



Was wir ausgelassen haben ist, dass auf den reellen Zahlen eine vollständige Ordnung existiert, sodass es Ungleichungen gibt. Im Gegensatz dazu gibt es keine Ordnung auf den komplexen Zahlen. Warum? Für eine Ordnung muss immer  $0 < 1$  gelten. Wir verwenden nun, dass aus  $a > b > 0$  folgt  $a^2 > b^2 > 0$  und  $-a < -b < 0$ . Angenommen  $i > 0$ , dann würde  $-1 = i^2 > 0^2 = 0$  folgen, also ein Widerspruch. Würde nun  $i < 0$  gelten, dann folgt  $-i > 0$  und somit  $-1 = (-i)^2 \cdot i^2 = (-i)^2 > 0^2 = 0$ , also auch ein Widerspruch.

Sie sehen also da gibt es viele Regeln die nicht vom Himmel fallen sondern ...

**Tip 1** *Begehen Sie nicht den Fehler zu glauben, das mehrmaliges Lesen eines Skriptes genügt um Mathematik zu lernen. Das geht (im großen und Ganzen) nur, wenn Sie sehr sehr gut sind. Kaufen Sie sich ein großes Heft in dem Sie auf jeder Seite je zwei Aufgaben platzieren die sehr oft mit Bleistift lösen. Ich habe dies selbst (für Physik) gemacht, nachdem ich nach einem Jahr Lehre in die HTL gegangen bin. Es war sehr schockieren auf einmal so viele dumme Rechenfehler und Abschreibfehler zu machen. Und es hat sich wirklich ausgezahlt. Insbesondere war ich beim ersten Physiktest der einzig positive. Seien Sie konsequent und halten Sie durch!*

### 1.1.2 Warum sollten Sie die Regeln kennen?

Wie alles im Universum gibt es Regeln. Damit das Rechnen mit zum Beispiel den rationalen Zahlen nicht zu Widersprüchen führt müssen wir gewisse Regeln beachten. In der Schule lernen wir das Rechnen, dann vergessen wir die Regeln und schließlich rechnen wir 'heuristisch'. Aber dies reicht nicht mehr aus für anspruchsvollere Aufgaben bzw. Probleme. Hier einige falsche Lösungen von einfachen Problemen.

Zuerst zwei Aufgaben die oft nicht gelöst werden können.

**Beispiel 1** *Um bei einer mündlichen Prüfung zu helfen kann es vorkommen eine der folgenden zwei Frage zu stellen. (i) Welche reelle Zahl kann man zu jeder reellen Zahl dazu addieren, sodass die Summe gleich der ursprünglichen Zahl ist? Also  $x = ?$ , sodass  $a + x = a$  für alle reellen Zahlen  $a$ . Ja, da ist guter Rat teuer. Es ist so einfach und doch so schwer. Die Antwort ist die Zahl Null in Zeichen 0. (ii) Welche reelle Zahl kann man zu jeder reellen Zahl dazu multiplizieren, sodass das Produkt gleich der ursprünglichen Zahl ist? Also  $x = ?$ , sodass  $a \cdot x = a$  für alle reellen Zahlen  $a$ . Und wieder ist guter Rat teuer. Die Antwort ist die Eins in Zeichen 1.*

Weiters erinnern wir an folgende Regeln bzw. Identitäten:

$$0 \cdot 1 = 0, \quad 1^a = 1, \quad b^0 = 1, \quad 0^c = 0, \quad \sqrt[0]{0} = 0 \quad \text{und} \quad \sqrt[1]{1} = 1$$

für alle  $a, b, c \in \mathbb{R}$  mit  $b \neq 0$  und  $c > 0$ . Insbesondere,  $1^0 = 1$  und  $0^1 = 0$ . Hier haben wir auch Regeln von Funktionen verwendet, dass natürlich auch zum Rechnen mit Zahlen dazugehört. Später mehr dazu.

