen möglichst nah beieinander liegen. Das folgt beispielsweise aus $(z_1 + r_2)^2 = (z_1 - r_2)^2 + 4z_1 r_2$. Also suchen wir eine Zerlegung von 840 in zwei ganzzahlige Faktoren, die möglichst nahe beieinander liegen. Man findet leicht die optimale Wahl $840 = 28 \cdot 30$.

Damit sind z_1 und r_2 in beliebiger Reihenfolge gleich 28 und 30, und die minimale Gesamtzahl an Wesen ist $z + r = 28 + 30 + 24 + 35 = 117$.

Aufgabe 48. Sechs Piraten betreten eine Taverne und nehmen nach einem chaotischen Durcheinander zufällig Plätze an einem runden Tisch ein. Jeder von ihnen hat einen festen Rang an Wildheit von 1 bis 6, und zwar alle einen unterschiedlichen, der jedes Duell bestimmt. Der Pirat mit dem höheren Rang gewinnt immer. Um zu entscheiden, wer die Crew befehligt, folgen sie einem Ritual. In jeder Runde wird ein verbleibender Pirat nach dem Zufallsprinzip ausgewählt, der den im Uhrzeigersinn nächsten Piraten herausfordern muss, wobei leere Plätze übersprungen werden. Der schwächere Pirat scheidet aus und der stärkere bleibt sitzen. Nach fünf Runden bleibt nur noch ein Pirat übrig. Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit, dass das letzte Duell zwischen den beiden stärksten Piraten, also denen mit Rang 6 und 5, stattfindet?

Ergebnis. $\dfrac{7}{15}$

Lösung. Die sechs Piraten sitzen zufällig um den Tisch herum. Wir konzentrieren uns nur auf die Piraten P_5 und P_6 mit den höchsten Rängen 5 und 6. Pirat P_6 kann niemals eliminiert werden. Wir listen zu jedem Zeitpunkt die verbleibenden Piraten im Uhrzeigersinn als $P_5, A_1, \ldots, A_a, P_6, B_1, \ldots, B_b$ auf, wobei a die Anzahl der überlebenden Piraten ist, die im Uhrzeigersinn zwischen P_5 und P_6 sitzen, und b die Anzahl derer, die im Uhrzeigersinn zwischen P_6 und P_5 am anderen Teil des Tisches sitzen.

Sei $f(a, b)$ die Wahrscheinlichkeit, dass das letzte Duell zwischen P_5 und P_6 stattfindet, wenn diese Konfiguration gegeben ist. Es ist klar, dass diese Wahrscheinlichkeit nur von den Zahlen a und b abhängt, nicht von den spezifischen Identitäten oder Rängen der Piraten A_i und B_i. Tatsächlich hat jeder der Piraten A_i oder B_i einen Rang von höchstens 4, sodass jedes Duell mit P_5 oder P_6 den schwächeren Piraten eliminiert, unabhängig davon, um welchen Piraten A_i oder B_i es sich handelt, während Duelle unter den A_i bzw. unter den B_i lediglich die Größe dieses Blocks um eins reduzieren.

Wenn $a = 0$ oder $b = 0$ ist, dann sind P_5 und P_6 benachbart, wobei noch $n = a + b + 2$ Piraten übrig sind. In dieser Situation führt bei jedem Zug genau eine Wahl des Herausforderers – nämlich P_5 oder P_6, je nachdem, wer sich im Uhrzeigersinn wo befindet – sofort zum Duell P_5 gegen P_6 und eliminiert P_5. Alle übrigen Wahlen eliminieren jemand anderen. Daher beträgt die Wahrscheinlichkeit, dass P_5 bis zum letzten Duell überlebt,

$$f(a, 0) = f(0, b) = \frac{n-1}{n} \cdot \frac{n-2}{n-1} \cdots \frac{2}{3} = \frac{2}{n} = \frac{2}{a+b+2}.$$

