

Konstruktion mit Zirkel und Lineal vs. Origami

Diplomarbeit in der Studienrichtung
Lehramtsstudium Mathematik - Geschichte

zur Erlangung des akademischen Grades
Magister der Naturwissenschaften

eingereicht an der
Fakultät für Mathematik, Informatik und Physik
der Universität Innsbruck

von

Michael Strobl

betreut von Univ.-Prof. Dr. Tim Netzer

Innsbruck, 2018



Inhaltsverzeichnis

I	Konstruktionen mit Zirkel und Lineal	1
	Geschichtliche Entwicklung	2
	Konstruktionen im Schulunterricht	6
	Die vier klassischen Konstruktionsprobleme	11
II	Konstruktionen mit Origami	34
	Was ist Origami?	35
	Origami in der Mathematik	38
	Lösungen von Konstruktionsproblemen durch Origami	54
	Anwendbarkeit von Origami im Schulunterricht	65

Zusammenfassung

Diese Arbeit beschäftigt sich mit Konstruktionen mit Zirkel und Lineal sowie mit Konstruktionen, welche mit Faltungen durchgeführt werden, das sogenannte Origami. Erstere gehören schon seit Langem zum Unterrichtsstoff eines jeden Geometrieunterrichts. Origami hingegen findet in den wenigsten Schultypen Europas Eingang. Wird Origami in asiatischen Ländern oft als eigenes Unterrichtsfach angeboten, so sind in Europa noch immer die von der Antike überlieferten Methoden mit Zirkel und Lineal beherrschend. Im ersten Teil dieser Arbeit werden die wichtigsten im europäischen Raum im Schulunterricht gelernten Konstruktionen mit Zirkel und Lineal angeführt und anschließend wird auf die vier klassischen Konstruktionsprobleme der Antike eingegangen. Diese sind allesamt nicht mit Zirkel und Lineal lösbar, was zu beweisen ca. 2000 Jahre dauerte. Es wird gezeigt, warum die angesprochenen Konstruktionsprobleme nicht mit Zirkel und Lineal lösbar sind, bzw. was wir mit Zirkel und Lineal konstruieren können. Im zweiten Abschnitt ist Origami als Schwerpunkt gesetzt. Es wird erklärt, wie Origami mathematisch beschrieben wird, um dann anschließend zu zeigen, was, mit Origami konstruiert werden kann. Wir werden sehen, dass Origami stärker als das Konstruieren mit Zirkel und Lineal ist und dass wir mit Origami drei der genannten Konstruktionsprobleme lösen können. Solche Lösungsmethoden werden anschließend beschrieben und begründet. Abschließend wird darauf eingegangen, welches Potenzial Origami nun im europäischen Schulunterricht hätte, da man ja mit Origami mehr konstruieren kann, als mit Zirkel und Lineal.

Diese Arbeit beinhaltet viele Abbildungen, welche dem Leser Konstruktions-schritte und Begründungen besser verstehen lassen. Diese Abbildungen wurden mit dem frei erhältlichen Programm *GeoGebra* erstellt.

Danken möchte meinem Betreuer Univ.-Prof. Dr. Tim Netzer, welcher mir dieses Thema vorgeschlagen hat und mich auf Fehler und Verbesserungen aufmerksam gemacht hat und mir somit eine große Unterstützung war.

Teil I

**Konstruktionen mit Zirkel
und Lineal**

Geschichtliche Entwicklung

Die Geometrie ist das älteste Teilgebiet der Mathematik und geht auf die Zeit der alten Griechen, Ägypter, Chinesen und Babylonier zurück. Schon ungefähr im fünften Jahrhundert vor Christus waren vier Aufgabenstellungen bekannt, deren Bewältigung mit Zirkel und Lineal erfolgen sollte. Diese waren:

- die Konstruktion regelmäßiger Vielecke,
- die Quadratur des Kreises,
- die Dreiteilung des Winkels
- und die Verdoppelung des Würfels.

Hier ist zu beachten, dass unter dem Begriff „Quadratur“ die näherungsweise Bestimmung der Kreisfläche gemeint ist. In früheren Zeiten, so etwa unter Leibniz, verstand man unter „Quadratur“ die Bestimmung eines Flächeninhaltes von meist krummlinig begrenzten Figuren. Es stellt sich natürlich die Frage, warum sich die Griechen bei diesen Problemstellungen nur auf die Konstruktionsmittel von Zirkel und Lineal beschränkten. Diese Frage kann aber nicht eindeutig geklärt werden, da die damaligen Quellen darauf keine klaren Antworten geben. Folgende Argumente aber können vorgebracht werden:

- Die geradlinige und kreisförmige Bewegung spielte in der griechischen Naturphilosophie eine zentrale Rolle. So galt der freie Fall als Musterbeispiel für die geradlinige Bewegung und die Bewegung der Himmelskörper als Musterbeispiel für die vollkommene Kreisbewegung.
- Zirkel und Lineal sind relativ einfach herstellbar und man kann mit ihnen auch relativ präzise arbeiten.
- Durch die Beschränkung auf leicht zu beschaffende Instrumente werden Probleme übersichtlicher und einfacher verständlich für ein größeres Publikum.

Es ist auch nicht klar, wann sich diese Beschränkung auf Zirkel und Lineal durchgesetzt hat. Es ist zum Beispiel bekannt, dass auch schon in der Antike viele Mathematiker Lösungen zu den genannten Problemen vorschlugen, welche nicht nur mit Hilfe von Zirkel und Lineal auskamen. Bei Euklid (ca. 300 v. Chr.) zeichnet sich diese Einschränkung auf Zirkel und Lineal ab, ohne jedoch explizit genannt zu werden. Erst später, wie etwa bei Pappos (4. Jahrhundert n. Chr.) kann man diese explizite Trennung sehen. Er unterscheidet drei Arten von Konstruktionen. Dies sind die Konstruktionen, die mit Hilfe von Geraden und Kreislinien gelöst werden können, also mit Zirkel und Lineal, Konstruktionen, die mit Hilfe von Kegelschnitten gelöst werden können und solche, die mit anderen, komplizierteren Linien, als die bereits erwähnten, gelöst werden können. Diese und weitere geschichtliche Informationen über das Konstruieren mit Zirkel und Lineal finden sich in [1].

Vorausblickend kann man sagen, dass sich für fast zweitausend Jahre diese Beschränkung gehalten hat, und andere Lösungsvorschläge als nicht zufriedenstellend erachtet wurden. Erst später wurden diese Beschränkungen als unnötige Begrenzung gesehen, sogar als „Denkblockade“ interpretiert und man erweiterte das Arsenal an Instrumenten. So hängt also die Lösbarkeit von Konstruktionsaufgaben entscheidend von den vorgegebenen „Spielregeln“ ab, wie etwa in [5] ausführlich beschrieben wird.

Es gibt davon zahlreiche Varianten, wie etwa die Folgenden:

- Mit dem Zirkel allein
- Mit dem Lineal allein
- Mit dem Lineal und einem fest vorgegebenen Kreis
- Mit dem Lineal und einer fest vorgegebenen Parabel
- Mit Zirkel, Lineal und einer fest vorgegebenen Parabel

Bemerkenswert ist, dass bereits mit der letzteren Variante eine Winkeldreiteilung möglich ist. Das kann man sich dadurch erklären, da ein Kreis mit einer Parabel vier Schnittpunkte haben kann. Siehe dazu beispielsweise [2].

Durch neue Theorien konnte im 19. Jahrhundert erst gezeigt werden, dass einige Probleme, an denen viele Mathematiker über zweitausend Jahre arbeiteten, nicht gelöst werden können. Auf diese werden wir etwas später eingehen.

Blicken wir nochmals in die griechische Antike. Wie bereits erwähnt, ist die Quellenlage, besonders vor Euklids Elementen (ca. 300 v. Chr.) sehr ungünstig. Es gibt keine älteren Texte, welche im Original erhalten sind. Die Leistung Euklids besteht vorwiegend im Kompilieren von den damals erhaltenen Arbeiten und im konsequenten axiomatisch- deduktiven Aufbau. Im Hinblick auf die Konstruktionen mit Zirkel und Lineal finden wir in den Elementen folgende Postulate:

1. Man kann von jedem Punkt nach jedem Punkt eine Strecke ziehen.
2. Man kann eine begrenzte gerade Linie zusammenhängend gerade verlängern.
3. Man kann mit jedem Mittelpunkt und Abstand einen Kreis zeichnen.

Es ist anzumerken, dass das in der Schule gängige Verfahren, den Radius in den Zirkel zu nehmen, in einem Punkt einzustecken und den Kreis zu ziehen bei Euklid zunächst nicht vorgesehen war. Der Zirkel kollabiert bei Euklid, wenn man ihn hochhebt. Ebenfalls ist zu beachten, dass das Lineal nur eine Kante ohne Graduierung ist, also ein Messen damit nicht möglich ist. Siehe dazu auch [1].

Als Beispiel für eine Konstruktion mit Zirkel und Lineal, wie es in Euklids Elementen beschrieben wird, betrachten wir die Konstruktion eines regelmäßigen Vielecks, in diesem Fall, ein regelmäßiges Dreieck. Schon der erste Satz der Elemente enthält die Konstruktion eines gleichseitigen Dreiecks. Solche Sätze, welche Konstruktionsaufgaben behandeln, werden traditionsgemäß Probleme genannt, im Unterschied zu Theoremen, die einen Beweis fordern.

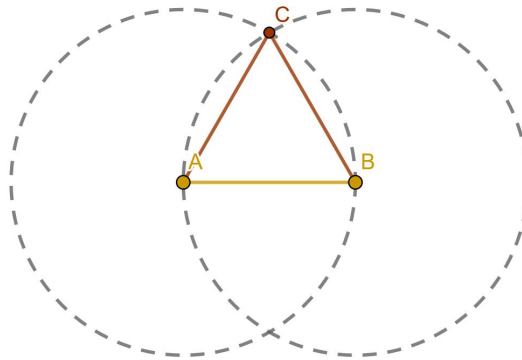
Dieser erste Satz aus [7] lautet:

Satz. [Euklid]

Über einer gegebenen Strecke soll ein gleichseitiges Dreieck errichtet werden.

Konstruktionsbeschreibung:

Die Strecke \overline{AB} sei gegeben. Man soll nun über dieser Strecke \overline{AB} ein gleichseitiges Dreieck errichten. Man zeichne den Kreis mit Mittelpunkt A und Radius \overline{AB} und ebenso den Kreis mit Mittelpunkt B und Radius \overline{AB} . Der erhaltene Schnittpunkt C der beiden Kreise wird mit dem Punkt A zur Strecke \overline{AC} und mit dem Punkt B zur Strecke \overline{BC} verbunden. Damit ist die Konstruktion abgeschlossen.



Anschließend folgt die Verifikation dieser Konstruktionsbeschreibung, also dass die beschriebene Konstruktion wirklich das Gewünschte liefert.

Da Punkt A Mittelpunkt des Kreises $\circ AB$ ist, ist $\overline{AC} = \overline{AB}$ (laut Definition des Kreises: Ein Kreis ist eine ebene, von einer einzigen Linie umfasste Figur mit der Eigenschaft, dass alle von einem innerhalb der Figur gelegenen Punkt bis zur Linie laufenden Strecken einander gleich sind). Ebenso, da B Mittelpunkt des Kreises $\circ BA$ ist, ist $\overline{BC} = \overline{AB}$. Also ist auch $\overline{AC} = \overline{BC} = \overline{AB}$.

In der Schlussfolgerung schreibt Euklid: Also ist das Dreieck $\triangle ABC$ gleichseitig und es ist über der gegebenen Strecke \overline{AB} errichtet – dies hatte man auszuführen. Quod erat faciendum – was zu leisten war. Dies war die typische Schlussbemerkung Euklids für Probleme. Bei Theoremen verwendete er „Quod erat demonstrandum“ – was zu beweisen war. Für diese und weitere Konstruktionen in Euklids Elementen siehe auch [1].

Weitere interessante Sätze in Euklids Elemente bezüglich Konstruktionen mit Zirkel und Lineal sind die Sätze neun bis zwölf, in welchen die sogenannten Grundkonstruktionen behandelt werden. Diese sind:

1. Konstruktion der Winkelhalbierenden,
2. Konstruktion der Mittelsenkrechten,
3. Konstruktion der Senkrechten auf einer Strecke in einem vorgegebenen Punkt,
4. Konstruktion des Lotes von einem Punkt auf eine Gerade.

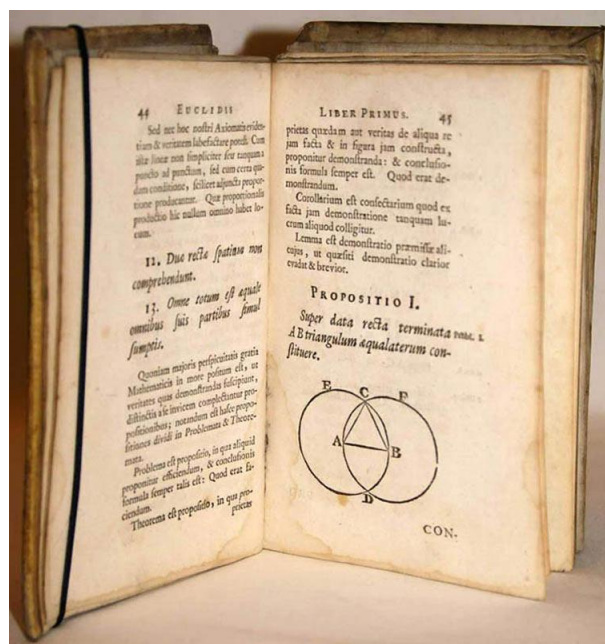


Abbildung 1: Euklids Elemente

Diese Grundkonstruktionen finden wir heute noch in der Schulgeometrie. Deshalb soll im nächsten Kapitel auf diese näher eingegangen werden.

Konstruktionen im Schulunterricht

Konstruktionen mit Zirkel und Lineal gehören zum Basiswissen jeden Geometrieunterrichts. Den Umgang mit Zirkel und Lineal lernen die Schüler in der ersten und zweiten Klasse der allgemeinbildenden höheren Schulen in Österreich. Der Lehrplan sieht beispielsweise vor, dass Schüler der ersten Klasse Zeichengeräte zum Konstruieren von Rechtecken, Kreisen und Schrägrissen gebrauchen lernen und in der zweiten Klasse Konstruktionen von Strecken- und Winkelsymmetralen durchführen können. Ebenfalls darf nicht außer Acht gelassen werden, dass in einigen Schultypen zusätzlich noch das Unterrichtsfach Geometrisches Zeichnen angeboten wird, in welchem Konstruktionen mit Zirkel und Lineal noch ausführlicher behandelt werden. Um die genauen Lehrinhalte an Österreichs Schulen nachzulesen, siehe [18].

Damit der Bezug dieses Themas auch zur Schule deutlich wird, sollen in diesem Kapitel einige Inhalte in Bezug zu Konstruktionen mit Zirkel und Lineal im Schulunterricht angeführt werden. Wir präzisieren zunächst, wie in [6], welche Schritte Schüler dabei durchführen dürfen:

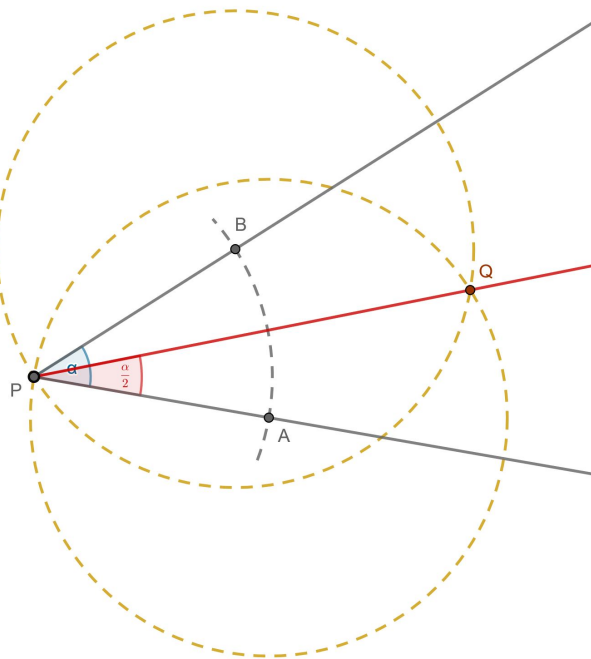
- Beliebigen Punkt zeichnen.
- Beliebigen Punkt auf einer Geraden, Strecke oder Kreislinie zeichnen.
- Gerade durch zwei Punkte zeichnen.
- Zwei Punkte durch eine Strecke verbinden.
- Schnittpunkte von Geraden, Strecken und Kreislinien zeichnen.
- Kreis um einen gegebenen Mittelpunkt durch einen weiteren Punkt zeichnen.
- Kreis um einen gegebenen Mittelpunkt mit einem Radius zeichnen, der von zwei schon konstruierten Punkten übernommen werden kann.