Nun zu einem schnell schnell 'gelösten' Beispiel, wobei nicht über das Ergebnis reflektiert wurde. Sie werden natürlich denken: Mir passiert dies nicht. Ja, natürlich.

**Beispiel 2** *Nach kurzer Rechnung (die wir hier nicht aufschreiben) erhalten Sie*

$$1 \cdot x = 0 \quad \text{ja das ist natürlich} \quad x \stackrel{\text{Ohh}}{=} 1.$$

*Das tut weh und man muss mehrmals hinschauen um es wirklich zu glauben das dies auf dem Zettel steht. Da wurde irgendwie falsch abgeschrieben und dann das Abgeschriebene nicht kontrolliert. Schnell schnell etwas aufzuschreiben und nicht darüber reflektieren bzw. kontrollieren passiert gerade bei den einfachsten Aufgaben.<sup>1</sup> Solche Fehler können sehr einfach erkannt werden.*

<sup>1</sup>Und sehr unleserlich mit unterschiedlich großen Abständen schreiben. Ein Mal wird zu einem Minus, ...

**Beispiel 3** Vereinfache den Bruch  $\frac{1}{\frac{7}{2} + \frac{2}{7}}$ . Folgendes ist falsch:

$$\frac{1}{\frac{7}{2} + \frac{2}{7}} \stackrel{\text{Ohh}}{=} \frac{2}{7} + \frac{7}{2}.$$

Auch das tut weh. Genauer hinschauen zeigt  $\frac{7}{2} + \frac{2}{7} > 1$  und damit ist sein Kehrwert kleiner als Eins. Das falsche Ergebnis ist aber größer als Eins. Das hätte man durchaus erkennen können. Bei einer mündlichen Prüfung würde man von ihnen erwarten, dass Sie nach kurzer Reflexion dies auch erkennen. Also Reflektieren sie - auch als Übung - immer über ihre Rechenergebnisse. Schreiben Sie schön damit Sie Abschreibfehler besser erkennen und besser Reflektieren können. Die Aufgabe kann wie folgt gelöst werden. Ersten, damit der Wert des Bruches sich nicht ändern mussen wir Zähler und Nenner mit ein und derselben Zahl multiplizieren. (Dies wird später anderswo gezeigt!) Zweitens muss es eine ganze Zahl sein die multipliziert mit  $\frac{1}{2}$  als auch mit  $\frac{1}{7}$  zu je einer ganzen Zahl führt und das ist natürlich  $2 \cdot 7$  bzw. 14. Damit folgt:

$$\frac{1}{\frac{7}{2} + \frac{2}{7}} = \frac{1}{\frac{7}{2} + \frac{2}{7}} \cdot \frac{2 \cdot 7}{2 \cdot 7} = \frac{2 \cdot 7}{7 \cdot 7 + 2 \cdot 2} = \frac{14}{49 + 4} = \frac{14}{53} < 1.$$

Weil 53 nicht durch 2 und 7 teilbar ist, können wir dieses Ergebnis nicht weiter durch Kürzen vereinfachen.

Noch ein schnell schnell 'gelöstes' Beispiel.

**Beispiel 4** Lösen Sie die Gleichung

$$\sqrt{x} = 1 \quad \text{in den reellen Zahlen } \mathbb{R}.$$

Bei solch einem Beispiel kommt sehr oft (wie aus der Pistole geschossen)  $-1$ , aber auch  $\pm 1$ . Warum? Möglicherweise erinnert sie die Person daran das dies nur eine einzige Lösung hat und es muss etwas besonderes sein also nicht 1 sondern  $-1$ . Da muss ja ein Trick/Hacken in der Aufgabe sein, oder? Die zweite Person verwechselt vielleicht die Aufgabe mit  $x^2 = 1$  ohne darüber zu Reflektieren. Nun die Lösung lautet  $x = 1$  und Sie ist die einzige Lösung von  $\sqrt{x} = 1$  in  $\mathbb{R}$ . Zur Probe, die (positive) Wurzelfunktion - die wir hier vor uns haben - hat genau eine Lösung  $\geq 0$  für jedes  $x \geq 0$  (vgl. ihren Graphen!) und es gilt  $\sqrt{1} = 1$ . Oder quadrieren ergibt

$$|x| = (\sqrt{x})^2 = 1^2 = 1 \cdot 1 = 1 \quad \text{und da } x \geq 0 \text{ gilt, folgt } x = |x| = 1.$$