Nehmen wir nun $a, b \geq 1$ an und schreiben wieder $n = a + b + 2$ für die Anzahl der verbleibenden Piraten. Betrachten wir den Block von Piraten im Uhrzeigersinn, der bei P_5 beginnt und bei dem Piraten unmittelbar vor P_6 endet. Dieser Block hat genau $a + 1$ Mitglieder, nämlich $P_5, A_1, \ldots, A_a$. Wenn der zufällig ausgewählte Herausforderer in diesem Block liegt, findet das anschließende Duell innerhalb dieses Blocks statt. Der herausgeforderte Pirat ist der nächste Pirat im Uhrzeigersinn, der sich noch innerhalb des Blocks befindet, mit Ausnahme von A_a, der P_6 herausfordert. In jedem Fall ist der ausgeschiedene Pirat einer von $A_1, \ldots, A_a$. Die Auswahl des Herausforderers aus diesem Block verringert also a um 1. Nach derselben Argumentation hat der Block im Uhrzeigersinn, der bei P_6 beginnt und unmittelbar vor P_5 endet, $b + 1$ Mitglieder, und die Auswahl des Herausforderers aus diesem Block verringert b um 1. Da die Auswahl des Herausforderers unter den n verbleibenden Piraten mit gleicher Wahrscheinlichkeit erfolgt, erhalten wir

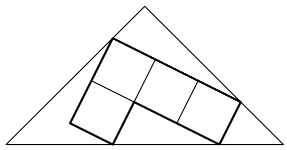
$$f(a, b) = \frac{a+1}{n} f(a-1, b) + \frac{b+1}{n} f(a, b-1)$$

im Fall $a, b \geq 1$. Anfangs gilt $a+b=4$. Unter Verwendung der Randwerte $f(0,4)=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$, $f(0,3)=\frac{2}{5}$, $f(0,2)=\frac{1}{2}$, $f(0,1)=\frac{2}{3}$ und der Symmetrie $f(a,b)=f(b,a)$ ergibt die Rekursion $f(1,1)=\frac{2}{3}$, $f(1,2)=\frac{3}{5}$, $f(1,3)=\frac{8}{15}$ und $f(2,2)=\frac{3}{5}$.

Da die anfängliche Sitzordnung gleichmäßig zufällig ist, ist die Lücke a im Uhrzeigersinn zwischen P_5 und P_6 gleichmäßig auf die Werte aus $\{0,1,2,3,4\}$ verteilt, sodass die gesuchte Wahrscheinlichkeit wie folgt berechnet wird:

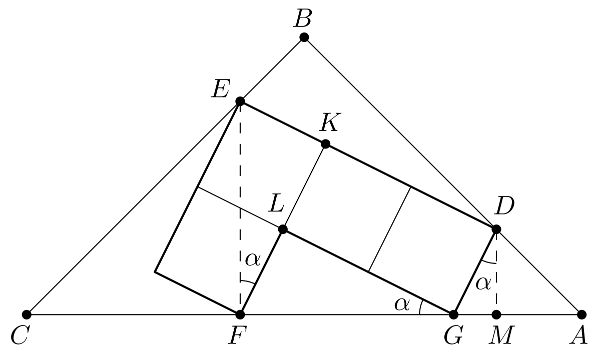
$$\frac{1}{5}\big(f(0,4)+f(1,3)+f(2,2)+f(3,1)+f(4,0)\big)=\frac{1}{5}\left(\frac{1}{3}+\frac{8}{15}+\frac{3}{5}+\frac{8}{15}+\frac{1}{3}\right)=\frac{7}{15}$$

Aufgabe 49. Ein L-Tetromino besteht aus vier kongruenten Quadraten, die über gemeinsame Kanten verbunden sind. Ein solches Tetromino wurde in einem gleichschenkligen rechtwinkligen Dreieck so positioniert, dass es vollständig innerhalb des Dreiecks liegt und sich vier seiner Ecken auf den Dreiecksseiten befinden, wie in der Skizze zu sehen ist. Wie groß ist das Verhältnis des Flächeninhalts des Tetrominos zum Flächeninhalt des Dreiecks?



Ergebnis. $\dfrac{80}{169}$

Lösung. Die Punkte werden so wie in der Abbildung benannt. Wenn man die Seitenlänge jedes der kleinen Quadrate auf 1 festlegt, muss man nur noch die Länge einer Seite des Dreiecks ABC berechnen, beispielsweise die der Hypotenuse AC.



Durch die Hilfslinie EF erhält man das rechtwinklige Dreieck EFK mit $\angle EKF=90°$ und den Seitenlängen $\overline{EK}=1$, $\overline{KF}=2$ und $\overline{EF}=\sqrt{5}$. Wegen $\overline{GL}=2$, $\overline{LF}=1$ und $\angle FLG=90°$ sind die Dreiecke EFK und FGL kongruent. Hieraus ergibt sich $\overline{GF}=\overline{EF}=\sqrt{5}$.