Vorausschauend soll bemerkt werden, dass im Gegensatz zu eben aufgezählten Konstruktionsschritten, Faltungen in der Schule fast keinen bis keinen Einzug gefunden haben, obwohl sie beispielsweise als Vorstufe der Spiegelungen an einer Geraden gesehen werden können. Mit Nadel und Papier lassen sich für Schüler auf praktische Weise zahlreiche wertvolle Erkenntnisse gewinnen, die mit anderem bereits erworbenem Wissen verwoben werden können. So können verschiedene geometrische Figuren, Senkrechte, parallele Geraden und deren Eigenschaften untersucht werden, aber auch schwierigere Sachverhalte optisch visualisiert und oft besser verstanden werden. Wie sich Faltungen speziell im Schulunterricht einsetzen lassen könnten, soll im zweiten Teil der Diplomarbeit behandelt werden. Gehen wir nun auf einige Grundkonstruktionen mit Zirkel und Lineal des Geometrieunterrichts ein, wobei ich mich im Folgenden auf [3] beziehe. Wir werden sehen, dass all diese Konstruktionen relativ einfach zu konstruieren sind und die Begründungen immer über Eigenschaften von Dreiecken oder Rauten geführt werden. Diese sollten deshalb als schon bekannt vorausgesetzt werden.

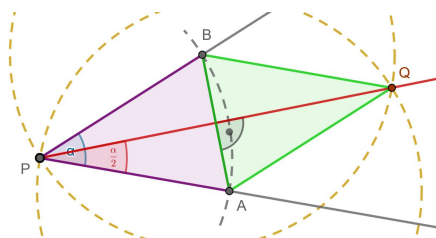
1. Konstruktion einer Winkelhalbierenden

Gegeben sind zwei sich schneidende Geraden und ein dadurch gegebener beliebiger Winkel. Dieser soll halbiert werden.

Konstruktion: Durch den Schnittpunkt P der beiden Geraden wird ein beliebiger Kreisbogen geschlagen, welcher die Geraden in A und B schneidet. Mit dem selben Radius wird je um A und in B ein Kreisbogen geschlagen, so dass der neue Schnittpunkt dieser beiden Kreisbögen Q entsteht. Die Gerade durch P und Q halbiert den Winkel $\angle(PA, PB)$.

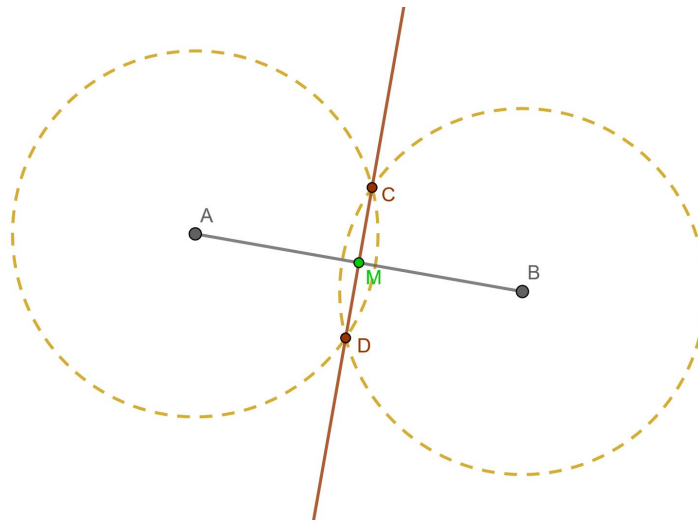


Begründung: Die Punkte P , A und B bilden ein gleichschenkliges Dreieck mit der Basis \overline{AB} . Ebenso bildet Q , B und A ein gleichschenkliges Dreieck mit Basis \overline{AB} . Q ist also Faltungspunkt von P zur Faltachse \overline{AB} . Die Gerade \overline{PQ} geht also durch den Punkt P und steht senkrecht auf \overline{AB} und teilt somit den Winkel in zwei gleiche Teile (Eigenschaft der Höhe von gleichschenkligen Dreiecken).

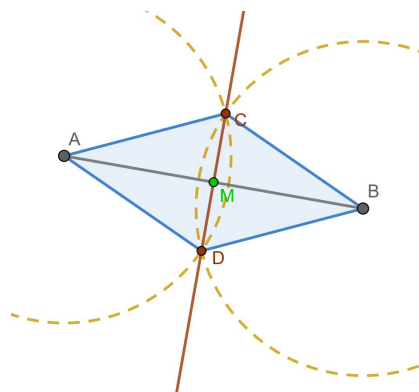


2. **Mittelpunkt einer Strecke (Mittelsenkrechte) zu einer Strecke**
 Gegeben ist eine Strecke \overline{AB} und gesucht ist eine senkrechte Gerade darauf, welche diese im Mittelpunkt schneidet.

Konstruktion: Um die Punkte A und B werden mit dem Zirkel zwei gleich große Kreisbögen geschlagen, die sich in zwei Punkten C und D schneiden. Die Gerade \overline{CD} schneidet die Strecke \overline{AB} dann im Mittelpunkt M dieser Strecke.



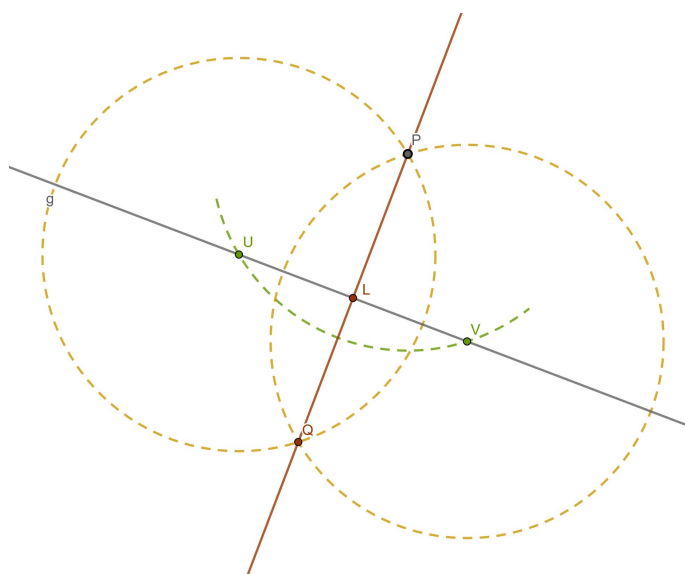
Begründung: Die Punkte C und D haben die selben Abstände zu A und B , da die Radien der Kreise gleich sind. Deshalb sind die Dreiecke $\triangle ABC$ und $\triangle ABD$ gleichschenkelig und kongruent mit Höhe \overline{MC} bzw. \overline{MD} . Das Viereck $\square ACBD$ ist eine Raute und die Diagonalen einer Raute halbieren sich einander.



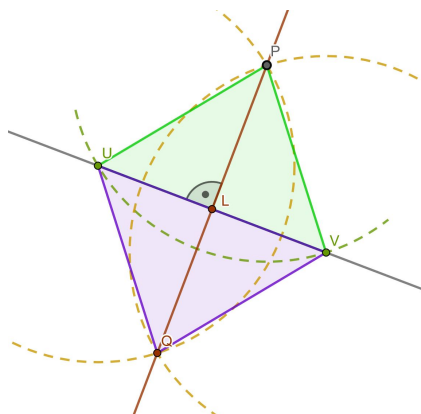
3. Fällen eines Lots auf eine Gerade

Gegeben ist eine Gerade g (bzw. Strecke) und ein Punkt P , welcher nicht auf dieser Geraden liegt. Gesucht ist eine Senkrechte Gerade zur gegebenen Geraden, welche durch den Punkt P verläuft.

Konstruktion: Mit dem Zirkel wird im Punkt P eingestochen und ein Kreisbogen gezogen, welcher die Gerade g in zwei Punkten U und V schneidet. Mit dem selben Radius werden um U und V Kreisbögen geschlagen, die sich im Punkt Q schneiden. Die Lotgerade entsteht, indem man durch den Punkt P und Q eine Gerade zieht. Der Lotfußpunkt L ist der Schnittpunkt, der Lotgeraden mit g .



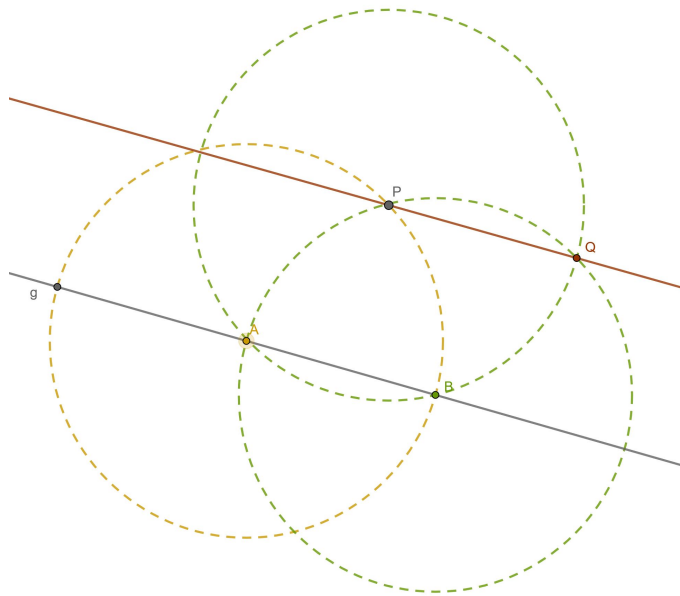
Begründung: Die Punkte U und V bilden mit dem Punkt P ein gleichschenkeliges Dreieck. Das Dreieck $\triangle UQV$ ist das davon gespiegelte Dreieck. L ist dabei der Mittelpunkt der Strecke \overline{UV} , da sich die Diagonalen der Raute einander halbieren. L heißt dann Lotfußpunkt und die Gerade durch P und Q steht senkrecht auf g .



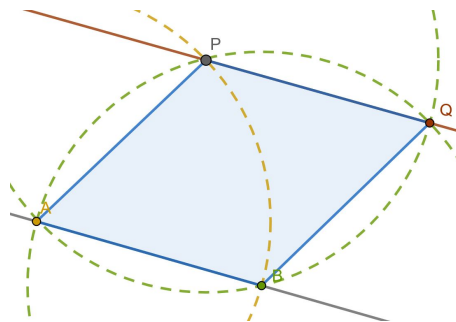
4. Parallele durch einen Punkt außerhalb einer Geraden

Gegeben ist eine Gerade g (bzw. Strecke) und ein Punkt P , welcher nicht auf dieser Geraden liegt. Gesucht ist eine parallele Gerade zur gegebenen Geraden g , welche durch den Punkt P verläuft.

Konstruktion: Auf der Geraden g wird ein Punkt A frei gewählt und ein Kreisbogen mit Radius $|\overline{AP}| = r$ wird um den Punkt A geschlagen. Der Kreisbogen schneidet dann die Gerade g in B . Um P und B wird jeweils ein weiterer Kreisbogen mit Radius r geschlagen und man erhält so den Schnittpunkt Q . Die Gerade durch P und Q ist dann parallel zur Geraden g .



Begründung: Durch die Konstruktion entsteht die Raute $\square ABQP$, dessen Eigenschaft es ist, dass gegenüberliegende Seiten parallel sind. Also sind auch die verlängerten Geraden parallel.



Diese eben besprochenen Grundkonstruktionen dienen als Grundlage für kompliziertere Konstruktionen und finden deshalb häufig Anwendung, wie wir in späteren Beispielen auch sehen werden.

Die vier klassischen Konstruktionsprobleme

Im folgenden Abschnitt wollen wir uns mit den zu Beginn genannten Konstruktionsproblemen mit Zirkel und Lineal beschäftigen. Wir wissen bereits, dass diese Probleme viele Mathematiker von der Antike bis in die Neuzeit beschäftigt haben, wobei die Beweise über ihre Lösbarkeit erst im letzten Jahrhundert erbracht wurden. Wir wollen uns nun schrittweise erarbeiten, welche genannten Konstruktionsprobleme nun lösbar sind, und welche nicht. Ich werde mich im Folgenden größtenteils an die Ausführungen von [4] und [2] sowie [8] anlehnen.

Um nun diese Konstruktionsprobleme mathematisch zu untersuchen, müssen wir die Fragestellungen in die Sprache der Mathematik, in diesem Fall der Algebra, übersetzen.

Sei nun $P_0 \subseteq \mathbb{R}^2$ eine Punktmenge. Betrachten wir dazu unsere zwei Operationen:

1. Durch zwei Punkte aus P_0 wird eine Gerade gezogen. Es ist zu beachten, dass hier keine Abstände fester Längen abgetragen werden können, da das Lineal keine Einteilung besitzt.
2. Ein Kreis wird um einen Punkt aus P_0 gezogen. Der Radius ist dabei der Abstand von zwei Punkten aus P_0 .

Wir wollen nun definieren, wann wir Punkte als konstruierbar bezeichnen.

Definition. [*Konstruierbar*]

Sei $P_0 \subseteq \mathbb{R}^2$ eine Punktmenge.

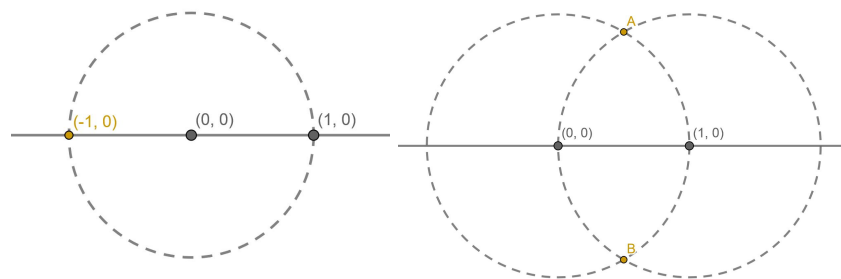
- a) Die Schnittpunkte von Geraden und Kreisen, die aus obigen Operationen konstruiert werden, nennen wir im ersten Schritt aus P_0 konstruierbare Punkte.
- b) Sei $r \in \mathbb{R}^2$. r wird von P_0 aus konstruierbar genannt, falls es eine Kette von Punkten $r_1, r_2, \dots, r_n = r$ gibt, so dass jedes $r_i, i = 1, \dots, n$ im ersten Schritt aus der Punktmenge $P_0 \cup \{r_1, \dots, r_{i-1}\}$ konstruierbar ist.
- c) Mit K_0 bezeichnen wir den Unterkörper von \mathbb{R} , der durch die Koordinaten der Punkte von P_0 erzeugt wird.
- d) Sei $r_1, \dots, r_n = r$ und $r_i = (x_i, y_i)$ im ersten Schritt aus $P_0 \cup \{r_1, \dots, r_{i-1}\}$ konstruierbar. Dann setze

$$K_i = K_{i-1}(x_i, y_i), i = 1, \dots, n.$$

Durch d) erhalten wir eine Kette von Körpern $K_0 \subseteq K_1 \subseteq \dots \subseteq K_n \subseteq \mathbb{R}$, welche die einzelnen Schritte der Konstruktion von r widerspiegelt.

Sehen wir uns dies an einem Beispiel an. Die Menge P_0 muss mindestens zwei Punkte enthalten, da wir sonst unsere zwei Operationen nicht durchführen können. Wählen wir nun $P_0 = \{(0, 0), (1, 0)\}$ als Startmenge. Wir können nun unsere zuvor definierten Operationen anwenden um dadurch weitere Punkte zu konstruieren.

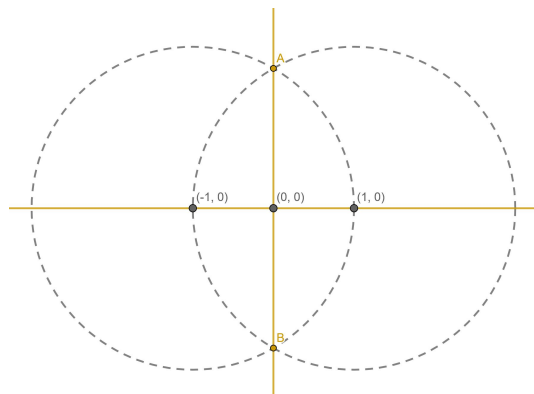
Wir sehen, dass wir den Punkt $(-1, 0)$ erhalten können, indem wir die Gerade durch die Punkte $(0, 0)$ und $(1, 0)$ mit dem Kreis mit Mittelpunkt $(0, 0)$ und Radius 1 schneiden. Also ist der Punkt $(-1, 0)$ im ersten Schritt aus P_0 konstruierbar. Wir können auch die Kreise mit Mittelpunkt $(0, 0)$ und $(1, 0)$ mit den jeweiligen Radien 1 schneiden und erhalten die Punkte A und B , welche also ebenfalls im ersten Schritt aus P_0 konstruierbar sind.