An einer anderen Stelle werden wir diese Aufgabe noch viel genauer betrachten, wobei wir nichts über den Graphen der Wurzelfunktion wissen müssen. Wir werden aber das Rechnen mit Ungleichungen benötigen.<sup>2</sup>

**Tip 2** Identifizieren Sie die benötigten Rechenregeln und wenden Sie diese an. Wenn Sie einen Schritt machen, dann muss es dafür eine Rechtfertigung geben; ansonsten ist es nicht besser als Raten bzw. Heuristik. Bei Mathematik geht das ganz ganz schlecht. (Deswegen mögen viele Leute Mathematik bzw. das Rechnen nicht.) Gewöhnen Sie sich an immer (zumindestens bei wichtigen Problemen) zu reflektieren; auch später noch einmal! Das größte ihrer Problem ist die Fehler zu erkennen und nicht das Falsche zu lernen! Tip 1 hilft ihnen dabei, wenn Sie Aufgaben mit den richtigen Lösungen haben.

<sup>2</sup>Als Vorgeschmack: Es gilt  $2 < 3$  impliziert  $4 = 2^2 < 3^2 = 9$  und  $10 = 2 \cdot 5 < 3 \cdot 5 = 15$ . Andererseits gilt auch  $-3 < -2$  impliziert  $9 = (-3)^2 > (-2)^2 = 4$  und  $15 = (-3) \cdot (-5) > (-2) \cdot (-5) = 10$ , die Relationszeichen drehen sich um.

### 1.1.3 Regeln eines *Körpers*

Jetzt aber zu den Rechenregeln in den rationalen Zahlen.

$$(Q1) \quad a + b = b + a$$

$$(Q2) \quad (a + b) + c = a + (b + c)$$

(Q3) Es gibt  $z \in \mathbb{Q}$ , sodass  $x + z = x = z + x$  für jedes  $x \in \mathbb{Q}$ . Diese Zahl  $z$  wird mit 0 (Null) bezeichnet.

(Q3) Für jedes  $x \in \mathbb{Q}$  gibt es ein  $y \in \mathbb{Q}$ , sodass  $x + y = 0 = y + x$ . Diese Zahl  $y$  wird mit  $-x$  (minus  $x$ ) bezeichnet.

Für die multiplikative Verknüpfung  $\cdot : \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{Q}$  gilt:

$$(Q4) \quad a \cdot b = b \cdot a$$

$$(Q5) \quad (a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$$

(Q6) Es gibt  $z \in \mathbb{Q}$ , sodass  $x \cdot z = x = z \cdot x$  für jedes  $x \in \mathbb{Q}$ . Diese Zahl  $z$  wird mit 1 (Eins) bezeichnet.

(Q7) Für jedes  $x \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}$  gibt es ein  $y \in \mathbb{Q}$ , sodass  $x \cdot y = 1 = y \cdot x$ . Diese Zahl  $y$  wird mit  $x^{-1}$  bzw.  $\frac{1}{x}$  (Kehrwert von  $x$ ) bezeichnet.