Nun wird der Winkel $\angle LGF$ mit α bezeichnet. Dann ist auch $\angle KFE=\alpha$ und man kann $\angle GFE=90°$ folgern, da α den Winkel $\angle GFL$ auf $90°$ ergänzt. Dies bedeutet aber, dass das Dreieck FEC ein gleichschenklig rechtwinkliges Dreieck mit der Seitenlänge $\overline{FC}=\sqrt{5}$ ist.

Fällt man das Lot von D auf AC und nennt den Lotfußpunkt M, so erhält man eine weitere Hilfslinie DM. Wegen $\angle LGF+\angle MGD=90°$ folgt $\angle GDM=\alpha$, weshalb das Dreieck MDG mit einem Skalierungsfaktor $\sqrt{5}$ ähnlich zum Dreieck FGL ist. Also ergeben sich die Seitenlängen des Dreiecks MDG zu $\overline{MG}=\frac{1}{\sqrt{5}}$, $\overline{MD}=\frac{2}{\sqrt{5}}$ und $\overline{DG}=1$. Da auch das Dreieck MAD ein gleichschenklig rechtwinkliges Dreieck ist, erhält man schließlich $\overline{AM}=\frac{2}{\sqrt{5}}$.

Insgesamt ergibt sich also

$$\overline{AC}=\overline{AM}+\overline{MG}+\overline{GF}+\overline{FC}=\frac{2}{\sqrt{5}}+\frac{1}{\sqrt{5}}+\sqrt{5}+\sqrt{5}=\frac{3+2\cdot 5}{\sqrt{5}}=\frac{13}{\sqrt{5}}.$$

Deshalb ist der Flächeninhalt des Dreiecks ABC gegeben durch

$$\frac{1}{2}\overline{AB}^2=\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{\overline{AC}}{\sqrt{2}}\right)^2=\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{13}{\sqrt{10}}\right)^2=\frac{169}{20}$$

und das gesuchte Verhältnis ist $4:\dfrac{169}{20}=\dfrac{80}{169}$.

Aufgabe 50. Betrachte die Folge $(a_n)_{n=1}^{\infty}$, definiert durch die Startwerte $a_1 = a_2 = a_3 = 1$ und die Rekursionsvorschrift

$$a_{n+3} = 3^{a_{n+2}} + 3^{a_{n+1}} + 3^{a_n}$$

für $n \geq 1$. Welchen Rest erhält man, wenn a_{22} durch 49 geteilt wird?

Ergebnis. 11

Lösung. Der Term a_{22} ist eine Summe von Potenzen von 3, deren Wert modulo 49 mit Hilfe des Satzes von Euler bestimmt werden kann. Wegen $\operatorname{ggT}(3, 49) = 1$ und $\varphi(49) = 42$ gilt nach dem Satz von Euler $3^{42} \equiv 1 \pmod{49}$ und deshalb folgt

$$3^{a_n} \equiv 3^{a_n \bmod 42} \pmod{49}.$$

Um also $a_{22} = 3^{a_{21}} + 3^{a_{20}} + 3^{a_{19}} \pmod{49}$ zu berechnen, genügt es, die Exponenten a_{21}, a_{20} und a_{19} modulo 42 zu kennen. Mit dem chinesischen Restsatz können die Reste modulo 42 über die Reste modulo 6 und 7 bestimmt werden.

Zunächst ist für $n \geq 4$ jedes Glied a_n eine Summe von drei Potenzen von 3, also ungerade und durch 3 teilbar. Folglich gilt $a_n \equiv 3 \pmod 6$. Da eine erneute Anwendung des Satzes von Euler $3^6 \equiv 1 \pmod 7$ liefert, folgt $3^{a_n} \equiv 3^3 \pmod 7$ für $n \geq 4$. Im Fall $n \geq 7$ gilt $n-1, n-2, n-3 \geq 4$ und man erhält

$$a_n = 3^{a_{n-1}} + 3^{a_{n-2}} + 3^{a_{n-3}} \equiv 3^3 + 3^3 + 3^3 \equiv 4 \pmod 7.$$

Kombiniert man diese Kongruenzen mit dem chinesischen Restsatz, so ergibt sich $a_n \equiv 39 \pmod{42}$ für $n \geq 7$. Schließlich folgt

$$a_{22} = 3^{a_{21}} + 3^{a_{20}} + 3^{a_{19}} \equiv 3^{39} + 3^{39} + 3^{39} \equiv 3^{40} \equiv \left(3^5\right)^8 \equiv 243^8 \equiv (-2)^8 \equiv 256 \equiv 11 \pmod{49}.$$

Der gesuchte Rest ist also 11.

