1. Beispiel (10 Punkte)

<u>Gegeben</u>:

Schwingende Flüssigkeitssäule mit federnd gelagertem Stab lt. Skizze in <u>entspannter Federlage</u>:

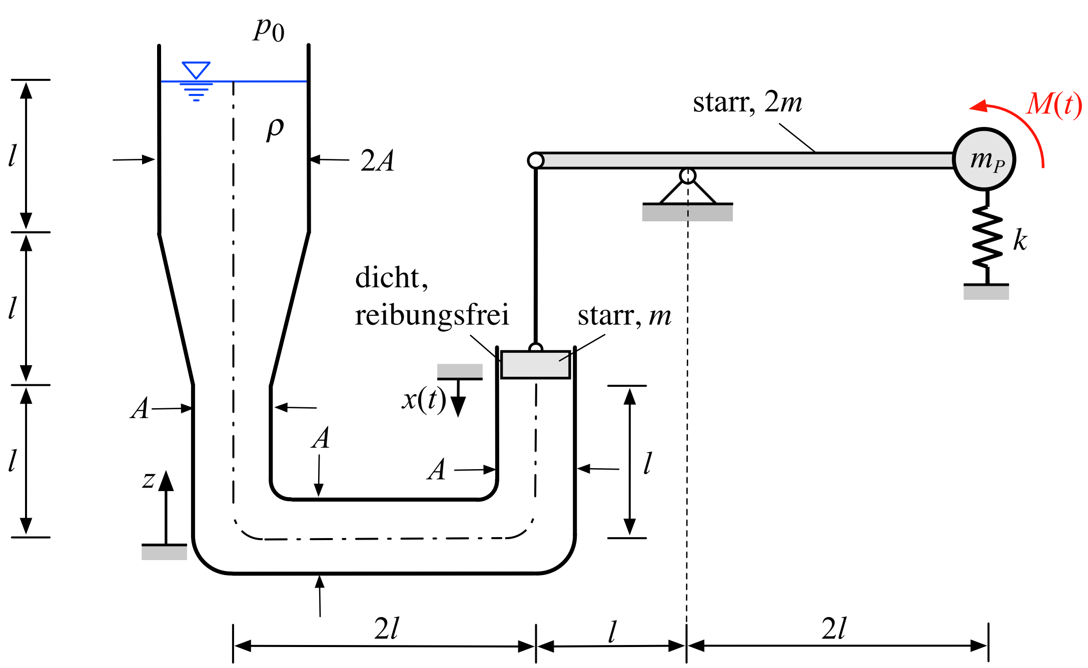
- Starrer Stab: Masse $2m$, Länge $3l$, Punktmasse m_P
- Starrer Kolben: Masse m
- Linear elastische Feder: Federsteifigkeit k
- Rohr: Längenmaß l, Querschnittsflächenmaß A
- Inkompressible, reibungsfrei strömende schwere Flüssigkeit mit der Dichte ρ
- Umgebungsdruck p_0
- Moment $M(t)$

<u>Gesucht</u>:

1. Anzahl der Freiheitsgrade
2. Bewegungsgleichung(en) des Systems für kleine Schwingwege

   Hinweis:

   $\int_{x_1}^{x_2} \frac{1}{b+\frac{x}{a}} dx = a \ln(|x + a \cdot b|)\big|_{x_1}^{x_2}$, $\ln(a) - \ln(b) = \ln\left(\frac{a}{b}\right)$
3. Statischen Gleichgewichtslage des Kolbens



Lösung zum 1. Beispiel

1. Anzahl der Freiheitsgrade

1 FG; LK: $x(t)$ ... vertikale Verschiebung des Kolbens

2. Bewegungsgleichung für kleine Schwingungen

$$\left[m^* + \rho A l\left(\frac{9}{2} + ln(2)\right)\right]\ddot{x} - \frac{3}{4}\rho A\ddot{x}x - \frac{3}{8}\rho A\dot{x}^2 + \left(4k + \frac{3\rho g A}{2}\right)x = -2\rho g A l - 2m_p g + \frac{M(t)}{l}$$

mit $m^* = 3m + 4m_p$

3. Statisches Gleichgewicht des Kolbens

$$x_{stat} = -\frac{2\rho g A l + 2m_p g}{4k + \frac{3\rho g A}{2}}$$

2. Beispiel (10 Punkte)

Gegeben:

Ebenes schwingungsfähiges System lt. Skizze, welches sich in der dargestellten Lage im statischen Gleichgewicht befindet:

- Linear elastischer, masseloser Biegestab: Länge $2l$, Biegesteifigkeit EJ
- Linear elastische Pendelstütze: Länge l, Masse pro Längeneinheit ρA, Dehnsteifigkeit EA
- Starrer Stab: Länge l, Masse m
- Geschwindigkeitsproportionaler Dämpfer: Dämpferkonstante r
- Einzelkraft: $F(t)$

Gesucht:

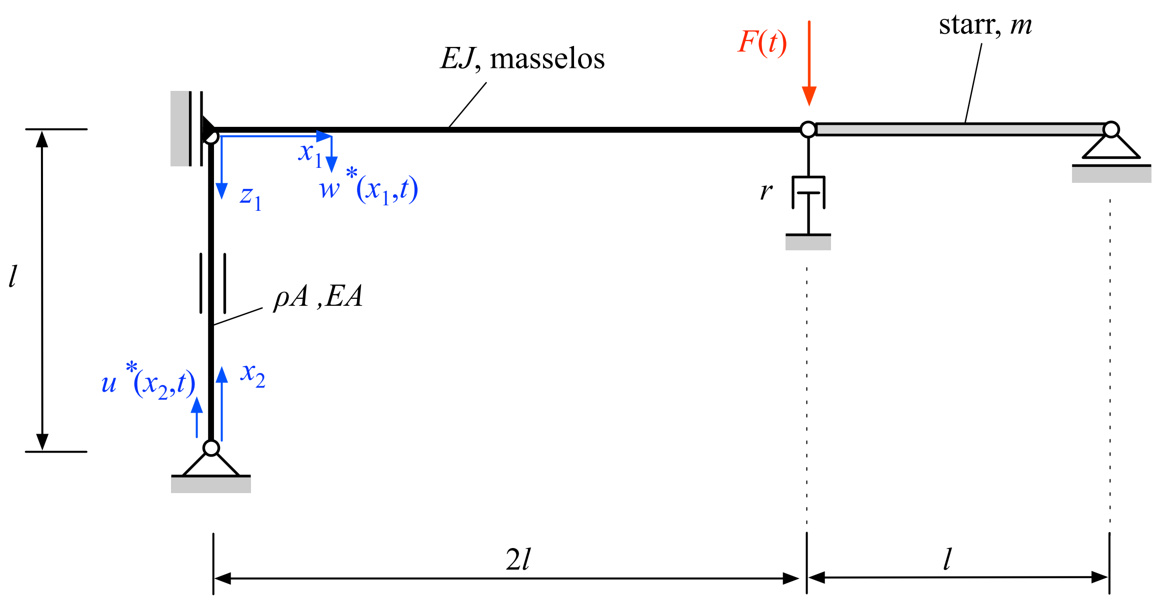
1. Anzahl der Freiheitsgrade des Ersatzsystems bei Verwendung der folgenden eingliedrigen *Ritz*schen Ansätze für die Durchbiegung w des Biegeträgers

   $w^*(x_1,t) = q_1(t)\varphi_1(x_1)$ mit $\varphi_1(x_1) = 1 - \cos\frac{\pi x_1}{4l}$ für $0 \le x_1 \le 2l$

   und für die Verformung u der Pendelstütze

   $u^*(x_2,t) = q_2(t)\varphi_2(x_2)$ mit $\varphi_2(x_2) = -\frac{x_2}{l}$ für $0 \le x_2 \le l$

2. a) Kinetische Energie
   b) Potentielle Energie
   c) Generalisierte Kräfte
   des diskretisierten Ersatzsystems für kleine Schwingungen
3. Bewegungsgleichung(en) des Ersatzsystems in *Lagrange*scher Form für kleine Schwingungen um die statische Gleichgewichtslage
4. Frequenzgleichung zur Bestimmung der Eigenkreisfrequenz(en) des ungedämpften Ersatzsystems



Lösung zum 2. Beispiel

1. Anzahl der Freiheitsgrade

2 FHG, $q_1(t)$ … Stauchung des Dehnstabes an der Stelle $x = l$

$q_2(t)$ … Durchbiegung des Biegeträgers an der Stelle $x = 2l$

2.a) Kinetische Energie

$$T = \frac{1}{2}\left[\rho A l \frac{1}{3}\dot{q}_2^2 + \frac{m}{3}\left(\dot{q}_1^2 + 2\dot{q}_1\dot{q}_2 + \dot{q}_2^2\right)\right]$$

2.b) Potentielle Energie

$$U = \frac{1}{2}\left[\frac{EJ}{l^3}\left(\frac{\pi}{4}\right)^4 q_1^2 + \frac{EA}{l}q_2^2\right]$$

$$W = -F\,(q_1 + q_2)$$

2.c) Generalisierte Kräfte

$$Q_1 = -r\,(\dot{q}_1 + \dot{q}_2)$$

$$Q_2 = -r\,(\dot{q}_1 + \dot{q}_2)$$

3. Bewegungsgleichungen

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \frac{m}{3} & \frac{m}{3} \\ \frac{m}{3} & \frac{m}{3} + \frac{1}{3}\rho A l \end{bmatrix}}_{\underset{\sim}{M}} \begin{Bmatrix} \ddot{q}_1 \\ \ddot{q}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} r & r \\ r & r \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \end{Bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{EJ}{l^3}\left(\frac{\pi}{4}\right)^4 & 0 \\ 0 & \frac{EA}{l} \end{bmatrix}}_{\underset{\sim}{K}} \begin{Bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F \\ F \end{Bmatrix}$$

4. Frequenzgleichung

$$\left(M_{11}M_{22} - M_{12}^2\right)\omega^4 - \left(M_{11}K_{22} + M_{22}K_{11}\right)\omega^2 + K_{11}K_{22} = 0$$