Wir können also drei elementare Konstruktionsschritte unterscheiden:

- Typ 1) Schnitt von zwei nicht identischen Geraden (höchstens einen Schnittpunkt)
- Typ 2) Schnitt von einer Geraden mit einem Kreis (höchstens zwei Schnittpunkte)
- Typ 3) Schnitt zweier nicht identischer Kreise (höchstens zwei Schnittpunkte)

Somit wird P_0 in jedem elementaren Konstruktionsschritt um höchstens zwei Punkte erweitert. Natürlich ist alles davon abhängig, welche Startmenge P_0 gewählt wird. Im Folgenden werden wir aber stets annehmen, dass $(0, 0)$ und $(1, 0)$ in P_0 enthalten sind. Dadurch sind die Koordinatenachsen zum Konstruieren neuer Punkte verwendbar. Wir können zum Beispiel aus $P_0 \cup \{(-1, 0)\}$ die Punkte A und B erhalten und haben dann mit den Geraden durch $(0, 0)$ und $(1, 0)$ sowie durch $(0, 0)$ und A die Koordinatenachsen konstruiert. Es ist jedoch zu beachten, dass durch die Konstruktion der Koordinatenachsen nicht alle Punkte auf dieser Geraden konstruierbar sind!

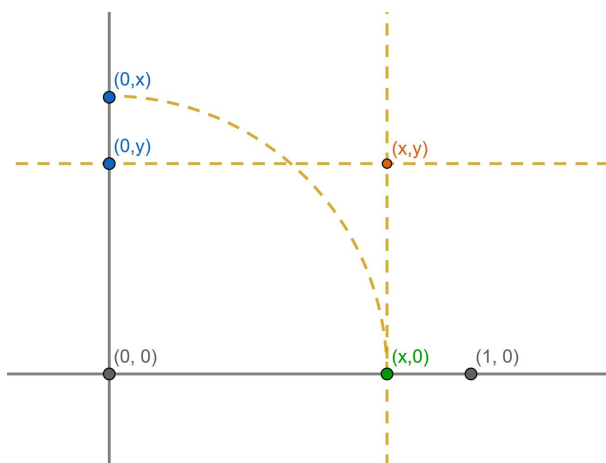


Im Weiteren wollen wir uns die Frage stellen, welche Koordinaten Punkte haben dürfen, um konstruierbar zu sein. Dazu folgendes Lemma.

Lemma (1).

Sei $P_0 \subseteq P \subseteq \mathbb{R}^2$. Dann ist (x, y) genau dann aus P konstruierbar, wenn $(0, x)$ und $(0, y)$ aus P konstruierbar sind.

Beweis. Wie vorhin schon beschrieben, können wir aus den Punkten $(0, 0)$ und $(1, 0)$ die Koordinatenachsen konstruieren. Ist nun (x, y) gegeben, so ist es uns möglich, die Parallelen durch diesen Punkt (siehe Kapitel 2) zu den Koordinatenachsen zu konstruieren. Somit können $(0, x)$ und $(0, y)$ konstruiert werden, nachdem $(x, 0)$ auf die y - Achse übertragen wurde. Sind umgekehrt $(0, x)$ und $(0, y)$ gegeben, so können wir zunächst $(x, 0)$ konstruieren. Dann erhalten wir (x, y) indem wir den Schnittpunkt der Senkrechten (siehe Kapitel 2) durch $(x, 0)$ und $(0, y)$ bilden.



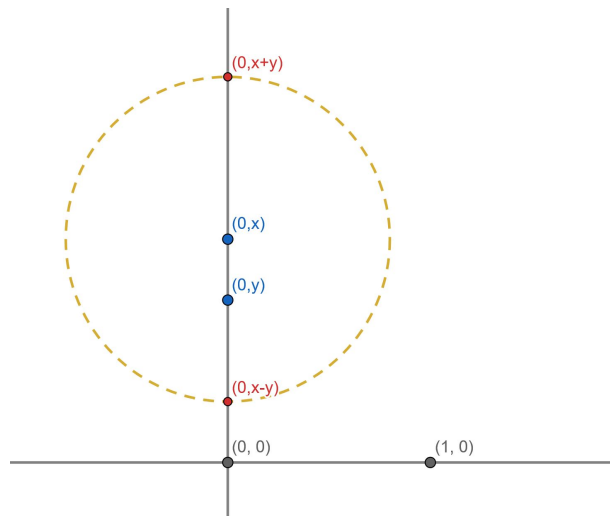
□

Lemma (2).

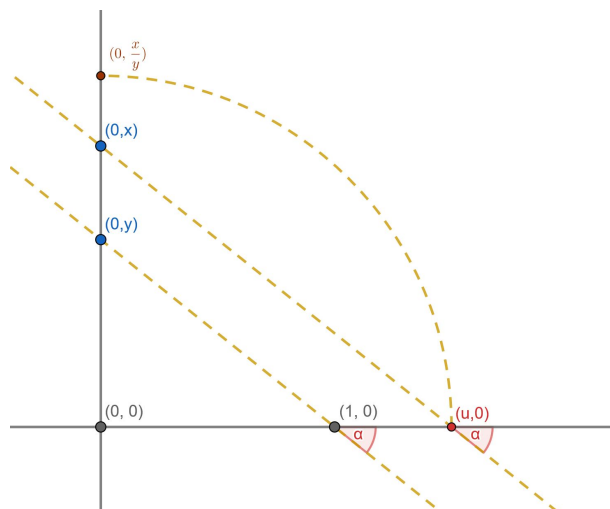
Sei $P_0 \subseteq P \subseteq \mathbb{R}^2$. Sind $(0, x)$ und $(0, y)$ aus P konstruierbar, so sind auch die Punkte $(0, x \pm y)$, $(0, xy)$ und $(0, \frac{x}{y})$ mit $y \neq 0$ konstruierbar.

Beweis.

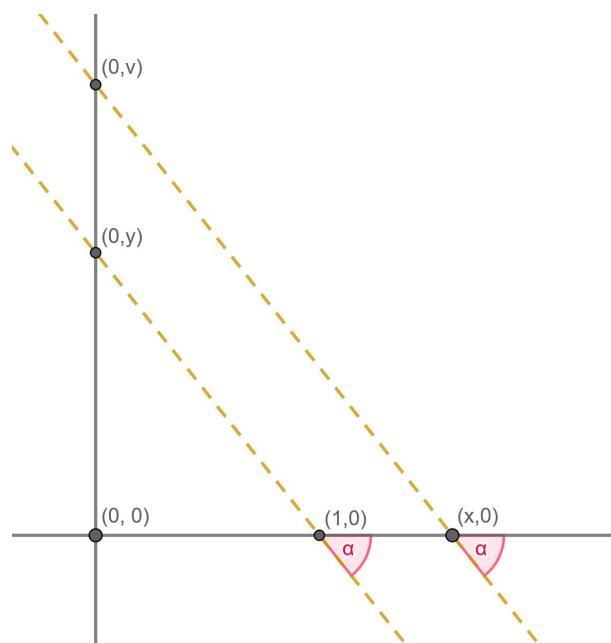
- Wir konstruieren den Kreis um $(0, x)$ mit Radius $\overline{0y}$. Dieser Kreis schneidet die y -Achse im Punkt $(0, x + y)$ sowie im Punkt $(0, x - y)$. Somit sind $(0, x \pm y)$ konstruierbar.



- Sei nun $y \neq 0$. Wir ziehen die Gerade durch die Punkte $(0, y)$ mit $(1, 0)$. Anschließend zeichnen wir die Parallele zu dieser Geraden durch den Punkt $(0, x)$. So erhalten wir den Schnittpunkt $(u, 0)$ mit der x -Achse. Aus der Definition des Tangens folgt, dass $\frac{x}{u} = \tan(\alpha)$. Da die Winkel zwischen der x -Achse und den jeweiligen Parallelen identisch sind folgt $\frac{x}{u} = \frac{y}{1}$, also $u = \frac{x}{y}$. Folglich ist $(0, \frac{x}{y})$ konstruierbar.



- Um $(0, xy)$ zu konstruieren, können wir wie vorher zwei ähnliche, rechtwinklige Dreiecke konstruieren. Das erste Dreieck entsteht durch die Eckpunkte $(0, 0), (0, y), (1, 0)$. Das zweite Dreieck hat als Eckpunkte $(0, 0)$ und $(x, 0)$, wobei wir den dritten Punkt erhalten, indem wir die Parallele zur Hypotenuse des ersten Dreiecks durch den Punkt $(x, 0)$ legen. Den Schnittpunkt dieser mit der y -Achse bezeichnen wir mit $(0, v)$. Durch die Ähnlichkeit dieser Dreiecke gilt dann $v = x * y$ und wir haben den Punkt $(0, x * y)$ konstruiert.



□

Lemma (3).

Sei $P_0 \subseteq \mathbb{R}^2$ mit $(0, 0)$ und $(1, 0) \in P_0$. Sind $x, y \in K_0$, so ist (x, y) aus P_0 konstruierbar.

Beweis. Wir folgern die Behauptung aus den Lemmas (1) und (2). Wir setzen also dort $P = P_0$. Sei zunächst $(x, y) \in P_0$. Nach Lemma (1) ist dann $(0, x)$ und $(0, y)$ aus P_0 konstruierbar. K_0 wird aus den Koordinaten der Punkte aus P_0 erzeugt. Nach Lemma (2) sind also alle $(0, k)$ mit $k \in K_0$ aus P_0 konstruierbar. Nach Lemma (1) wiederum sind also alle (x, y) mit $x, y \in K_0$ aus P_0 konstruierbar.

□

Der durch die Koordinaten 0 und 1 erzeugte Körper K_0 enthält stets \mathbb{Q} . Also sind alle Punkte mit rationalen Koeffizienten konstruierbar. Mit dem nächsten Lemma stellen wir einen Zusammenhang mit algebraischen Körpererweiterungen her.

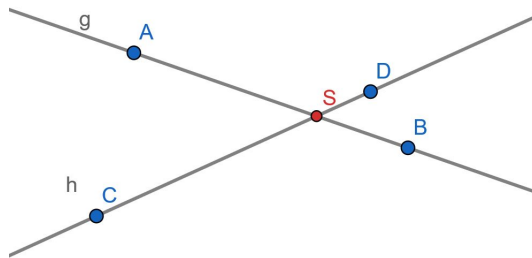
Lemma (4).

Sei $P_0 \subseteq \mathbb{R}^2$ und $r = (x, y)$ im ersten Schritt aus P_0 konstruierbar. Dann sind sowohl x als auch y Nullstellen von höchstens quadratischen Polynomen mit Koeffizienten in K_0 .

Beweis. Wie bereits erwähnt, treten bei Konstruktionen mit Zirkel und Lineal drei Arten von Schnittpunkten auf. Wir unterscheiden:

1. r entsteht als Schnittpunkt zweier Geraden.
2. r entsteht als Schnittpunkt eines Kreises mit einer Geraden.
3. r entsteht als Schnittpunkt zweier Kreise.

zu 1) Wir betrachten die Gerade g durch die Punkte $A = (a_1, a_2)$ und $B = (b_1, b_2)$ sowie die Gerade h durch die Punkte $C = (c_1, c_2)$ und $D = (d_1, d_2)$. Auch sei $\{a_1, a_2, b_1, b_2, c_1, c_2, d_1, d_2\} \in K_0$.



Wir bestimmen die Geradengleichung von g und h . Für die Gerade g gilt:

$$\frac{y - a_2}{x - a_1} = \frac{b_2 - a_2}{b_1 - a_1}$$

Ebenso gilt für die Gerade h :

$$\frac{y - c_2}{x - c_1} = \frac{d_2 - c_2}{d_1 - c_1}$$

Stellen wir beide Gleichungen nach y frei und setzen sie gleich, so erhalten wir für den Schnittpunkt (x -Koordinate):

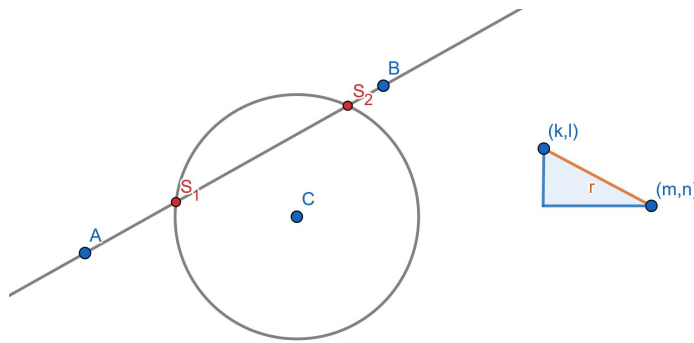
$$\frac{b_2 - a_2}{b_1 - a_1} \cdot (x - a_1) + a_2 = \frac{d_2 - c_2}{d_1 - c_1} \cdot (x - c_1) + c_2$$

Somit ist x Nullstelle eines linearen Polynoms und die Koeffizienten liegen offensichtlich alle in K_0 . Stellen wir die Gleichungen nach x um und setzen sie gleich, so erhalten wir für den Schnittpunkt (y -Koordinate):

$$\frac{y - a_2}{b_2 - a_2} \cdot (b_1 - a_1) + a_1 = \frac{y - c_2}{d_2 - c_2} \cdot (d_1 - c_1) + c_1$$

und sehen, dass ebenso y Nullstelle eines linearen Polynoms mit Koeffizienten in K_0 ist.

- zu 2) Wir betrachten die Gerade durch die Punkte $A = (a, b)$ und $B = (c, d)$ und den Kreis, welcher durch den Mittelpunkt $C = (t, s)$ und Radius r gegeben ist. Den Radius erhalten wir durch den Abstand zwischen den Punkten (k, l) und (m, n) . Weiters sei $\{a, b, c, d, t, s, k, l, m, n\} \in K_0$.



Mit dem Satz des Pythagoras erhalten wir

$$(m - k)^2 + (l - n)^2 = r^2 \in K_0$$

Den Kreis können wir mit folgender Gleichung darstellen:

$$(x - t)^2 + (y - s)^2 = r^2$$

Die Gerade können wir wie im Fall vorhin, mit folgender Gleichung darstellen:

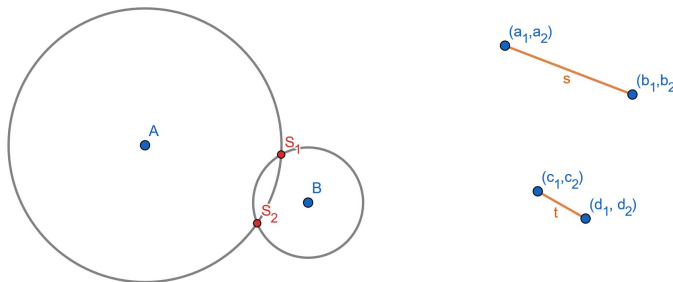
$$y = \frac{(d - b)}{(a - c)} \cdot (x - c) + b$$

Das liefert für den Schnittpunkt (x -Koordinate):

$$(x - t)^2 + \left(\frac{(d - b)}{(a - c)} \cdot (x - c) + (b - s) \right)^2 = r^2$$

Wir sehen, dass somit x Nullstelle einer quadratischen Gleichung, also eines quadratischen Polynoms ist. Ebenso ist y Nullstelle eines quadratischen Polynoms, wenn wir die Geradengleichung nach x auflösen und in die Kreisgleichung einsetzen.

zu 3) Wir betrachten nun zwei Kreise mit nicht identischen Mittelpunkten $A = (a, b)$ und $B = (c, d)$ und Radien r und s , welche sich durch die Abstände zwischen den Punkten $(e_1, e_2) \neq (f_1, f_2)$ und $(k_1, k_2) \neq (l_1, l_2)$ ergeben.



Wir können die Kreise erneut mit folgenden Gleichungen darstellen:

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2; \quad (x - c)^2 + (y - d)^2 = s^2$$

Wir quadrieren beide Kreisgleichungen aus und subtrahieren die eine Gleichung von der anderen und erhalten für x :

$$x = \frac{2by - 2dy + a^2 + b^2 - c^2 - d^2 - r^2 + s^2}{2c - 2a}$$

und für y :

$$y = \frac{2ax - 2cx + a^2 + b^2 - c^2 - d^2 - r^2 + s^2}{2d - 2b}$$

Setzen wir dann in eine der Kreisgleichungen für x bzw. y ein, erhalten wir eine quadratische Gleichung, wobei auch alle Koeffizienten in K_0 liegen.