Aufgabe 51. Max startet mit einem leeren Tank am Anfang einer unendlichen Straße. Für jede ganze Zahl $n \geq 0$ gibt es einen Händler, der sich n^2 Meilen vom Startpunkt entfernt befindet. Max kann von jedem Händler eine ganzzahlige Anzahl an Kraftstoffeinheiten kaufen. Die Händler verkaufen jedoch nur ungern große Mengen Kraftstoff, weshalb die Kosten pro Einheit mit jeder zusätzlich gekauften Einheit steigen: Bei jedem Händler kostet die erste Einheit 1 \$, die zweite Einheit 2 \$, die dritte Einheit 3 \$ und so weiter. Mit jeder Kraftstoffeinheit kann Max 1 Meile fahren. Sowohl das Angebot der Händler als auch die Kapazität des Tanks von Max sind unbegrenzt. Wie weit kann Max bei einem Budget von 730 \$ maximal auf der Straße fahren?

Ergebnis. 123

Lösung. Um den Händler in einer Entfernung von n^2 Meilen zu erreichen, kann Max bei n vorherigen Händlern Kraftstoff kaufen. Die minimalen Kosten werden erreicht, indem er bei jedem Händler genau n Einheiten kauft, da jede ungleichmäßige Verteilung die Gesamtkosten erhöht.

Es muss jedoch überprüft werden, ob der Plan „Bei jedem Händler, den ich treffe, kaufe ich n Einheiten Kraftstoff" tatsächlich funktioniert, das heißt, ob Max damit erfolgreich Meile n^2 erreichen kann und ihm nicht der Kraftstoff unterwegs ausgeht. Eine vollständige Induktion zeigt, dass dieser Plan nicht fehlschlägt. Der Fall $n = 0$ ist klar: Um Meile 0 zu erreichen, muss kein Kraftstoff gekauft werden. Angenommen es ist möglich, Meile n^2 zu erreichen, indem Max bei jedem der n Händler n Einheiten kauft. Wenn er stattdessen $n+1$ Einheiten kauft, wird ihm der Treibstoff sicherlich nicht vor Meile n^2 ausgehen. Daher schafft er es auch, $n+1$ Einheiten vom Händler bei Meile n^2 zu kaufen, und nach diesen $n+1$ Käufen von $n+1$ Einheiten wird Max erfolgreich Meile $(n+1)^2$ erreichen.

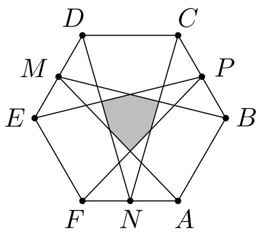
Somit betragen die Kosten K_n, um n^2 Meilen zu erreichen, mindestens

$$K_n = n\,(1 + 2 + \cdots + n) = n\,\frac{n(n+1)}{2}.$$

Wegen $K_{11} = 726 \leq 730 < 936 = K_{12}$ kann Max mit dem gegebenen Budget 11^2 Meilen erreichen, 12^2 Meilen jedoch nicht. Mit den verbleibenden 4 \$ können 2 weitere Einheiten beim Händler, der 11^2 Meilen vom Startpunkt entfernt ist, gekauft werden, wodurch Max 123 Meilen erreichen kann. Um jedoch auf die gleiche Weise 124 Meilen zu erreichen, würde das Budget um 2 \$ überschritten werden. Diese Konstruktionen sind für 123 und 124 kostenoptimal: Es ist mit dem Budget nicht möglich, beim letzten Händler mehr Treibstoff zu kaufen, und die Erhöhung der Treibstoffmenge, die bei den vorherigen Händlern gekauft wird, kostet mindestens 12 \$ mehr pro zusätzlicher Einheit, auch bei idealer Verteilung.

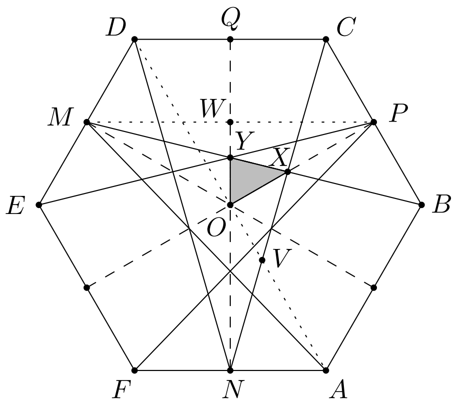
Folglich kann Max maximal 123 Meilen weit fahren.