Beide Verknüpfungen erfüllen in Kombination:

$$(Q8) \quad (a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c \text{ für alle } a, b, c \in \mathbb{Q}.$$

Wenn wir die Menge  $\mathbb{Q}$  mit diesen zwei Verknüpfungen versehen so sprechen wir vom *Körper*  $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$  der rationalen Zahlen. Wenn wir ganz genau sein müssen wir  $(\mathbb{Q}, 0, 1, +, \cdot)$  schreiben (um die gesamte *algebraische Struktur* anzugeben), aber oft schreibt man einfach  $\mathbb{Q}$ , aber das ist eigentlich nur eine Menge. Geben wir noch die Ordnungsrelation  $\leq$  hinzu so sprechen wir vom *geordneten Körper*  $(\mathbb{Q}, 0, 1, +, \cdot, \leq)$  der rationalen Zahlen. Analog spricht man vom *geordneten Körper*  $(\mathbb{R}, 0, 1, +, \cdot, \leq)$  der reellen Zahlen.<sup>3</sup> Später mehr dazu, fürs den Anfang reicht dies.

Das folgende Beispiel und die anschließende Aufgabe werden nicht geprüft! Sie dienen zum besseren Verständnis.

**Beispiel 5** *Zuerst das aller Einfachste. Gilt*

$$1 + 2 = 2 + 1, \quad 1 + 2 + 3 = 2 + 3 + 1 \quad \text{und} \quad 1 + 2 + 3 + 4 = (1 + 3) + (2 + 4) \quad ?$$

*Die erste Behauptung folgt sofort aus (Q1). Nun zur zweiten Behauptung:*

$$2 + 3 + 1 = 2 + 1 + 3 = 1 + 2 + 3 \quad \text{wegen} \quad (Q1).$$

*Und zur letzten Behauptung.*

$$\begin{aligned} (1 + 3) + (2 + 4) &\stackrel{(Q1)}{=} (1 + 3) + (2 + 4) \stackrel{(Q2)}{=} ((1 + 3) + 2) + 4 \stackrel{(Q2)}{=} (1 + (3 + 2)) + 4 \\ &\stackrel{(Q2)}{=} (1 + (2 + 3)) + 4 \stackrel{(Q2)}{=} ((1 + 2) + 3) + 4 = 1 + 2 + 3 + 4. \end{aligned} \quad (1)$$

*Zusammenfassend: Addieren wir endlich viele reelle Zahlen, so muss man nicht auf ihre Reihenfolge achten.*

---

<sup>3</sup>Der Unterschied zwischen  $\mathbb{Q}$  und  $\mathbb{R}$  (schlampig geschrieben!) ist, dass  $\mathbb{Q}$  Lücken hat. Es gibt eine Folge rationaler Zahlen die in  $\mathbb{R}$  gegen  $\sqrt{2} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$  konvergieren. Jede dieser Lücken entspricht einer irrationalen Zahl und kann durch eine rationale Zahl beliebig genau approximiert werden. Grenzwerte von Folgen reeller Zahlen sind immer reelle Zahlen.

**Aufgaben 1** Zeige bzw. überlege, dass folgendes gilt:

$$1 \cdot 2 = 2 \cdot 1, \quad 1 \cdot 2 \cdot 3 = 2 \cdot 3 \cdot 1 \quad \text{und} \quad 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = (1 \cdot 3) \cdot (4 \cdot 2).$$

Zusammenfassend: Multiplizieren wir endlich viele reelle Zahlen, so muss man nicht auf ihre Reihenfolge achten.

**Beispiel 6** Zeige, dass

$$1 + 2 \cdot 3 + 4 \neq (1 + 2) \cdot (3 + 4).$$

Beachte die Regel: Punktrechnung geht vor Strichrechnung. Es folgt:

$$1 + 2 \cdot 3 + 4 = 1 + 6 + 4 = 11 \quad \text{und} \quad (1 + 2) \cdot (3 + 4) = 3 \cdot 7 = 21,$$

d.h.  $11 \neq 21$ , was zu zeigen war.

Ohne Beweis erwähnen wir noch:

$$(Q8') (a_1 + a_2 + \dots + a_n) \cdot b = a_1 \cdot b + a_2 \cdot b + \dots + a_n \cdot b$$

für reelle Zahlen  $a_1, a_2, \dots, a_n, b$ .