□

Würden uns bei solchen Konstruktionen neben Gerade und Kreis auch Kurven wie Ellipsen, Parabeln oder Hyperbeln zur Verfügung stehen, so würden wir bis zu vier Schnittpunkte erhalten können, also Polynome bis zum Grad vier erhalten. Allgemein können zwei Kurven vom Grad m und n bis zu $m \cdot n$ Schnittpunkte besitzen.

Im nächsten Schritt benötigen wir einige Inhalte über Algebra, die wir hier nicht beweisen, aber zur Erinnerung anführen.

Satz (W1). [8]

Es seien $k \subseteq K \subseteq L$ Körpererweiterungen. Dann gilt:

$$[L : k] = [L : K] \cdot [K : k]$$

Satz (W2). [8]

Es sei $k \subseteq K$ eine Körpererweiterung und $a \in K$ algebraisch über k . Dann gilt:

$$[k(a) : k] = \text{gr}(\text{Min}(a, k))$$

Satz (1).

Sei $P_0 \subseteq \mathbb{R}^2$ und sei $r = (x, y)$ aus P_0 konstruierbar. Dann sind $[K_0(x) : K_0]$ und $[K_0(y) : K_0]$ 2-er Potenzen.

Beweis. Wir betrachten nun eine Kette von Punkten im \mathbb{R}^2 , welche wir mit $r_1, r_2, \dots, r_n = r$ bezeichnen. Dabei soll $r_i = (x_i, y_i)$ im ersten Schritt aus $P_0 \cup \{r_1, r_2, \dots, r_{i-1}\}$ konstruierbar sein. K_i soll der Unterkörper von \mathbb{R} sein, welcher durch die jeweiligen Koordinaten der Punkte der Menge $P_0 = \{r_1, r_2, \dots, r_i\}$ erzeugt wird. Nach Lemma (4) haben die x_i ein Minimalpolynom höchstens vom Grad zwei über K_{i-1} . Nach Satz (W2) schließen wir

$$[K_{i-1}(x_i) : K_{i-1}] = 1 \text{ oder } 2 \text{ bzw. } [K_{i-1}(y_i) : K_{i-1}] = 1 \text{ oder } 2$$

Aus Satz (W1) folgt dann

$$\begin{aligned} [K_i : K_{i-1}] &= [K_{i-1}(x_i, y_i) : K_{i-1}] = \\ [K_{i-1}(x_i, y_i) : K_{i-1}(x_i)] \cdot [K_{i-1}(x_i) : K_{i-1}] &= 1, 2 \text{ oder } 4. \end{aligned}$$

Dies bedeutet, dass $[K_i : K_{i-1}]$ eine 2-er Potenz sein muss. Wenden wir Satz (W1) nochmals an, so sehen wir, dass

$$[K_n : K_0] = [K_n : K_{n-1}] \cdot [K_{n-1} : K_{n-2}] \cdot \dots \cdot [K_1 : K_0]$$

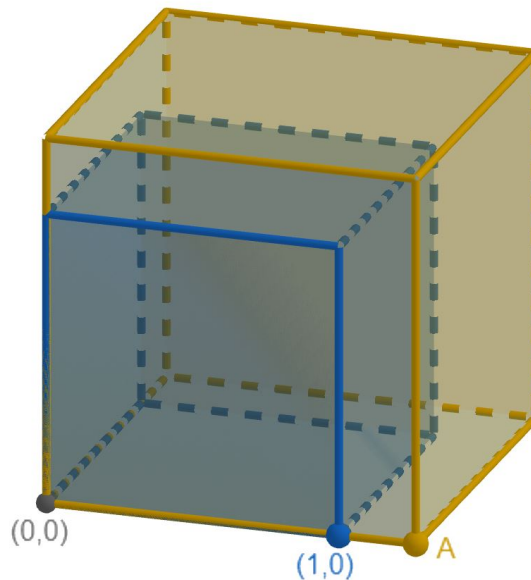
ist, und folglich $[K_n : K_0]$ eine 2-er Potenz ist. Da

$$\begin{aligned} [K_n : K_0(x)] \cdot [K_0(x) : K_0] &= [K_n : K_0] \text{ sowie} \\ [K_n : K_0(y)] \cdot [K_0(y) : K_0] &= [K_n : K_0] \end{aligned}$$

ist, sind wie im Satz behauptet, $[K_0(x) : K_0]$ und $[K_0(y) : K_0]$ 2-er Potenzen. □

Mit Hilfe dieses Satzes können wir nun bereits zeigen, welche Konstruktionen nicht konstruierbar sind. Beginnen wir mit dem Problem der Verdopplung des Würfels. Es genügt, wenn wir den Einheitswürfel mit Kantenlänge $a = 1$ und $V = a^3 = 1$ betrachten. Wir sollen durch die gegebenen Daten, also $P_0 = \{(0, 0), (1, 0)\}$, die Seitenlänge eines Würfels mit doppeltem Volumen konstruieren. Das heißt, ist es uns möglich $\sqrt[3]{2}$ aus unseren Anfangsdaten zu konstruieren?

Satz (2). Die Verdoppelung des Würfels ist mit Zirkel und Lineal nicht möglich.



Beweis. Wie bereits erwähnt, soll aus den gegebenen Anfangsdaten $P_0 = \{(0, 0), (1, 0)\}$ zunächst ein Würfel mit einer Ecke im Punkt $(0, 1)$ konstruiert werden und anschließend ein weiterer Würfel mit einer Ecke im Punkt $(0, \sqrt[3]{2}) = A$. Das bedeutet, dass der Punkt A aus $P_0 = \{(0, 0), (1, 0)\}$ konstruiert werden soll. Wir wissen $K_0 = \mathbb{Q}$. Wenn A konstruierbar ist, so muss nach Satz (1) $[\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}) : \mathbb{Q}]$ eine 2-er Potenz sein. Das Minimalpolynom $\text{Min}(\sqrt[3]{2}, \mathbb{Q}) = x^3 - 2$ hat aber Grad drei, was bedeutet, dass nach Satz (W2)

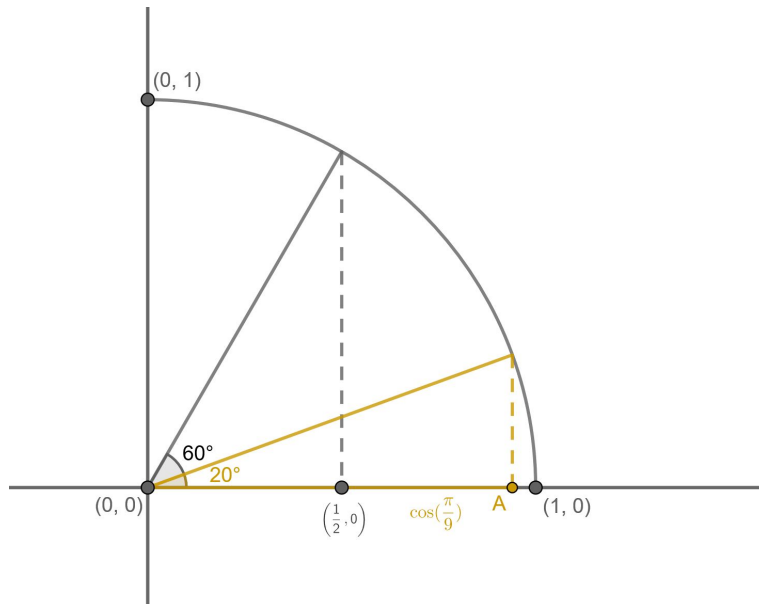
$$[\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}) : \mathbb{Q}] = 3$$

ist. Dies ist aber ein Widerspruch, also ist A nicht konstruierbar.

□

Widmen wir uns nun dem zweiten Konstruktionsproblem, nämlich ob sich ein Winkel im Allgemeinen dreiteilen lässt. Betrachten wir dazu einen Winkel von $60^\circ = \frac{\pi}{3}$.

Satz (3). Ein Winkel von 60° kann mit Zirkel und Lineal nicht gedreiteilt werden.



Beweis. Wenn wir, wie in der obigen Abbildung, einen Winkel von 60° am Einheitskreis konstruieren wollen, so müssen wir den Punkt $(\cos(\frac{\pi}{3}), 0) = (\frac{1}{2}, 0) \in P_0$ konstruieren. Wenn wir nun diesen Winkel dreiteilen wollen, so muss auch der Punkt $A = (\cos(\frac{\pi}{9}), 0)$ konstruiert werden können. Kann dieser Punkt konstruiert werden, somit sicher auch der Punkt $B = (x, 0)$ mit $x = 2 \cos(\frac{\pi}{9})$. Nach Satz (1) muss also $[\mathbb{Q}(x) : \mathbb{Q}]$ einer 2-er Potenz sein. Mit Hilfe der trigonometrischen Formel

$$\cos 3\beta = 4 \cos^3 \beta - 3 \cos \beta$$

erhalten wir

$$\cos(\frac{\pi}{3}) = 4 \cos^3(\frac{\pi}{9}) - 3 \cos(\frac{\pi}{9}).$$

Durch Substitution von $x = 2 \cos(\frac{\pi}{9})$ erhalten wir

$$\frac{1}{2} = \frac{1}{2}x^3 - \frac{3}{2}x$$

und anschließend

$$x^3 - 3x - 1 = 0$$

Da nun ± 1 keine Nullstellen von $x^3 - 3x - 1 = 0$ sind, da $p(1) = -3 \neq 0$ und $p(-1) = 1 \neq 0$ ist, folgt nach dem Satz über rationale Nullstellen eines ganzzahligen Polynoms, siehe dazu [20], dass das Polynom keine rationalen Nullstellen besitzt und somit $x^3 - 3x - 1 = 0 \in \mathbb{Q}[x]$ irreduzibel in \mathbb{Q} ist. Demnach gilt nach Satz (W2), dass $[\mathbb{Q}(x) : \mathbb{Q}] = 3$ ist. Somit ist der Punkt $(x, 0)$, sowie Punkt $A = (\cos(\frac{\pi}{9}), 0)$ nicht konstruierbar.

□

Wir haben also gesehen, dass sich ein Winkel von 60° nicht dreiteilen lässt. Wie sieht es aber mit anderen Winkeln aus? Es kann bei anderen Winkeln vorkommen, dass der Körpergrad eine 2–er Potenz ist. Wir haben bisher gezeigt, dass für alle konstruierbaren Punkte der Körpergrad eine 2–er Potenz ist. Jedoch haben wir noch nicht bewiesen, dass für jeden Körpergrad, welcher eine 2–er Potenz ist auch der jeweilige Punkt konstruierbar ist. Dieser Beweis ist deutlich schwieriger und benötigt ein tieferes Verständnis über Galoistheorie, weshalb wir in dieser Arbeit dies nicht beweisen werden. Für den Beweis siehe [8][S. 100] oder [4][S. 120].

Ist also nun der Körpergrad eine 2–er Potenz, so ist eine Dreiteilung des Winkels möglich. Wollen wir uns dazu ein Beispiel ansehen. Wir möchten den Winkel α mit $\cos(\alpha) = \frac{11}{16}$ in drei gleich große Teile teilen. Wir stellen fest, dass wenn der Punkt $(\cos(\frac{\alpha}{3}), 0)$ konstruierbar ist, auch der Punkt $(x, 0)$ mit $x = 4\cos(\frac{\alpha}{3})$ konstruierbar sein muss und verwenden wie im Beweis folgende Darstellung:

$$\cos(\alpha) = 4\cos^3\left(\frac{\alpha}{3}\right) - 3\cos\left(\frac{\alpha}{3}\right)$$

Wir erhalten dann wieder durch Substitution

$$\frac{11}{16} = \frac{x^3}{16} - \frac{3x}{4}$$

und damit

$$x^3 - 12x - 11 = 0$$

Dieses Polynom ist nicht irreduzibel, denn wir können es faktorisieren in

$$(x + 1) \cdot (x^2 - x - 11) = 0$$

Nun ist $x^2 - x - 11$ irreduzibel in \mathbb{Q} , da ± 1 nicht Nullstellen des Polynoms sind. Das bedeutet nach Satz (W2), dass $[\mathbb{Q}[x] : \mathbb{Q}] = 2$ ist, also eine 2–er Potenz und somit ist x , und damit auch $\cos(\frac{\alpha}{3})$ nach Satz (1) konstruierbar.

Das dritte Problem, mit dem wir uns nun beschäftigen, ist die Quadratur des Kreises. Wie bereits erwähnt, ist damit gemeint, ob es möglich ist, aus einem gegebenen Kreis in endlich vielen Schritten ein dazu flächengleiches Quadrat zu konstruieren. Es genügt dabei wenn wir den Fall eines Kreises vom Radius $r = 1$ betrachten. Zuvor jedoch müssen wir uns überlegen, dass π transzendent über \mathbb{Q} ist, und gehen dabei wie in [9] vor. Dazu benötigen wir den Satz von Lindemann, welchen wir hier ohne Beweis anführen.

Satz (Lindemann).

Seien $A_1, \dots, A_n, a_1, \dots, a_n \in \mathbb{A}$ (algebraisch), mit $a_i \neq a_j$ für $i \neq j$ und $A_i \neq 0$ für alle i , dann gilt:

$$\sum_{i=0}^n A_i e^{a_i} \neq 0.$$

Folgerung. π ist transzendent über \mathbb{Q} .

Beweis. Wir nehmen also an, dass π algebraisch über \mathbb{Q} ist. Somit wäre dann auch $\pi \cdot i$ mit $i = \sqrt{-1}$ algebraisch über \mathbb{Q} , da \mathbb{A} abgeschlossen bezüglich der Multiplikation ist. Nach vorherigem Satz von Lindemann müsste also gelten:

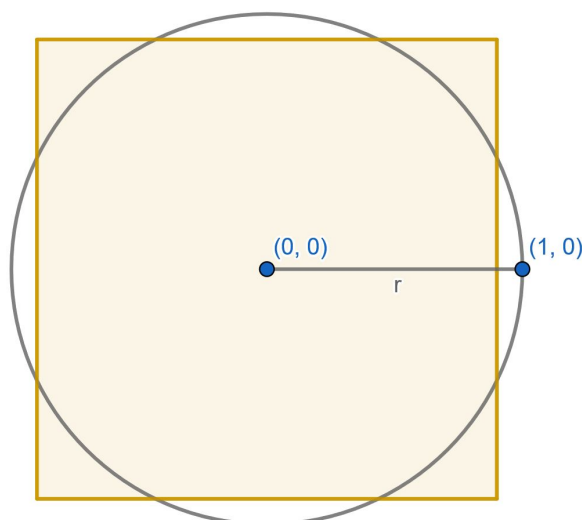
$$e^{\pi \cdot i} + e^0 \neq 0$$

Es ist jedoch $e^{\pi \cdot i} = \cos(\pi) + i \sin(\pi) = -1 + 0 = -1$ und $e^0 = 1$, also

$$e^{\pi \cdot i} + e^0 = 0$$

und deshalb war unsere Annahme, dass π algebraisch ist falsch, also muss π transzendent sein. □

Satz (4). Die Quadratur des Kreises ist mit Zirkel und Lineal nicht möglich.



Beweis. Wir betrachten, wie in der obigen Abbildung, einen Kreis mit Radius $r = 1$. Die Kreisfläche beträgt dann $A_{Kreis} = r^2 \cdot \pi = \pi$. Ein Quadrat mit Flächeninhalt π hat eine Seitenlänge von $\sqrt{\pi}$. Wäre nun $\sqrt{\pi}$ aus P_0 konstruierbar, so auch π . π ist aber, wie vorher gezeigt wurde, transzendent. Also kann $[\mathbb{Q}(\pi) : \mathbb{Q}] = \infty$ keine 2-er Potenz sein. □

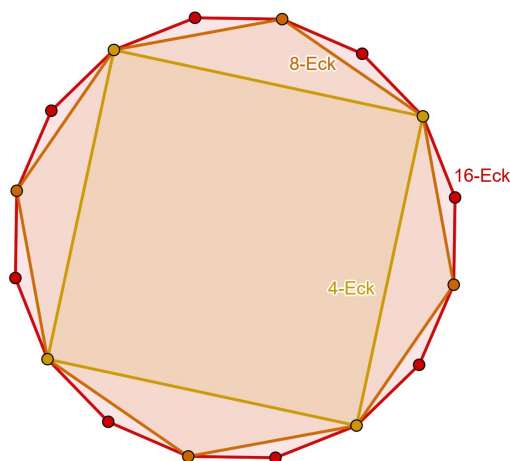
Widmen wir uns nun unserem letzten Konstruktionsproblem, die Konstruktion regelmäßiger Vielecke. Wir haben bisher bereits gesehen, dass das regelmäßige Dreieck und Viereck mit Zirkel und Lineal konstruierbar sind. Auch für regelmäßige Fünfecke und Sechsecke waren schon lange Zeit Konstruktionen bekannt. Dass zum Beispiel das regelmäßige Siebeneck nicht konstruierbar ist,

konnte erstmals Gauss im Alter von neunzehn Jahren begründen. Ebenso fand Gauss heraus, dass es für das regelmäßige Siebzehneck eine Lösung geben muss. Zu dieser Fragestellung müssen wir nun nicht beweisen, dass etwas nicht konstruierbar ist, sondern, was konstruierbar sein wird. Also welche n -Ecke, mit $n \in \mathbb{N}$ konstruierbar sind. Sei im Folgenden $P_0 = \{(0, 0), (1, 0)\}$.