Aufgabe 52. Sei $ABCDEF$ ein regelmäßiges Sechseck mit dem Flächeninhalt 420. Seien M, N und P die Mittelpunkte der Seiten DE, FA bzw. BC. Die Strecken AM, BM, CN, DN, EP und FP werden eingezeichnet und schließen eine grau gekennzeichnete Fläche ein. Bestimme den Flächeninhalt dieser Fläche.



Ergebnis. 36

Lösung. Die graue Fläche lässt sich in sechs kongruente Dreiecke zerlegen. Wir berechnen daher den Flächeninhalt eines solchen Dreiecks. Sei O der Mittelpunkt des Sechsecks, X der Schnittpunkt von BM mit CN und Y der Schnittpunkt von BM mit PE. Außerdem führen wir einige Hilfspunkte ein: Q sei der Mittelpunkt von CD, V der Schnittpunkt von AD mit CN und W der Schnittpunkt von PM mit QN. Wir werden $\overline{OX} : \overline{OP} = 2 : 5$ und $\overline{OY} : \overline{OQ} = 2 : 7$ zeigen.



Da die Dreiecke NAV und CDV ähnlich sind und $\overline{NA} = \frac{1}{2}\overline{CD}$ gilt, folgt $\overline{AV} : \overline{VD} = 1 : 2$ und somit $\overline{OV} = \frac{1}{3}\overline{OA}$. Nun ist das Dreieck OVX ähnlich zu PCX. Und da $\overline{PC} = \frac{1}{2}\overline{BC} = \frac{1}{2}\overline{OA}$ ist, erhalten wir $\overline{OV} : \overline{PC} = 2 : 3$, was auch gleich $\overline{OX} : \overline{PX}$ ist. Daher folgt $\overline{OX} : \overline{OP} = 2 : 5$.

Um zu sehen, dass $\overline{OY} : \overline{OQ} = 2 : 7$ gilt, benutzt man die Ähnlichkeit der Dreiecke OBY und WMY. Aus $\overline{WM} = \frac{3}{4}\overline{OB}$ folgt dann $\overline{OY} : \overline{YW} = 4 : 3$. Zusammen mit $\overline{OW} = \overline{WQ}$ ergibt sich leicht $\overline{OY} : \overline{OQ} = 2 : 7$.

Wir bezeichnen nun mit eckigen Klammern den Flächeninhalt eines Dreiecks. Die Dreiecke OXY und OPQ besitzen den gemeinsamen Winkel $\angle POQ$, also gilt

$$\frac{[OXY]}{[OPQ]} = \frac{\overline{OX}}{\overline{OP}} \cdot \frac{\overline{OY}}{\overline{OQ}} = \frac{2}{5} \cdot \frac{2}{7} = \frac{4}{35}.$$

Außerdem ist das Dreieck OPQ gleichseitig mit der Seitenlänge $\frac{\sqrt{3}}{2}$ mal der Seitenlänge von ABO, also gilt $[OPQ] = \frac{3}{4}[ABO]$. Damit folgt

$$\frac{[OXY]}{[ABO]} = \frac{4}{35} \cdot \frac{3}{4} = \frac{3}{35}.$$

Da die graue Fläche aus sechs Kopien von OXY besteht und das Sechseck aus sechs Kopien von ABO, gilt dasselbe Verhältnis auch für die Gesamtflächen. Folglich ist der Flächeninhalt der grauen Fläche $\frac{3}{35} \cdot 420 = 36$.

Aufgabe 53. Adele ist eine Meisterin im algebraischen Umformen. Daher hat sie alle Ausdrücke der Form $\pm a \pm b \pm c \pm d$, das sind insgesamt 16 Ausdrücke für alle möglichen Vorzeichenkombinationen, miteinander multipliziert und so ein Polynom in den Variablen a, b, c, d erhalten. Anschließend hat sie alle Terme gestrichen, in denen mindestens eine der Variablen nicht vorkommt. Wie groß ist die Summe der Koeffizienten der verbleibenden Terme?