**Beispiel 7** Gegeben sind zwei rationale Zahlen  $a, b \in \mathbb{Q}$  mit  $a \neq 0$ . Zeige, dass

die Gleichung  $ax = b$  immer eine Lösung in  $\mathbb{Q}$  hat.

Betrachten wir zuerst die drei Gleichungen (i)  $\frac{7}{2}x = \frac{3}{5}$ , (ii)  $0x = \frac{3}{2}$  und (iii)  $0x = 0$ . Wegen  $\frac{7}{2} \neq 0$ , gibt es dafür ein Inverses, nämlich  $\frac{2}{7}$ , und damit folgt für die Lösung  $x = \frac{2 \cdot 3}{7 \cdot 5} = \frac{6}{35}$ . 35 ist nicht gerade, also nicht durch 2 teilbar, und die Ziffernsumme von 35, also  $3 + 5 = 8$ , ist nicht durch 3 teilbar, also ist 35 auch nicht durch 3 teilbar. Damit können wir den Bruch nicht weiter vereinfachen. Nun zur zweiten Gleichung. Wegen  $0x = 0$  folgt  $0 = 0x = \frac{3}{2} \neq 0$ , d.h. ein Widerspruch. Damit hat die Gleichung in (ii) keine Lösung, falls  $a = 0$  gilt. Ihre Lösungsmenge ist also  $\mathbb{L} = \emptyset = \{\}$ . Die Gleichung in (iii) hat jede rationale Zahl als Lösung, denn Null mal einer rationalen Zahl ergibt immer Null. Ihre Lösungsmenge ist also  $\mathbb{L} = \mathbb{Q}$ . Zurück zum eigentlichen Problem. Weil  $a \neq 0$  gilt, existiert  $a^{-1}$  bzw.  $\frac{1}{a}$  und damit folgt

$$x = a^{-1}b \quad \text{bzw.} \quad x = \frac{1}{a} \cdot b = \frac{b}{a}.$$

Beachte, dass die Lösung von  $ya = b$  durch  $y = ba^{-1}$  gegeben ist, wegen Eigenschaft (Q4) gilt aber  $x = y$ . Genauer, wir haben zuerst das rechtsseitige Inverse und dann das linksseitige Inverse verwendet, aber beide sind in einem Körper gleich. Dies macht alles sehr viel einfacher.

**Beispiel 8** Löse die Gleichung

$$\frac{x^2 + 3}{3x} = \frac{1}{x} + 1 \quad \text{in} \quad \mathbb{Q}.$$

Zuerst stellen wir fest, dass  $x \neq 0$  gelten muss. Multiplizieren der Gleichung mit  $3x$  (was die Lösungsmenge nicht verändert) führt zu  $x^2 + 3 = 3 + 3x$ . Dies ist äquivalent zu

$$x^2 - 3x = 0 \quad \text{bzw.} \quad x(x - 3) = 0.$$

Ein Produkt von Zahlen ist genau dann Null, wenn mindestens einer der Faktoren Null ist. Da  $x = 0$  ausgeschlossen werden musste, folgt für die Lösung  $x = 3$ . Sie können sich selbst solch ein Beispiel konstruieren. Sie Starten mit  $x = \frac{1}{2}$  und formen mehrmals um. Zuerst  $2x = 1$ , dann  $2x - 1 = 0$  dann  $x^2(2x - 1) = 0$  und schließlich  $\frac{x^2(2x-1)}{3-x} = 0$ .