Satz (5). Seien $n, m \in \mathbb{N}$.

- a) Ist das regelmäßige n -Eck konstruierbar, so ist jedes m -Eck konstruierbar, für welche $m \mid n$ gilt.
- b) Sind sowohl das regelmäßige n -Eck als auch das regelmäßige m -Eck konstruierbar, so ist auch das regelmäßige $m \cdot n$ -Eck konstruierbar, wenn $\text{ggT}(n, m) = 1$ ist.

Beweis. a) Wir setzen $l = \frac{n}{m}$. Wenn wir nun jede l -te Ecke des regelmäßigen n -Ecks verbinden, so erhalten wir ein regelmäßiges m -Eck. Im Beispiel: $n = 16$; $m = 8$ bzw. $m = 4$



- b) Sei $\text{ggT}(n, m) = 1$. Damit kann man (zum Beispiel mit dem euklidischen Algorithmus) $a, b \in \mathbb{Z}$ finden, mit $a \cdot m + b \cdot n = 1$. Dies können wir auch schreiben als:

$$\frac{1}{m \cdot n} = a \cdot \frac{1}{n} + b \cdot \frac{1}{m}$$

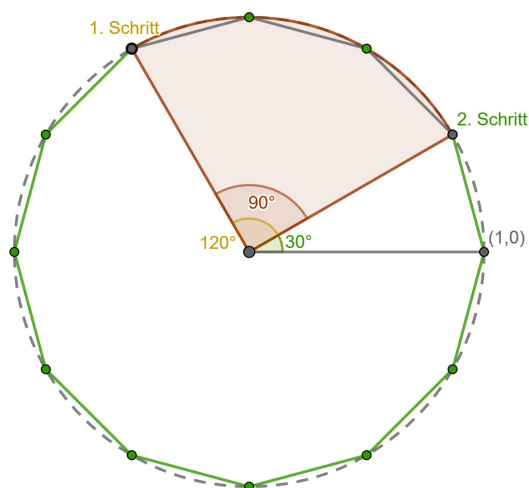
Das bedeutet, dass wir aus den konstruierbaren Winkeln $\frac{360^\circ}{n}$ und $\frac{360^\circ}{m}$, $\frac{360^\circ}{n \cdot m}$ konstruieren können, indem wir die gegebenen Winkel $\frac{360^\circ}{m}$, a -mal und anschließend $\frac{360^\circ}{n}$, b -mal abtragen. Ist das Vorzeichen von a bzw. b positiv oder negativ, so wird im oder gegen den Uhrzeiger abgetragen.

□

Als Beispiel wollen wir ein regelmäßiges 12–Eck konstruieren. Wir wissen, dass das regelmäßige Dreieck und Viereck konstruierbar sind und wählen deshalb: $n = 4, m = 3$; Mit dem euklidischen Algorithmus erhalten wir: $1 = 1 \cdot 4 - 1 \cdot 3$ und daraus

$$\frac{360^\circ}{12} = \frac{360^\circ}{3} - \frac{360^\circ}{4}$$

Wir erhalten nun unseren gesuchten Eckpunkt, indem wir den Winkel $\frac{360^\circ}{3}$ einmal gegen den Uhrzeigersinn abtragen und anschließend den Winkel $\frac{360^\circ}{4}$ einmal im Uhrzeigersinn abtragen. Wir haben nun eine Seite des regelmäßigen 12–Ecks konstruiert und durch wiederholten abtragen dieser Seite, erhalten wir dann unser gesuchtes 12–Eck.



Aus diesem Satz können wir nun folgern:

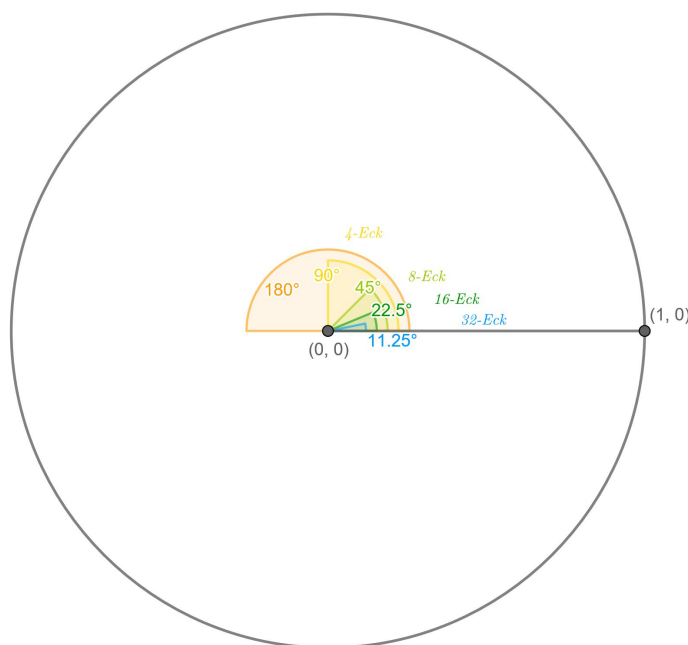
Folgerung. Sei $n \in \mathbb{N}$ und $n = p_1^{\alpha_1} \cdot \dots \cdot p_r^{\alpha_r}$ die Primfaktorzerlegung der natürlichen Zahl n . Dann kann das regelmäßige n – Eck genau dann konstruiert werden, wenn jedes regelmäßige $p_r^{\alpha_r}$ – Eck konstruierbar ist.

Es stellt sich nun die Frage, für welche Primzahlen p ist das p – Eck konstruierbar.

Zunächst können wir folgendes sagen:

Lemma (5). *Das regelmäßige 2^α -Eck, mit $\alpha \in \mathbb{N}$, ist konstruierbar.*

Beweis. Wir haben im Kapitel 2 gezeigt, dass wir mit Zirkel und Lineal Winkel halbieren können. Dies verwenden wir hier, indem wir den Winkel fortlaufend halbieren. So wie in der Abbildung können wir also ab 90° fortlaufend die Winkel halbieren.

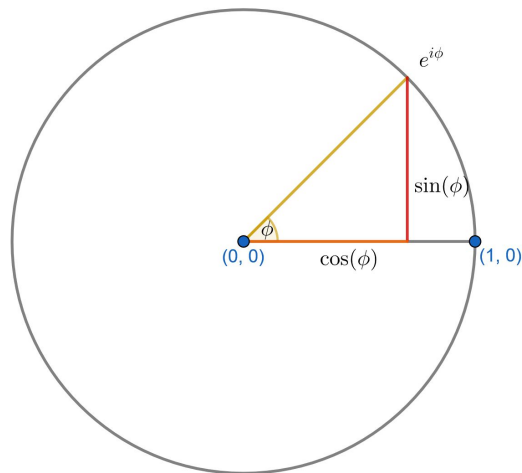


□

Da zwei die einzige gerade Primzahl ist, müssen wir uns noch überlegen, für welche ungeraden Primzahlen p , das p^n -Eck konstruierbar ist. Das ist gleichbedeutend, ob es möglich ist, den Punkt

$$(x, y) = \left(\cos\left(\frac{2\pi}{p^n}\right), \sin\left(\frac{2\pi}{p^n}\right) \right)$$

also eine Ecke des regelmäßigen p^n -Ecks, zu konstruieren. Wir betrachten nun den \mathbb{R}^2 als die Gaußsche Zahlenebene \mathbb{C} . Dann entspricht ein Punkt (x, y) der komplexen Zahl $x + iy = r \cdot (\cos(\phi) + i \sin(\phi))$. Wir bezeichnen ebenso $\epsilon = \cos\left(\frac{2\pi}{p^n}\right) + i \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{p^n}\right) = e^{\frac{2\pi i}{p^n}}$ als eine p^n -Einheitswurzel.



Ist nun (x, y) konstruierbar, so gilt nach Satz (1) dass $[\mathbb{Q}(x, y) : \mathbb{Q}]$ eine 2-Potenz ist, ebenso gilt dies für $[\mathbb{Q}(x, y, i) : \mathbb{Q}]$. Somit ist auch $[\mathbb{Q}(\epsilon) : \mathbb{Q}]$ eine 2-Potenz. Dies bedeutet, dass wir uns nun überlegen müssen, wann das Minimalpolynom $\min(\epsilon, \mathbb{Q})$ einen Grad hat, der eine 2-Potenz ist. Beschränken wir uns zunächst auf p -Einheitswurzeln und wollen folgendes Lemma beweisen:

Lemma (6). Für jede Primzahl p gilt:

$$[\mathbb{Q}(e^{\frac{2\pi i}{p}}) : \mathbb{Q}] = p - 1$$

Beweis. Sei also p eine Primzahl und

$$\epsilon = e^{\frac{2\pi i}{p}} = \cos\left(\frac{2\pi}{p}\right) + i \sin\left(\frac{2\pi}{p}\right) \in \mathbb{C}$$

Zunächst betrachten wir das Polynom $l(x) = x^p - 1$. ϵ ist eine Nullstelle dieses Polynoms, denn es gilt

$$e^{\frac{2\pi i p}{p}} - 1 = e^{2\pi i} - 1 = 1 - 1 = 0$$

Dieses Polynom lässt sich faktorisieren in

$$l(x) = x^p - 1 = (x - 1) \cdot (1 + x + \dots + x^{p-1})$$

Wir sehen, dass ϵ keine Nullstelle von $(x - 1)$ ist, also muss ϵ eine Nullstelle von $(1 + x + \dots + x^{p-1})$ sein. Man kann nun zeigen, dass $\Phi_p(x) = (1 + x + \dots + x^{p-1})$ irreduzibel ist. Dazu betrachten wir

$$x \cdot \Phi_p(x + 1) = l(x + 1) = (x - 1)^p - 1$$

Durch Anwendung des binomischen Lehrsatzes erhalten wir

$$(x - 1)^p - 1 = x^p + \binom{p}{1}x^{p-1} + \binom{p}{2}x^{p-2} + \dots + \binom{p}{p-1}x$$

Also erhalten wir nach Division durch x

$$\Phi_p(x + 1) = x^{p-1} + \binom{p}{1}x^{p-2} + \dots + \binom{p}{p-2}x + \binom{p}{p-1}$$

Wenn wir nun eine Primzahl a finden können, welche alle Koeffizienten des Polynoms bis zum Grad $p - 1$ teilt und gleichzeitig den Koeffizienten p -ten Grades sowie quadriert den konstanten Koeffizienten nicht teilt, so können wir das Eisenstein-Kriterium anwenden. Wir wählen dazu $a = p$. Wir sehen dass für p diese Bedingungen erfüllt sind. Daraus folgt, dass $\Phi_p(x + 1)$ irreduzibel über \mathbb{Q} ist. Wenden wir nun $q \mapsto q(x - 1)$ an, welches ein Ringsomorphismus von $\mathbb{Z}[x]$ ist, so sehen wir, dass auch Φ_p irreduzibel ist. Daraus und da Φ_p offensichtlich normiert ist, folgt, dass

$$\text{Min}(\epsilon, \mathbb{Q}) = 1 + x + \dots + x^{p-1}$$

das Minimalpolynom von ϵ über \mathbb{Q} ist. Dessen Grad ist $p - 1$.

□

Wir wissen, dass das regelmäßige p -Eck konstruierbar ist, wenn $p - 1$ eine 2-Potenz ist. Daraus folgt zum Beispiel, dass das regelmäßige 5-Eck oder das regelmäßige 17-Eck konstruierbar sein müssen. Wie sieht es jedoch mit Potenzen von Primzahlen aus? Sind diese konstruierbar? Dazu sehen wir uns zuerst folgendes Lemma ohne Beweis an (für Beweis siehe [4]):

Lemma (7). *Sei p eine ungerade Primzahl, ϵ eine p^2 -Einheitswurzel in \mathbb{C} . Dann gilt*

$$\text{min}(\epsilon, \mathbb{Q}) = x^{p(p-1)} + x^{p(p-2)} + \dots + x^p + 1$$

Mit Hilfe von Lemma (7) können wir nun abschließend folgenden Satz formulieren.

Satz (6). *Sei p eine ungerade Primzahl. Ist das regelmäßige p^n -Eck konstruierbar, so muss $n = 1$ und p eine Fermatzahl, also $p = 2^m + 1$ für $m \in \mathbb{N}$, sein.*

Beweis. Sei nun $n \geq 2$, so ist nach Satz (5a) auch das regelmäßige p^2 -Eck konstruierbar. Es gilt aber nach Satz (6), dass $\text{min}(e^{\frac{2\pi i}{p^2}}, \mathbb{Q}) = p \cdot (p - 1)$ eine 2-Potenz sein muss, was aber nicht möglich ist. Also muss $n = 1$ sein. Dass nun p eine Fermatzahl sein muss folgt direkt aus Lemma (6).

□

Die folgende Abbildung zeigt eine Tabelle aller mit Zirkel und Lineal konstruierbaren n -Ecke bis Hundert.

Konstruierbare n-Ecke bis 100														
Eckenzahl	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
Konstruierbar	Ja	Ja	Ja	Ja	Nein	Ja	Nein	Ja	Nein	Ja	Nein	Nein	Ja	Ja
Eckenzahl	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
Konstruierbar	Ja	Nein	Nein	Ja	Nein	Nein	Nein	Ja	Nein	Nein	Nein	Nein	Nein	Ja
Eckenzahl	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40	41	42	43	44
Konstruierbar	Nein	Ja	Nein	Ja	Nein	Nein	Nein	Nein	Nein	Ja	Nein	Nein	Nein	Nein
Eckenzahl	45	46	47	48	49	50	51	52	53	54	55	56	57	58
Konstruierbar	Nein	Nein	Nein	Ja	Nein	Nein	Ja	Nein	Nein	Nein	Nein	Nein	Nein	Nein
Eckenzahl	59	60	61	62	63	64	65	66	67	68	69	70	71	72
Konstruierbar	Nein	Ja	Nein	Nein	Nein	Ja	Nein	Nein	Nein	Ja	Nein	Nein	Nein	Nein
Eckenzahl	73	74	75	76	77	78	79	80	81	82	83	84	85	86
Konstruierbar	Nein	Nein	Nein	Nein	Nein	Nein	Nein	Ja	Nein	Nein	Nein	Nein	Ja	Nein
Eckenzahl	87	88	89	90	91	92	93	94	95	96	97	98	99	100
Konstruierbar	Nein	Nein	Nein	Nein	Nein	Nein	Nein	Nein	Nein	Ja	Nein	Nein	Nein	Nein

Wir haben also somit gezeigt, dass das regelmäßige 17-Eck konstruierbar ist. Gauss fand folgende Formel für $\cos(\frac{2\pi}{17})$, die man als Grundlage für die geometrische Konstruktion verwenden kann.

$$\cos\left(\frac{2\pi}{17}\right) = \frac{1}{16} \cdot \left(-1 + \sqrt{17} + \sqrt{34 - 2\sqrt{17}}\right) + \frac{1}{16} \cdot \left(\sqrt{68 + 12\sqrt{17} - 16\sqrt{34 + 2\sqrt{17}} - 2 \cdot (1 - \sqrt{17}) \cdot \sqrt{34 - 2\sqrt{17}}}\right)$$

Dass ebenso das regelmäßige 257-Eck konstruierbar ist, sehen wir, da $257 - 1 = 256 = 2^8$ eine 2-er Potenz ist. Eine Konstruktion hierfür gab erstmals Richelot im Jahre 1832 an. Auch das regelmäßige 65.537-Eck ist konstruierbar, denn $65.537 - 1 = 65.536 = 2^{16}$ ist ebenso eine 2-er Potenz. An einem Konstruktionsverfahren dafür arbeitete etwa J. Hermes zehn Jahre lang. (Siehe dazu [2])