Ergebnis. -328

Lösung. Sei P das im Aufgabentext beschriebene Polynom vor dem Wegstreichen von Termen. Setzt man in allen vier Variablen den Wert 1 ein, so enthält das Produkt den Faktor $(1+1-1-1) = 0$. Daher ist die Summe aller Koeffizienten von P gleich 0. Nun wird die Summe der Koeffizienten der gestrichenen Monome mittels Inklusions-Exklusions-Prinzip berechnet.

Um mit der Berechnung der Koeffizientensumme derjenigen Monome zu beginnen, denen mindestens eine Variable fehlt, betrachten wir zunächst den Fall, dass eine feste Variable auf 0 gesetzt wird, und summieren dann über alle vier

Möglichkeiten. Auf diese Weise wird jedes Monom, dem eine Variable fehlt, mindestens ein Mal gezählt. Um die Summe der Koeffizienten der Terme ohne (beispielsweise) d zu bestimmen, berechnen wir den Wert von P für $a = b = c = 1$ und $d = 0$:

$$P(1,1,1,0) = \big((1+1+1)(1+1-1)(1-1+1)(1-1-1)(-1+1+1)(-1+1-1)(-1-1+1)(-1-1-1)\big)^2 = 9^2 = 81.$$

Summiert man über die vier Möglichkeiten der fehlenden Variable, so erhält man $4 \cdot 81 = 324$. In dieser Summe werden jedoch alle Terme, die nur zwei Variablen enthalten, doppelt gezählt. Daher müssen wir $P(1,1,0,0)$ sechsmal subtrahieren, da es sechs solche Variablenpaare gibt. Allerdings ist $P(1,1,0,0) = 0$, sodass dies keinen Beitrag zur Summe liefert. Schließlich müssen wir die Terme mit nur einer Variablen wieder hinzufügen, also addieren wir $P(1,0,0,0) = 1$ viermal. Insgesamt ergibt sich für diese Koeffizientensumme $324 - 6 \cdot 0 + 4 = 328$. Da die Gesamtsumme aller Koeffizienten von P gleich 0 ist, ist die Summe über die komplementäre Menge der Monome, also jene, die alle vier Variablen enthalten, folglich -328.

Aufgabe 54. Sabrina hat 9000 kongruente gleichseitige Dreiecke. Wie viele verschiedene Vierecke kann sie daraus zusammensetzen, indem sie alle 9000 Dreiecke ohne Überlappung zu genau einem Viereck anordnet? Vierecke, die kongruent sind, gelten als identisch.

Ergebnis. 30

Lösung. Ein Eckpunkt des Vierecks, der durch das Zusammenfügen gleichseitiger Dreiecke entsteht, kann nur einen Innenwinkel von $60°$ oder $120°$ haben. Da die Summe der Innenwinkel eines Vierecks $360°$ beträgt, müssen die vier Winkel $60°, 60°, 120°, 120°$ sein. Es gibt zwei Arten von Vierecken, die solche Innenwinkel besitzen: Parallelogramme und gleichschenklige Trapeze, je nachdem, ob die gleich großen Winkel einander gegenüberliegen oder benachbart sind.

Wir können im Folgenden annehmen, dass die gleichseitigen Dreiecke Seitenlänge 1 haben.

Hat ein Parallelogramm die Seiten mit den Längen a und b, so besteht es aus $2ab$ Dreiecken. Man kann sie als ab kleine Parallelogramme auffassen, die jeweils aus genau zwei Dreiecken bestehen. Wir suchen also Paare $\{a, b\}$ mit $ab = 4500$. Davon gibt es 18, weil $4500 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5^3$ insgesamt 36 Teiler besitzt.

Die hier auftretenden Trapeze kann man als Differenz zweier großer gleichseitiger Dreiecke auffassen kann. Ein gleichseitiges Dreieck der Seitenlänge n besteht aus n^2 kleinen Dreiecken, denn in Schichten zerlegt ist dies die Summe der ersten n ungeraden Zahlen. Daher soll die Bedingung $a^2 - b^2 = (a+b)(a-b) = 9000$ erfüllt werden, wobei a die längere Basis des Trapezes und b die kürzere bezeichnet. Wir suchen also wieder nach Paaren von Teilern, allerdings müssen hier sowohl $a + b$ als auch $a - b$ gerade sein, damit das Gleichungssystem eine ganzzahlige Lösung besitzt. Die Zahl 9000 hat 24 gerade Teiler, deren Quotient ebenfalls gerade ist, denn sie entsprechen den Teilern von $9000 : 4 = 2 \cdot 3^2 \cdot 5^3$. Diese liefern 12 gültige Paare für $a + b$ und $a - b$ und damit 12 gültige Paare für a und b.