**Tip 3** *Folgendes sollte jedem bekannt sein. Sind wir in einer ‘Sache’ gut, dann lernen wir bzgl. dieser Sache ständig bewusst und unbewusst dazu und werden immer besser bzw. bleiben gut darin. Sind wir hingegen in einer Sache nicht gut, dann lernen wir nicht unbewusst dazu, sondern verschieben das dazu Lernen immer wieder auf später. Was müssen Sie also machen? Sie wissen es natürlich. Machen Sie aber öfter Pausen beim Lernen von Sachen in denen Sie nicht gut sind und halten Sie durch.*

## 1.2 Rechnen mit ‘Vektoren’?

Ein ursprünglicher Prototyp für einen Vektorraum  $V_{\mathbb{K}}$  (über einem Körper  $\mathbb{K}$ ) war  $\mathbb{R}^3$  (über  $\mathbb{R}$ ) ausgestattet mit der Addition  $+: V \times V \rightarrow V$  und der Skalarmultiplikation  $\cdot: \mathbb{K} \times V \rightarrow V$ , die für dieses Beispiel wie folgt definiert sind

$$(a_1, a_2, a_3) + (b_1, b_2, b_3) := (a_1 + b_1, a_2 + b_2, a_3 + b_3)$$

und

$$\lambda (a_1, a_2, a_3) := (\lambda a_1, \lambda a_2, \lambda a_3)$$

für alle Skalare  $\lambda \in \mathbb{R}$  und Vektoren  $(a_1, a_2, a_3), (b_1, b_2, b_3) \in \mathbb{R}^3$ . In Vektorräumen gibt es i.a. kein Produkt. Für das obige Beispiel gibt es jedoch zwei Produkte, das *innere Produkt* auch *Skalarprodukt* genannt, in Zeichen  $\cdot$ , und das *äußere Produkt*, in Zeichen  $\times$ .<sup>4</sup> Wir verzichten auf die allgemeinen Regeln, erwähnen aber, dass  $+: V \times V \rightarrow V$  dieselben Regeln wie die Addition in einem Körper erfüllt und  $\lambda v$  anschaulich eine Vielfaches von  $v$  ist, d.h.

$$(\lambda \mu) v = \lambda (\mu v) = \mu (\lambda v)$$

für Skalare  $\lambda, \mu$  und Vektoren  $V$  gilt. In der Mathematik wurde der Vektorraum definiert und alles im Vektorraum ist ein Vektor und nicht zuerst einzelne Vektoren, die dann den Vektorraum definieren.

Die Norm (Länge) eines Vektors ist definiert über sein Skalarprodukt:

$$\|v\| := |v| := \sqrt{v \cdot v}.$$

Für das obige Beispiel gilt:  $|(a, b, c)| := \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$  (Euklidische Norm).

## 1.3 Rechnen mit ‘Funktionen’?

Wir betrachten hier nur das Rechnen mit Funktionen der Form  $f, g, h: I \rightarrow \mathbb{R}$ , wobei  $I$  ein Intervall ist. Intervalle sind z. B.:  $]a, b[, [a, b], [a, b[, ] - \infty, b]$  für  $a, b \in \mathbb{R}$ , aber auch  $\mathbb{R}$  was nicht anderes ist als  $] - \infty, \infty[$ . Dann gilt:

$$(f+g)(x) := f(x)+g(x), \quad (f \cdot g)(x) := f(x) \cdot g(x) \quad \text{und} \quad (\lambda f)(x) := \lambda f(x) \quad \text{für} \quad \lambda, x \in \mathbb{R}.$$

**Beispiel 9** *Gegeben sind die Funktionen  $f, g: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  definiert durch  $f(x) := \pi x^2 - 7$  und  $g(x) := x^3 + 3$ . Berechne  $f + g, f \cdot g$  und  $\pi f$ . Es folgt:*

$$f + g: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto x^3 + \pi x^2 - 4,$$

$$\pi f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \pi^2 x^2 - 7\pi,$$

und

$$f \cdot g: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \pi x^5 - 7x^3 + 3\pi x^2 - 21,$$

wobei wir  $x^a \cdot x^b = x^{a+b}$  verwendet haben.

<sup>4</sup>. gibt es für alle Dimensionen und  $\times$  nur für die Dimensionen 2 und 3.