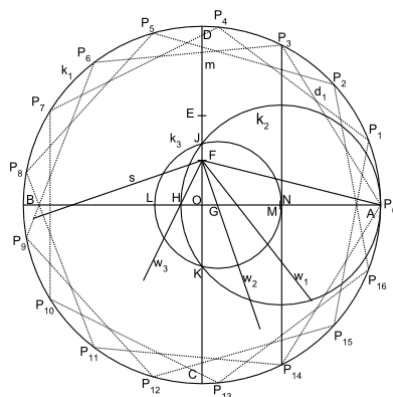
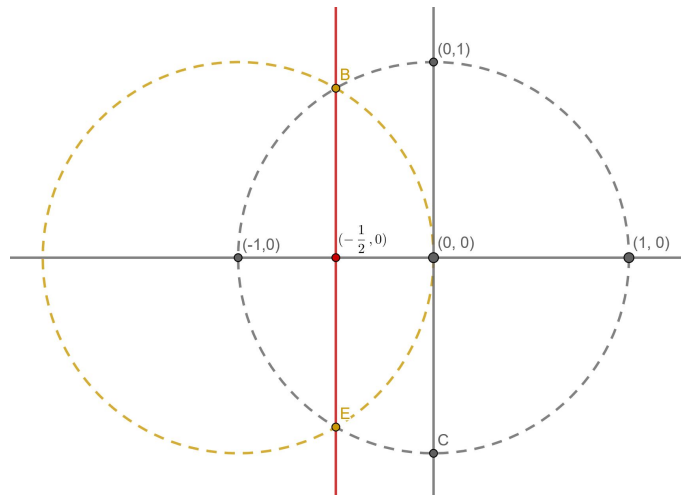


Abbildung 2: Beispiel Konstruktion eines regelmäßigen Siebzehnecks

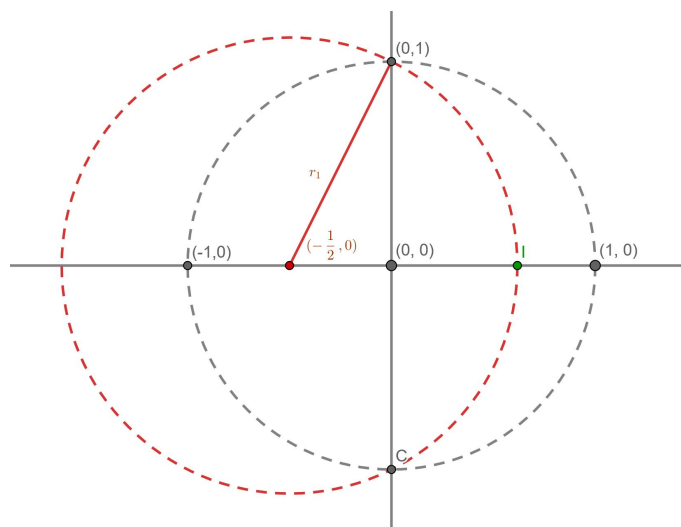
Abschließend zu den Konstruktionen regelmäßiger Vielecke wollen wir uns am Beispiel des regelmäßigen 5-Ecks anschauen, wie wir es konstruieren können. Wir geben uns den Einheitskreis vor und wollen versuchen $e^{\frac{2\pi i}{5}}$ bzw. $\cos(\frac{2\pi}{5})$ zu konstruieren. Wir beginnen damit den Punkt $(-\frac{1}{2}, 0)$ zu konstruieren, indem wir einen Kreis mit Radius $r = 1$ um den Punkt $(-1, 0)$ schlagen. Wir erhalten die Schnittpunkte B und E durch welche wir eine Gerade ziehen. Der Schnittpunkt dieser Geraden mit der Geraden durch $(0, 0)$ und $(1, 0)$ ist nun $(-\frac{1}{2}, 0)$.



Die Strecke vom Punkt $(0, 1)$ nach $(-\frac{1}{2}, 0)$ hat nach dem Satz von Pythagoras die Länge

$$r_1 = \sqrt{1^2 + \frac{1}{4}} = \sqrt{1 + \frac{1}{4}} = \frac{\sqrt{5}}{2}$$

Nun schlagen wir einen Kreis mit Radius r_1 um den Punkt $(-\frac{1}{2}, 0)$ und erhalten so Punkt I als Schnittpunkt dieses Kreises mit der Geraden durch $(0, 0)$ und $(1, 0)$.

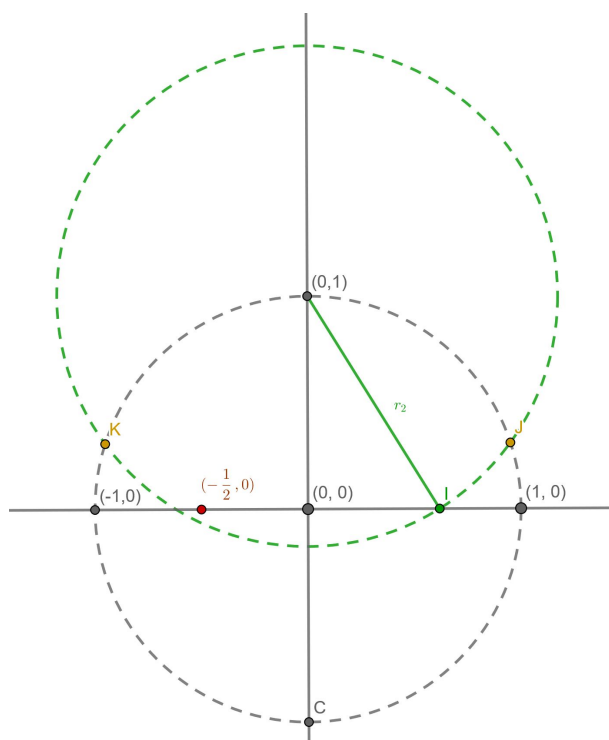


Die Strecke vom Nullpunkt bis zum Punkt I beträgt folglich

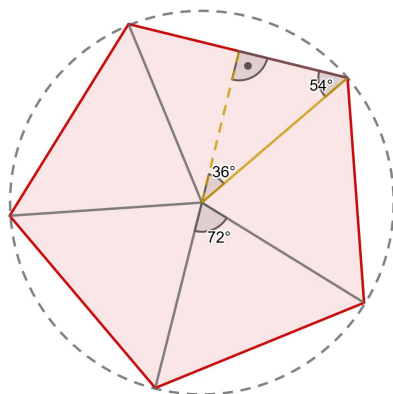
$$\frac{\sqrt{5}}{2} - \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{5} - 1}{2}$$

Um die Länge der Strecke von $(0, 1)$ nach I zu berechnen, verwenden wir wiederum den Satz von Pythagoras und erhalten

$$r_2 = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{5} - 1}{2}\right)^2 + 1^2} = \sqrt{\frac{6 - 2\sqrt{5} + 4}{4}} = \sqrt{\frac{5 - \sqrt{5}}{2}}$$



Diese Länge r_2 entspricht nun genau einer Seitenlänge des regelmäßigen Fünfecks am Einheitskreis. Dies können wir an folgender Abbildung erklären.



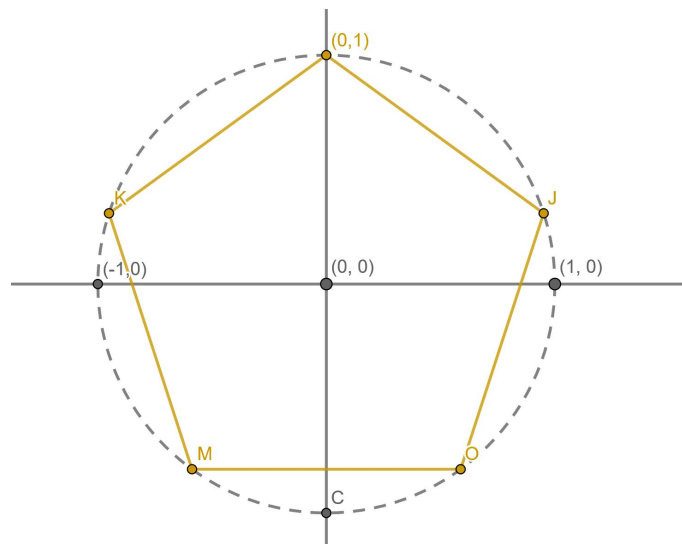
Es gilt

$$\sin(\alpha) = \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Hypotenuse}}$$

also

$$r_2 = 2 \cdot \sin(36^\circ) = 2 \cdot \sqrt{\frac{5}{8} + \frac{\sqrt{5}}{8}} = \sqrt{\frac{5 - \sqrt{5}}{2}}$$

Wir schlagen also einen Kreis mit Radius r_2 mit Mittelpunkt $(0, 1)$ und erhalten den Schnittpunkt J bzw. K . Nun müssen wir diese Kantenlänge nur noch am Einheitskreis fortsetzen und abtragen und erhalten so das gesuchte regelmäßige Fünfeck.



Wir haben nun gesehen, welche der genannten geometrischen Konstruktionsaufgaben lösbar sind und welche nicht. Dies hängt entscheidend davon ab, mit welchen Spielregeln ich konstruieren darf. Die hier behandelte Variante war das Konstruieren mit Zirkel und Lineal. Es gibt jedoch noch zahlreiche weitere Varianten, wie zum Beispiel:

1. Mit dem Lineal alleine
2. Mit dem Zirkel alleine
3. Mit dem Lineal und einem fest vorgegebenen Kreis
4. Mit dem Lineal und einer fest vorgegebenen Parabel
5. Mit Zirkel, Lineal und einer fest vorgegebenen Parabel

Es scheint überraschend, dass mit der fünften Variante bereits eine Winkeldreiteilung möglich wird. Das kann man sich dadurch erklären, dass ein Kreis mit einer Parabel bis zu vier Schnittpunkte haben kann (siehe dazu [2]).

Wir haben in diesem Kapitel gesehen, wie man das Konstruieren mit Zirkel und Lineal mathematisieren kann und dadurch zeigen kann, welche Punkte konstruierbar sind. Auch haben wir uns die bekannten Konstruktionsprobleme mit Zirkel und Lineal angesehen und festgestellt, was konstruierbar ist und was nicht und dass dies entscheidend von den Spielregeln, bzw. unserem zur Verfügung stehendem Werkzeug abhängig ist. Im zweiten Teil der Diplomarbeit widmen wir uns nun einer anderen Art um Punkte zu konstruieren, nämlich dem sogenannten Origami bzw. Faltekunst und werden uns ähnlich wie im diesem Kapitel dem Thema zunächst geschichtlich und dann mathematisch nähern und werden dann zeigen, welche der antiken Konstruktionsprobleme nun mit Origami lösbar werden und welche weiterhin nicht lösbar bleiben.

Teil II

**Konstruktionen mit
Origami**

Was ist Origami?

Origami ist eine Kunstform, welche ihre Wurzeln im Asien des letzten Jahrtausends hat. Das Wort „*Origami*“ kommt aus dem Japanischen und ist eine Kombination von „*oru*“, was „*falten*“ bedeutet und „*kami*“, was mit „*Papier*“ übersetzt werden kann. Dieses Falten von Papier wurde weitläufig in der japanischen Kultur verbreitet, aber ihre Ursprünge liegen vermutlich bereits in vorjapanischer Zeit. Diese Ursprünge sollen ungefähr 2.000 Jahre zurückreichen und beginnen in etwa zu der Zeit der Erfindung des Papiers, welches angeblich von Ts'ai Lun, einem chinesischen Beamten um 105 nach Christus, entdeckt wurde. Die Erfindung des Papiers benötigte dann einige Zeit um sich auf der gesamten Welt zu verbreiten. So brachten buddhistische Mönche im 6. Jahrhundert nach Christus das Papier über Korea nach Japan. Die Araber brachten es im 7. Jahrhundert nach Ägypten und später durch die Besetzung Spaniens und Siziliens nach Europa. Um 1350 war das Papier schon europaweit verbreitet und wurde für viele literarische Arbeiten als Beschreibstoff verwendet. Durch die Erfindung des Buchdrucks verdrängte das Papier dann endgültig andere Materialien, wie das bis dahin verwendete Leder.

Zu welcher Zeit der Verbreitung des Papiers nun das Origami seine Anfänge fand, ist heute noch Gegenstand einiger Debatten, aber generell wird angenommen, dass die Anfänge in China, Korea und/oder Japan liegen. Eine Theorie besagt, dass mit der Verbreitung des Papiers auch gleichzeitig einige Origami-Modelle mitgeliefert wurden und somit diese Kunst zusammen mit dem Papier Verbreitung in der Welt fand. Eine andere Theorie hingegen besagt, dass das Papierfalten an unterschiedlichen Orten unabhängig entdeckt wurde und es dann zu einer selbstverständlichen Tätigkeit mit Papier wurde. Wichtige Orte der Origamikunst neben China, Korea und Japan waren später auch Spanien, Italien, England sowie Nordamerika.

Wie bereits erwähnt, ist das Origami mit der japanischen Kultur stark verwurzelt. Die Entwicklung des Origami in Japan ist gut dokumentiert und sie lässt sich über verschiedene Herrschafts-Perioden ab ca. 800 nach Christus gut nachverfolgen. Die erste schriftliche Quelle, welche Origami beschreibt, entstand 1682. Das bekannteste Werk über Origami ist jedoch das 1797 veröffentlichte Buch „*Wie faltet man 1.000 Kraniche*“. Ab Mitte des 19. Jahrhunderts kam das Origami zu immer größerer Beliebtheit und wurde auch in Japans Schulen praktiziert, was bis heute anhält. Für diese und weitere geschichtliche Informationen über Origami bieten sich einige Werke von David Lister an, wie beispielsweise [19].

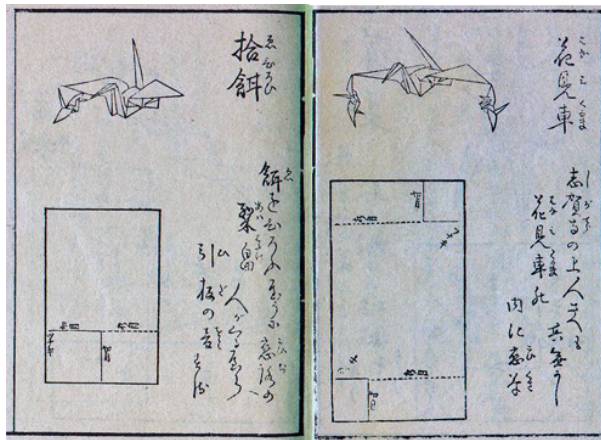


Abbildung 3: Eine Seite des Werkes „Wie faltet man 1.000 Kraniche“

Die Kunst des Origami hat aber auch weltweit viele Anhänger, welche sich in Gesellschaften und Organisationen zusammenschließen. So entstand etwa *The Origami Center* 1958 in den USA (heute: *OrigamiUSA*) oder die *British Origami Society* 1967 in England.



Abbildung 4: Logo OrigamiUSA



Abbildung 5: Logo British Origami Society

Besonders in den letzten zwanzig Jahren erlebt Origami einen starken weltweiten Aufschwung mit bemerkenswerten neuen technischen und künstlerischen Leistungen. Auf technischer Seite waren nun viel kompliziertere Strukturen und Formen konstruierbar und dies führte natürlich zu vielen neuen Möglichkeiten des Designs. Dieser Fortschritt im Design begründet sich hauptsächlich im vertieften Verständnis des Origami im mathematischen und rechnerischen Bezug. Dieser basiert vorwiegend auf den wesentlichen geometrischen Eigenschaften des

Origami. Wurde Origami lange Zeit nicht mit Mathematik in Verbindung gebracht, so änderte sich das allmählich im 19. Jahrhundert. Die älteste Referenz des Origami im geometrischen Kontext stammt aus dem Jahr 1840 von Dionysius Lardner, welcher einige geometrische Konzepte mit Hilfe des Papierfaltens zu illustrieren versuchte. Auch in anderen späteren Werken über Geometrie nahm Origami nur den Stellenwert als Hilfsmittel zur Illustration geometrischer Konstruktionen ein, jedoch wurde es bis dahin nicht selbst als mathematisches Gebiet analysiert. Erst 1936 wurde begonnen, Origami mathematisch zu analysieren und es entstanden erste Sammlungen von Axiomen wie zum Beispiel von Margherita Piazzolla oder später die sogenannten Huzita - Axiome, auf welche wir im nächsten Kapitel näher eingehen werden. Einige fundamentale Theoreme über die sogenannten ebenen Faltungen erarbeiteten beispielsweise Jun Maekawa, Toshikazu Kawasaki und Jacques Justin. Bekannte Mathematiker, welche sich besonders die letzten Jahre intensiv mit Origami befassen, sind Thomas Hull und Robert Lang. Letzterer veröffentlichte 2003 sein großes Werk „*Origami Design Secrets*“. Dieses Werk gilt heute als Startpunkt für die heutige intensiviertere Erforschung des rechnerischen Origamis. Vergleiche dazu auch [11].