Insgesamt gibt es also $18 + 12 = 30$ mögliche Vierecke.

Aufgabe 55. Thomas hat eine Lichterkette mit zehn Glühbirnen ans Fenster gehängt, aber leider leuchten nicht alle Glühbirnen. Es ist bekannt, dass es keine vier aufeinanderfolgenden Glühbirnen gibt, die abwechselnd leuchten und nicht leuchten, das heißt *leuchtet, aus, leuchtet, aus* oder *aus, leuchtet, aus, leuchtet.* Wie viele verschiedene mögliche Konfigurationen kann es geben?

Ergebnis. 548

Lösung. Bezeichne eine leuchtende Glühbirne mit 1 und eine nicht leuchtende mit 0. Dann besteht die Aufgabe darin, Binärfolgen der Länge zehn zu zählen, die weder 0101 noch 1010 als zusammenhängenden Block enthalten. Definiere eine Transformation, die alle Einträge an geraden Positionen umkehrt, also x_i durch $1 - x_i$ ersetzt für gerade i und x_i für ungerade i unverändert lässt. Wendet man diese Abbildung zweimal an, erhält man wieder die ursprüngliche Folge, also ist sie eine Bijektion. Außerdem verwandelt dieses Umkehren einen alternierenden Block 0101 oder 1010 in einen konstanten Block 0000 bzw. 1111 und umgekehrt. Daher stehen die ursprünglichen Folgen in Bijektion zu Binärfolgen der Länge zehn, die keinen Block aus vier aufeinanderfolgenden gleichen Bits enthalten, was sich einfacher zählen lässt.

Sei B_n die Anzahl der Binärfolgen der Länge n, die keinen Block aus vier aufeinanderfolgenden gleichen Bits enthalten. Wir behaupten, dass für $n > 3$ die Rekursion

$$B_n = B_{n-1} + B_{n-2} + B_{n-3}$$

gilt. Betrachte dazu eine zulässige Folge der Länge n und den maximalen gleichartigen Endblock, also den längsten Block gleicher Ziffern am Ende. Wegen der Bedingung hat dieser Block die Länge 1, 2 oder 3, und diese drei Fälle schließen sich gegenseitig aus. Hat der Endblock Länge $k \in \{1, 2, 3\}$, so erhält man durch Streichen der letzten k Ziffern eine zulässige Folge der Länge $n - k$. Umgekehrt kann man aus jeder zulässigen Folge der Länge $n - k$ eine zulässige Folge der Länge n erzeugen, indem man den eindeutig bestimmten Block der Länge k anhängt, der mit der letzten Ziffer alterniert, das heißt, man hängt zuerst die entgegengesetzte Ziffer an und setzt dann mit dieser Ziffer fort, bis insgesamt k Ziffern angehängt sind. Damit stehen zulässige Folgen der Länge n in Bijektion zu zulässigen Folgen der Längen $n - 1$, $n - 2$ und $n - 3$, woraus die Rekursion folgt.

Für $n \leq 3$ ist die Bedingung leer, also gilt $B_1 = 2$, $B_2 = 4$ und $B_3 = 8$, denn alle Binärfolgen der Länge n sind erlaubt. Mit der Rekursion $B_n = B_{n-1} + B_{n-2} + B_{n-3}$ erhält man der Reihe nach $B_4 = 14$, $B_5 = 26$, $B_6 = 48$, $B_7 = 88$, $B_8 = 162$, $B_9 = 298$ und schließlich $B_{10} = 548$.

Aufgabe 56. Finde alle positiven ganzen Zahlen a, die folgende Gleichung erfüllen:

$$\left(\frac{23+\sqrt{23^2-4}}{2}\right)^5 = \left(\frac{a+\sqrt{a^2-4}}{2}\right)^2$$