**Beispiel 10** *Vergleiche auch mit folgendem: Es seien  $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  stetig differenzierbare Funktionen, dann gilt:*

$$(f + g)' = f' + g', \quad (f \cdot g)' = f'g + fg' \quad \text{und} \quad \left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$$

wobei bei der letzten Regel/Identität natürlich nicht durch Null dividiert werden darf, also  $g(x) \neq 0$  für alle  $x \in \mathbb{R}$  vorausgesetzt wird. Hier ist  $g^2$  als  $g \cdot g$  definiert.

Beachte, dass  $f(x)$  eine reelle Zahl ist und damit rechnen wir bei jeder Funktionsauswertung mit reellen Zahlen. Daraus folgt auch

$$(F1) \quad f + g = g + f$$

$$(F2) \quad (f + g) + h = f + (g + h)$$

(F3) Es gibt eine Funktion  $g$ , sodass  $f + g = f = g + f$  für jede Funktion  $f$ . Diese Funktion  $g$  wird als die Nullfunktion  $0$  bezeichnet. Es gilt:  $0(x) = 0$ , d.h.  $0$  bezeichnet einerseits eine Funktion und andererseits die Zahl Null.

(F3) Für jede Funktion  $f$  gibt es eine Funktion  $g$ , sodass  $f + g = 0 = g + f$ . Die Funktion  $g$  wird mit  $-f$  (minus  $f$ ) bezeichnet. Es gilt:  $(-f)(x) := -f(x)$ .

$$(F4) \quad f \cdot g = g \cdot f$$

$$(F5) \quad (f \cdot g) \cdot h = f \cdot (g \cdot h)$$

(F6) Es gibt  $g \in \mathbb{Q}$ , sodass  $f \cdot g = f = g \cdot f$  für jede Funktion  $f$ . Diese Funktion  $g$  wird mit  $1$  (Einsfunktion) bezeichnet. Es gilt:  $1(x) = 1$ , d.h.  $1$  bezeichnet einerseits eine Funktion und andererseits die Zahl Eins.

$$(F7) \quad (f + g) \cdot h = f \cdot h + g \cdot h .$$

Beachte, das Analogon zu (Q7) gibt es nicht, d.h. nicht zu jeder Funktion  $f$  die nicht die Nullfunktion ist gibt es eine Funktion, sodass  $f \cdot g = 1 = g \cdot f$ . Betrachte z.B. die Funktion  $k$  definiert durch

$$k(x) = 1 \quad \text{für} \quad x \leq 0 \quad \text{und} \quad k(x) = 0 \quad \text{für} \quad x > 0 .$$

Dann gilt  $k(x) = 0$  für  $x > 0$  und für jedes  $x > 0$  kann es keine reelle Zahl  $a$  geben für die

$$k(x)a = 0 \cdot a \stackrel{\text{falsch}}{=} 1$$

gilt. Die Menge dieser Funktionen ausgestattet mit den Verknüpfungen ‘Addition’, ‘Multiplikation’ und ‘Skalarmultiplikation’ nennt man Funktionenraum. Wir haben gesehen, dass ein Funktionenraum i.a. kein Körper ist. Ein Funktionenraum ist aber immer ein Vektorraum; ein Vektor kann immer als Funktion dargestellt werden. Zum Beispiel gilt:

$$(a_1, a_2, a_3) \in \mathbb{R}^3 \quad \text{entspricht} \quad f : \{1, 2, 3\} \rightarrow \mathbb{R}, i \mapsto a_i .$$

Allgemeiner entspricht jede Folge  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  der Funktion  $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}, n \mapsto a_n$ . In der Tat, eine Folge ist eine Funktion die für praktische Zwecke mit  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  abgekürzt wird.

Der Betrag einer Funktion ist definiert durch:

$$|f| : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto |f(x)| \quad \text{oder kurz} \quad |f|(x) = |f(x)| .$$

Einige Funktionenräume besitzen auch Normen, aber diese lassen wir aus.