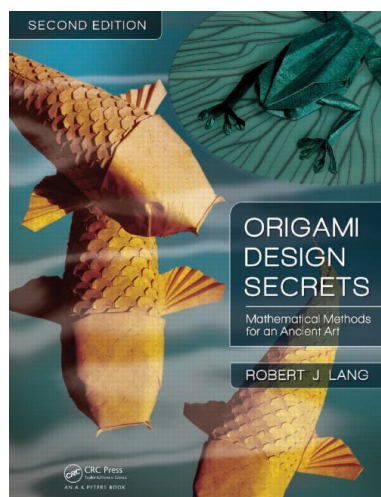


Abbildung 6: Robert Lang’s Buch „Origami Design Secrets“

Bekanntlich ist man bei der Kunstform des Origami nicht mehr, wie bei Zirkel und Lineal, auf eine ebene Fläche reduziert, sondern es lassen sich auch räumliche Objekte anfertigen. Da wir uns aber im Folgenden nur auf die vier antiken Konstruktionsprobleme konzentrieren wollen, beschränken wir uns auch hier auf die sogenannten *ebenen Faltungen*, an welchen wir dann einige interessante mathematische Regularitäten erkennen können. In den folgenden Ausführungen werde ich mich hauptsächlich an [11] und [12] anlehnen.

Origami in der Mathematik

Wenn wir uns nun dem Origami mathematisch zuwenden wollen, so müssen zunächst einige Begriffe eingeführt und geklärt werden. Die intuitive Vorstellung über das zu verwendende Material, also Papier, und über die möglichen Faltungen sind relativ einfach. So wird das Blatt Papier als eine zweidimensionale ebene Fläche aufgefasst. Während man in der Origamikunst das Blatt Papier als eine begrenzte Fläche betrachtet, so ist es in der mathematischen Sichtweise oft einfacher, es als eine unbegrenzte Ebene (z.B. als Gauß'sche Zahlenebene) zu sehen. Unter einer Faltbewegung verstehen wir eine durchgehende Bewegung des Papiers von einer gegebenen Form in eine andere, wobei das Papier nicht gedehnt, zerrissen oder selbst-durchdrungen werden darf. Besonders der letzte Punkt ist wichtig, denn das Papier darf sich zwar berühren, aber nicht durchdringen. Betrachten wir das Papier zu einem Zwischenzeitpunkt einer Faltbewegung, so nennen wir diesen den Faltzustand. Im Allgemeinen unterscheiden wir hier den Anfangsfaltzustand, bei welchem die Faltbewegung beginnt und den Endfaltzustand, in welchen das Papier übergeführt wird. Normalerweise sollte man jede Faltbewegung genau beschreiben, da dies unter Umständen sehr schwierig werden kann, beschränkt man sich häufig nur darauf, den Endfaltzustand anzugeben. So sehen wir in der folgenden Abbildung nur die jeweiligen Endfaltzustände, wobei die Faltbewegungen mithilfe von Pfeilen dargestellt werden.

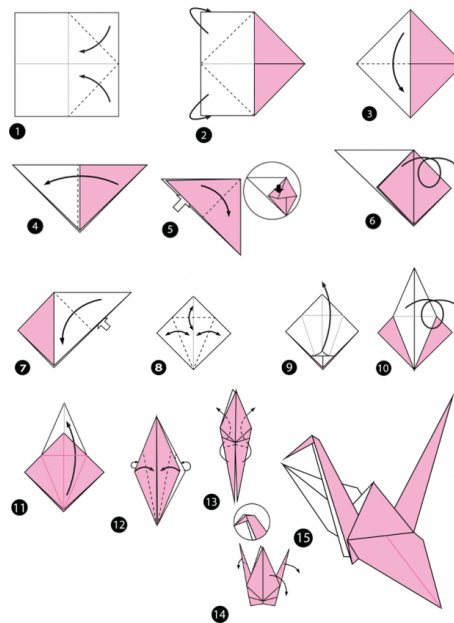


Abbildung 7: Beispiel einer Origami-Anleitung für einen Kranich

Unter einer Falte verstehen wir eine Linie (in manchen Fällen auch eine Kurve) auf einem Stück Papier, die uns anzeigen soll, an welcher Linie wir das Papier falten sollen. Wir können hier zwei Arten von Falten unterscheiden, je nachdem ob nach „unten“ oder nach „oben“ gefaltet wird:

- 1) die Bergfalte, wobei die Falte konventionell als strichlierte Linie dargestellt wird, oder
- 2) die Talfalte, wobei die Falte als Strich-Punkt-Linie dargestellt wird.

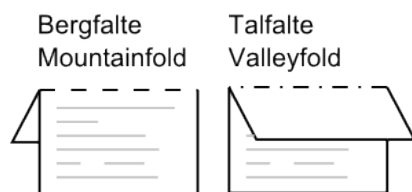


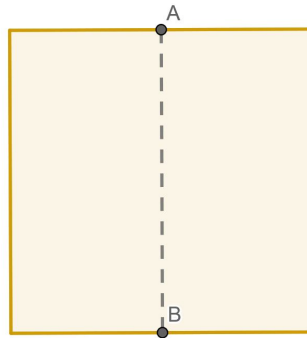
Abbildung 8: Veranschaulichung zur Berg- und Talfalte

Oft werden diese zwei Arten von Linien mit dem Auge schwer erkannt, besonders, wenn sich einige Linien überkreuzen. Deshalb ist es auch üblich für diese Berg- und Talfalten unterschiedliche Farben zu verwenden. Darüber hinaus verwenden viele Bücher über Origami unterschiedlichste Methoden, um Faltbewegungen darzustellen bzw. zu beschreiben, wie zum Beispiel verschiedene Arten von Pfeilen.

Wir werden uns nun hauptsächlich mit den Faltmöglichkeiten beschäftigen, die uns Origami zur Verfügung stellt und diese mathematisch beschreiben und dadurch klären, was geometrisch konstruierbar ist, bzw. welche Zahlen wir konstruieren können.

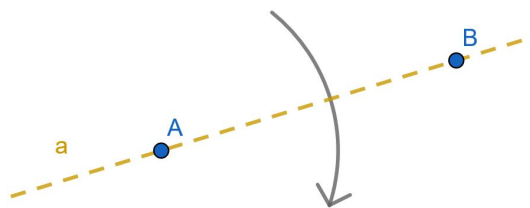
Welche Konstruktionsschritte mit Origami durchführbar sind, bzw. welche Punkte und Linien konstruierbar sind, wurde bereits größtenteils von Humaki Huzita im Jahr 1985 geklärt. Er beschrieb in einer Sammlung von sechs Axiomen was durch „*Origami-Punkte*“ und „*Origami-Linien*“ mit einer Faltung konstruierbar ist. In diesem Sinn ist eine Linie eine Falte in einem endlichen Stück Papier. Auch die Ränder des Papiers werden als Linien aufgefasst. Ein normales Blatt Papier hat zu Beginn nur die Ränder als Linien. Unter einem konstruierbaren Punkt verstehen wir im Folgenden immer den Schnittpunkt von zwei (konstruierbaren) Linien.

Falten wir beispielsweise ein Blatt in der Mitte, so konstruieren wir zwei Punkte, wo sich die entstandene Linie mit den Randlinien schneidet.

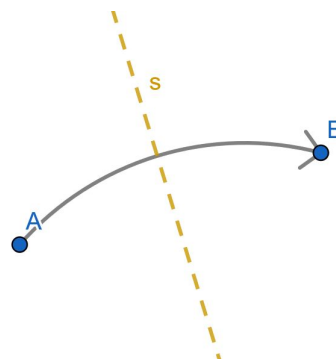


Widmen wir uns nun den sechs Huzita-Axiome, die beschreiben, welche Linien und Punkte mit Origami konstruierbar sind:

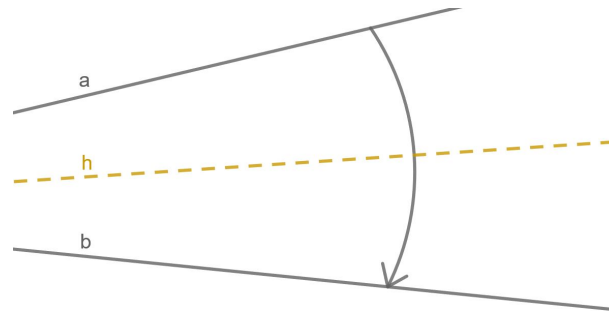
(H1) Sind zwei konstruierbare Punkte A und B gegeben, so ist die Linie a durch diese Punkte konstruierbar.



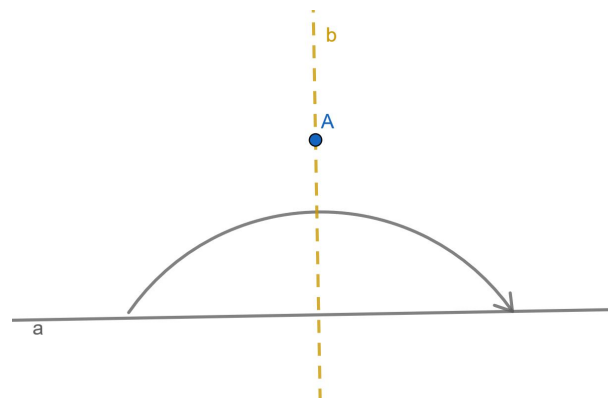
(H2) Sind zwei konstruierbare Punkte A und B gegeben, so ist die Mittelsenkrechte s auf die Strecke \overline{AB} konstruierbar, indem man den einen Punkt auf den anderen faltet.



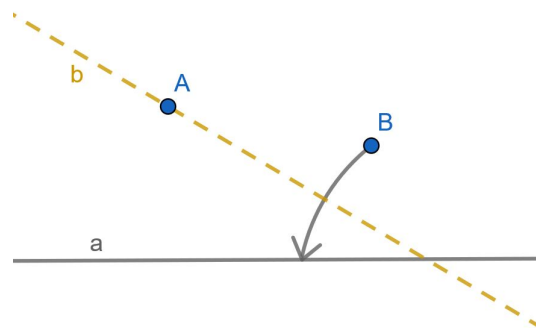
- (H3) Sind zwei konstruierbare Linien a und b gegeben, so kann man die Linie h konstruieren, indem wir die eine Linie auf die andere falten. Sind die Linien nicht parallel, so entspricht die Linie h der Winkelhalbierenden der zwei gegebenen Linien.



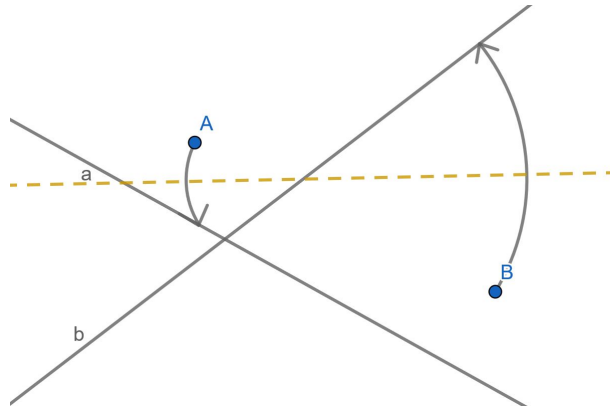
- (H4) Ist ein konstruierbarer Punkt A und eine konstruierbare Linie a gegeben, so kann man Linie b durch den Punkt A senkrecht zur Linie a konstruieren, indem man Linie a auf sich selbst faltet.



- (H5) Sind zwei konstruierbare Punkte A und B und eine konstruierbare Linie a gegeben, so kann man die Linie b durch den Punkt A so konstruieren, dass Punkt B auf Linie a abgebildet wird.

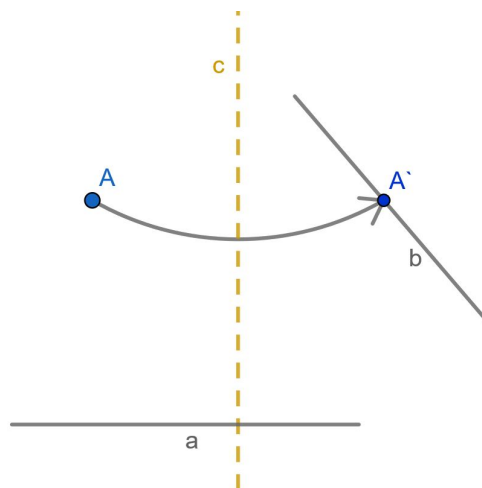


- (H6) Sind zwei konstruierbare Punkte A und B sowie zwei konstruierbare Linien a und b gegeben, so sind jene Linien konstruierbar, wo gleichzeitig Punkt A auf Linie a und Punkt B auf Linie b abgebildet werden.



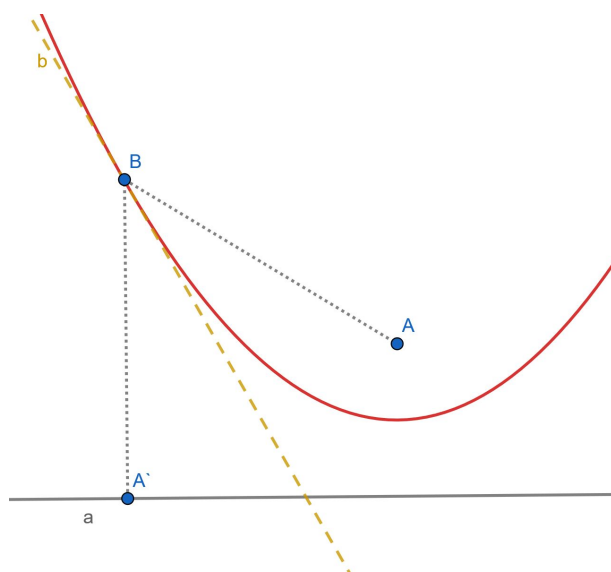
Einige Zeit später, im Jahr 2002, hat Koshiro Hatori ein siebentes Axiom vorgeschlagen, welches als nicht äquivalent zu den bereits existierenden Huzita-Axiomen zu betrachten ist. Dieses Axiom wurde bereits 1989 von Jaques Justin entdeckt, aber von Hatori wiederentdeckt.

- (H7) Ist ein konstruierbarer Punkt A und zwei konstruierbare Linien a und b gegeben, so kann man eine Linie c konstruieren, welche senkrecht auf eine der beiden Linien steht und gleichzeitig der Punkt A auf die jeweils andere Linie abgebildet wird.

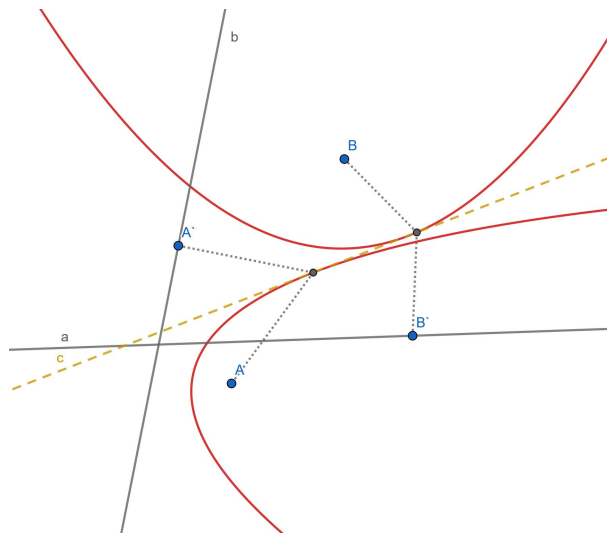


Wie wir später sehen werden, können wir mit diesen Konstruktionsschritten beliebige Winkel dreiteilen. Das bedeutet, dass diese Origami-Axiome stärker sein müssen, als die von Zirkel und Lineal. Im ersten Abschnitt haben wir gezeigt, dass wir mit Zirkel und Lineal die rationalen Zahlen sowie Wurzeln von quadratischen Gleichungen mit konstruierbaren Koeffizienten konstruieren können, aber nicht mehr. Wir werden zeigen, dass die Axiome $(H1) - (H5)$ äquivalent zu den Konstruktionsschritten mit Zirkel und Lineal sind. Axiom $(H6)$ jedoch kann man im Allgemeinen nicht mit Zirkel und Lineal konstruieren. In diesem Axiom liegt die Möglichkeit bestimmte kubische Gleichungen zu lösen, nicht nur Quadratische, so wie mit Zirkel und Lineal. Wir wollen dies anhand von zwei Abbildungen veranschaulichen.