Ergebnis. 2525

Lösung. Es genügt, ganze Zahlen $a \geq 2$ zu betrachten, da die Wurzel auf der rechten Seite für $a \geq 2$ definiert ist, nicht aber für $a = 1$. Wegen

$$\frac{23+\sqrt{23^2-4}}{2} = \frac{23+5\sqrt{21}}{2} = \left(\frac{5+\sqrt{21}}{2}\right)^2$$

und $a + \sqrt{a^2-4} > 0$ vereinfacht sich die gegebene Gleichung zu

$$\frac{a+\sqrt{a^2-4}}{2} = \left(\frac{5+\sqrt{21}}{2}\right)^5.$$

Diese Gleichung wird durch Ausmultiplizieren der rechten Seite zu

$$\begin{aligned}
a+\sqrt{a^2-4} &= \frac{1}{16}\left(5^5 + \binom{5}{2}\cdot 5^3\cdot 21 + \binom{5}{4}\cdot 5^1\cdot 21^2 + \binom{5}{1}\cdot 5^4\cdot\sqrt{21} + \binom{5}{3}\cdot 5^2\cdot(\sqrt{21})^3 + (\sqrt{21})^5\right)\\
&= \frac{1}{16}\left(3125 + 10\cdot 2625 + 25\cdot 441 + (5^5 + 21\cdot 250 + 21^2)\cdot\sqrt{21}\right)\\
&= 2525 + 551\cdot\sqrt{21}.
\end{aligned}$$

Durch Vergleich des rationalen und irrationalen Anteils erhält man $a = 2525$ und $\sqrt{a^2-4} = 551\cdot\sqrt{21}$. Da a eine ganze Zahl ist, muss $a = 2525$ gelten. Zur Kontrolle setzt man $a = 2525$ in $a^2 - 4$ ein. Es ergibt sich wie gewünscht

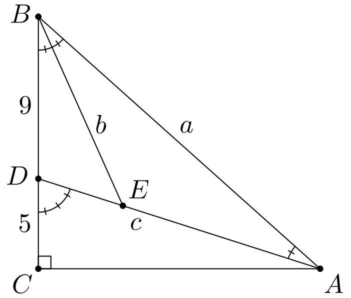
$$2525^2 - 4 = 6\,375\,621 = 551^2\cdot 21.$$

Da für $a \geq 2$ sowohl a also auch $\sqrt{a^2-4}$ und damit der gesamte Ausdruck $a + \sqrt{a^2-4}$ strikt ansteigende Werte annimmt, kann die Gleichung höchstens eine positive ganzzahlige Lösung für a besitzen. Damit ist gezeigt, dass die obige Lösung $a = 2525$ eindeutig ist.

Aufgabe 57. Im rechtwinkligen Dreieck ABC mit dem rechten Winkel im Eckpunkt C liegt der Punkt D auf der Seite BC so, dass $\overline{BD} = 9$ und $\overline{DC} = 5$ gilt. Zudem gelte $\angle CDA = 3\angle BAD$. Bestimme die Länge der Seite AB.

Ergebnis. 21

Lösung. Eine Winkeljagd ergibt $\angle DBA = 2\angle BAD$. Die Winkelhalbierende des Winkels $\angle DBA$ schneidet die Seite AD im Punkt E. Da BE den Winkel $\angle DBA$ halbiert, gilt $\angle DBE = \angle EBA = \angle BAD$. Das Dreieck EAB ist also gleichschenklig und es gilt $\overline{AE} = \overline{EB}$. Ferner sind die Dreiecke DBE und DAB ähnlich. Aus der Ähnlichkeit folgt $\overline{DB} : \overline{DA} = \overline{DE} : \overline{DB} = \overline{BE} : \overline{AB}$.



Sei $\overline{AB} = a$, $\overline{AE} = \overline{EB} = b$ und $\overline{AD} = c$. Dann gilt $\overline{DE} = c - b$, und die oben aus der Ähnlichkeit hergeleiteten Verhältnisse lauten

$$\frac{9}{c} = \frac{c-b}{9} = \frac{b}{a}.$$

Daraus ergeben sich $c^2 = bc + 81$ und $bc = 9a$, woraus $c^2 = 9a + 81$ folgt. Da die Dreiecke ACD und ABC bei Eckpunkt C einen rechten Winkel haben, folgt nach dem Satz des Pythagoras sowohl

$$\overline{AC}^2 = \overline{AB}^2 - \overline{BC}^2 = a^2 - (9+5)^2 = a^2 - 196$$

als auch

$$\overline{AC}^2 = \overline{AD}^2 - \overline{DC}^2 = c^2 - 25.$$

Setzt man diese Ausdrücke gleich und verwendet $c^2 = 9a + 81$, so erhält man

$$a^2 - 196 = 9a + 56, \quad \text{also} \quad a^2 - 9a - 252 = 0.$$

Diese Gleichung hat eine einzige positive Lösung, nämlich $a = 21$.