Betrachten wir zunächst $(H5)$. Punkt A wird hier über die konstruierte Linie b auf Punkt A' gespiegelt, weshalb der Abstand an jedem beliebigen Punkt B der Linie b zum Punkt A gleich ist, wie der Abstand des Punktes B zum Punkt A' . Dies zeigt, dass die Linie b tangential zur Parabel mit Brennpunkt A und Leitgeraden a verläuft, denn für jede Parabel gilt, dass der Abstand jedes Punktes der Parabel zum Brennpunkt gleich ist dem Abstand des Punktes zur Leitlinie.



Da wir diese Situation in (H6) praktisch zweimal konstruieren, ergibt sich hier eine Linie, welche tangential zu zwei Parabeln liegt. Dies veranschaulichen wir an folgender Abbildung.



Um so eine Gerade zu finden, welche tangential zu zwei Parabeln liegt, muss eine kubische Gleichung gelöst werden. Da wir nun in der Lage sind, kubische Gleichungen mit Origamioperationen zu lösen, können Körpererweiterungen sowohl von 2–er Potenzen als auch von 3–er Potenzen auftreten, wo alle Elemente dieser Körpererweiterung konstruiert werden können. Da man quartische Gleichungen (mit konstruierbaren Koeffizienten) mithilfe von kubischen Gleichungen lösen kann, sind diese ebenfalls noch mit Origami lösbar. Dass höhere Gleichungen nicht mehr mit Origami lösbar sind, hat 1989 Huzita und Scimemi bewiesen, sowie später unabhängig auch Alperin.

Im Folgenden werden wir uns mit der Frage beschäftigen, welche Zahlen wir durch Origami konstruieren können. Um dies zu beantworten, werden wir uns an [12] halten und schrittweise klären, durch welche Konstruktionsaxiome, welche Zahlen konstruierbar werden. Alperin betrachtet das Blatt Papier als Gauß'sche Zahlenebene, wo die konstruierten Punkte 0 und 1 gegeben sind. Im Gegensatz zu Huzita's Axiomen lässt Alperin Axiom (H4) weg, fügt jedoch ein Axiom hinzu, welches besagt, dass der Schnittpunkt von zwei konstruierbaren Linien ein konstruierbarer Punkt ist. Dies wird von Huzita nicht als Axiom angeschrieben, jedoch vorausgesetzt. Wir führen die sechs Axiome nach Alperin nochmals an, da wir auf sie im Folgenden öfter Bezug nehmen werden.

- 1) Eine Linie, welche zwei konstruierbare Punkte verbindet, ist eine konstruierbare Linie.
- 2) Der Schnittpunkt von zwei konstruierbaren Linien ist ein konstruierbarer Punkt.
- 3) Die Mittelsenkrechte einer konstruierbaren Linie, welche zwei konstruierbare Punkte verbindet, ist eine konstruierbare Linie.

- 4) Die Winkelhalbierende eines jeden beliebigen gegebenen Winkel ist konstruierbar.
- 5) Ist eine konstruierbare Linie l und zwei konstruierbare Punkte P und Q gegeben, so ist, wann immer möglich, die Linie durch Q , welche P auf l spiegelt, konstruierbar.
- 6) Sind zwei konstruierbare Linien l und m und zwei konstruierbare Punkte P und Q gegeben, so ist, wann immer möglich, die Linie, welche gleichzeitig P auf l und Q auf m spiegelt, konstruierbar.

Alle Punkte, die durch diese Axiome konstruiert werden können, bilden dann die Origami-Zahlen. Es ist zu bemerken, dass nicht alle Punkte auf einer Linie konstruierbar sind. Alperin nennt die ersten drei dieser Axiome *thalische Konstruktionen*, welche die *thalischen Zahlen* ergeben. Werden die ersten drei Axiome durch das vierte Axiom ergänzt, so erhalten wir dadurch die *pythagoräischen Zahlen*. Das fünfte Axiom fügt die sogenannten *euklidischen Konstruktionen* hinzu, welche Tangenten von Parabeln beinhalten. Wir können zum Beispiel das erste und vierte Axiom durch dieses fünfte Axiom ersetzen. Somit würden wir nur das zweite, dritte und fünfte Axiom benötigen, um geometrische Konstruktionen durchzuführen. Durch das sechste Axiom erschließt Alperin schließlich die *Origami-Zahlen*. Wie bereits erwähnt, lassen sich durch dieses Axiom Gleichungen vom Grad drei, sowie auch vier lösen, wodurch einige der antiken Konstruktionsprobleme nun lösbar werden.

Widmen wir uns nun zunächst den *thalischen Konstruktionen*. Sie sind nach dem griechischen Mathematiker Thales benannt, welcher im 6. Jahrhundert vor Christus Lehrer von Pythagoras war. Wir setzen die komplexen Zahlen \mathbb{C} als gegeben voraus. Alle Konstruktionen finden nun in der komplexen Zahlenebene statt. Die Menge der Punkte, welche durch die thalischen Konstruktionen konstruierbar sind, ist die kleinste Untermenge von konstruierbaren Punkten $\Pi = \Pi\{A, B, C\}$ in der komplexen Zahlenebene, welche unter folgenden Operationen abgeschlossen ist:

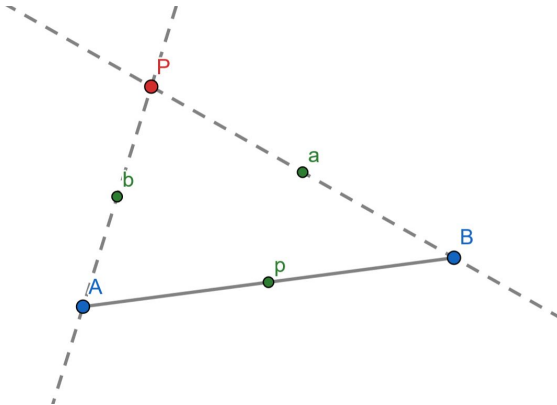
- 1) Die Menge enthält drei Punkte $A, B, C \in \mathbb{C}$, welche nicht alle auf einer Linie liegen.
- 2) Die Linie, welche zwei Punkte in Π verbindet, ist konstruierbar.
- 3) Der Schnittpunkt von zwei konstruierbaren Linien befindet sich in Π .
- 4) Die Mittelsenkrechte der Strecke zwischen zwei konstruierbaren Punkten ist konstruierbar.

Im Folgenden nehmen wir an, dass alle Konstruktionen in einer gegebenen Menge Π stattfinden.

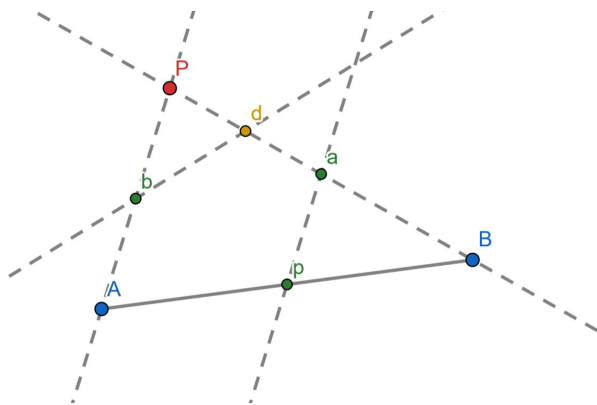
Lemma (8). *Ist ein Punkt P und eine Strecke \overline{AB} gegeben, so können wir eine parallele Strecke der selben Länge und Richtung wie \overline{AB} , beginnend oder endend bei P , konstruieren.*

Beweis. Nehmen wir zunächst an, dass P nicht auf der Strecke \overline{AB} liegt. Wir verbinden P zu A und B und halbieren die konstruierten Seiten des Dreiecks.

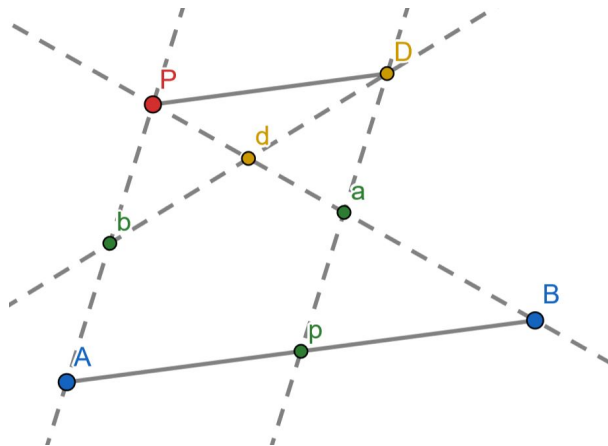
Wir erhalten so die Punkte p, a, b auf der gegenüberliegenden Seite der bereits gegebenen Punkte. Wir sehen, dass die Linie \overline{ab} parallel zur Grundlinie \overline{BA} verläuft.



Wir konstruieren nun die Linie \overline{pa} , halbieren anschließend die Strecke \overline{Pa} und erhalten somit Punkt d . Nun konstruieren wir die Linie \overline{bd} .



Die Linie \overline{bd} schneidet Linie \overline{pa} im Punkt D . Die Strecke \overline{PD} ist parallel zu \overline{AB} und hat genau die halbe Länge. Gehen wir nun ähnlich vor wie vorhin und konstruieren eine parallele Linie zu \overline{ap} , welche durch B verläuft um somit den Punkt auf der Linie \overline{PD} zu erhalten, welcher der entsprechenden Länge \overline{AB} entspricht.



Die Konstruktion, wo P Endpunkt der Strecke ist, funktioniert ebenso. Liegt Punkt P nun auf der Strecke \overline{AB} , dann können wir die Strecke so wie oben beschrieben an einen Start- oder Endpunkt Q außerhalb der Strecke \overline{AB} verschieben und anschließend wieder zurück in den Punkt P verschieben.

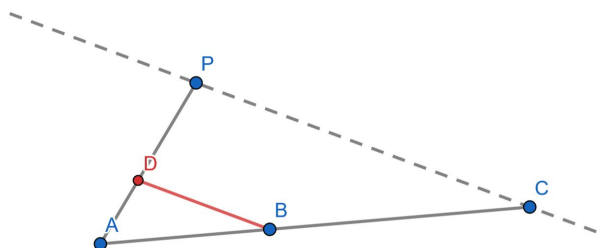
□

Korollar (1). *Wir können eine Linie konstruieren, welche senkrecht auf eine Linie m steht und durch den Punkt P verläuft.*

Beweis. Wir wählen zwei konstruierbare Punkte auf m und konstruieren mit Hilfe des Axioms (3) die Mittelsenkrechte davon. Diese ist wegen Lemma 1 parallel zur Senkrechten durch P .

Korollar (2). *Ist ein Punkt P und eine Strecke \overline{ABC} gegeben, können wir eine Strecke \overline{ADP} so konstruieren, dass das Dreieck $\triangle ABD$ ähnlich dem Dreieck $\triangle ACP$ ist.*

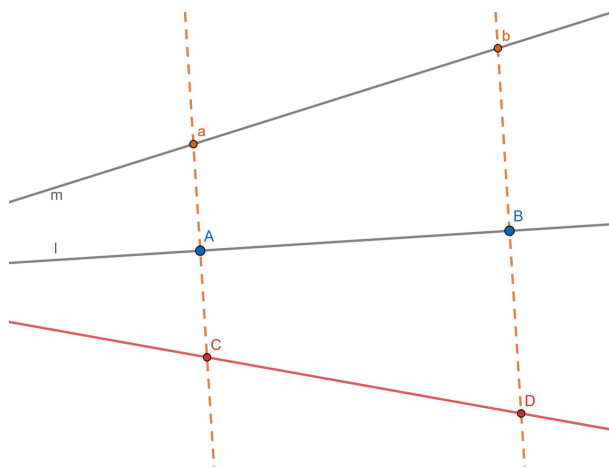
Beweis. Wir konstruieren eine Parallele durch Punkt B zur Geraden \overline{PC} . Liegt P auf der Strecke \overline{ABC} machen wir die Konstruktion wie vorhin mit einem Punkt Q außerhalb dieser Strecke mit der Strecke \overline{AEQ} . Mit der Strecke \overline{AEQ} und mit Punkt P können wir den Punkt D so finden, dass \overline{ADP} das selbe Verhältnis hat wie \overline{AEQ} , welches das selbe ist wie \overline{ABC} . Natürlich liegt D in diesem Fall auf der Strecke \overline{ABC} .



□

Korollar (3). Ist ein Punkt P und eine Linie l gegeben, so können wir P über l spiegeln. Sind zwei Linien l und m gegeben, können wir m über l spiegeln.

Beweis. Die zweite Konstruktion beinhaltet auch die erste. Wir nehmen nun zwei konstruierbare Punkte A und B auf l und konstruieren eine Senkrechte zu l durch den Punkt A und erhalten als Schnittpunkt mit m den Punkt a . Dasselbe machen wir mit B . Wir verschieben nun die Strecke \overline{Aa} in den Punkt A und erhalten so den neuen Endpunkt C . Dasselbe mit der Strecke \overline{Bb} . Wir haben nun zwei gespiegelte Punkte C und D erhalten und konstruieren durch diese Punkte eine Linie.

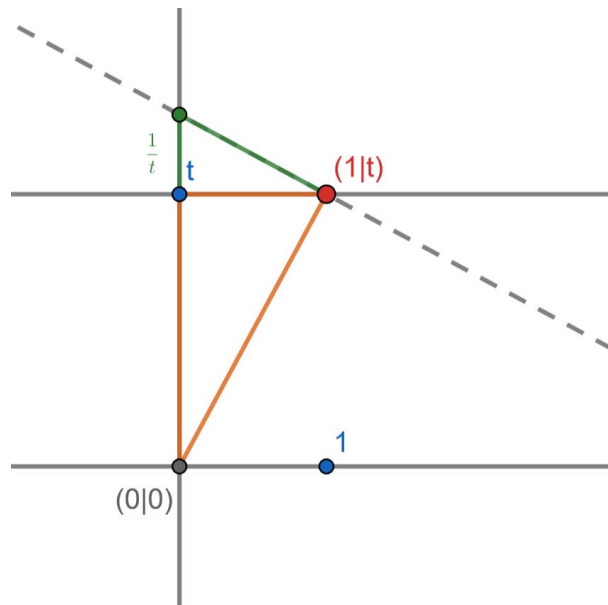


□

Wenn wir nun annehmen, dass der erste gegebene Punkt A null ist und der zweite gegebene Punkt B die komplexe Zahl 1 ist, dann können wir die x -Achse und auch ihre senkrechte y -Achse konstruieren. Die Menge $\Pi\{0, 1, C\}$ hängt nunmehr einzig von einer Variablen z , dem Punkt C , ab. Wir bezeichnen nun $\Pi = \Pi[z]$ und können somit die x -Achse und y -Achse als Teilmenge der reellen Zahlen auffassen, mit $X = X[z], Y = Y[z]$. Da wir jeden konstruierbaren Punkt auf die x - oder y -Achse projizieren können, sind $X[z]$ und $iY[z]$ Teilmengen von Π .

Lemma (9). Ist $t \in Y[z]$ auf der y -Achse ungleich null, dann ist $\frac{1}{t} \in Y[z]$.

Beweis. Wir nehmen an $t > 0$. Nun konstruieren wir ein rechtwinkliges Dreieck mit Schenkel t entlang der y -Achse und 1 parallel zur x -Achse. Die Hypotenuse beginnt im Ursprung und endet im Punkt $(1, t)$. Wir konstruieren ein zweites Dreieck indem wir eine Senkrechte zur y -Achse durch den Punkt $(1, t)$ konstruieren und ebenso eine Senkrechte zur Hypotenuse im Punkt $(1, t)$ und diese bis zur y -Achse verlängern. Die Dreiecke sind nun ähnlichen. Der Schenkel entlang der y -Achse des zweiten Dreiecks hat die Länge $\frac{1}{t}$.



□

Dass auch für Produkte $x * y$ mit $x, y \in Y[z]$ gilt, dass $x * y \in Y[z]$, sieht man ebenso mit Hilfe der Konstruktion von ähnlichen Dreiecken. Wir erkennen also, dass mit diesen Konstruktionsaxiomen bereits \mathbb{Q} konstruierbar ist. In [12] führt Alperin ausführlich aus, welche weiteren Zahlen nun noch mit diesen Konstruktionschritten konstruierbar sind. Wir überspringen dies, da uns letztendlich nur interessiert, welche Zahlen mit allen sechs Axiomen konstruierbar sind.

Um mehr Struktur auf Π zu bekommen, nehmen wir Axiom (4) hinzu und nennen dies nun die pythagoräischen Konstruktionen. Wir nehmen auch an, dass die ersten zwei gegebenen Punkte in Π eins und null sind.

Theorem (1). *Sind die Axiome (1) – (3) gegeben, so sind äquivalent:*

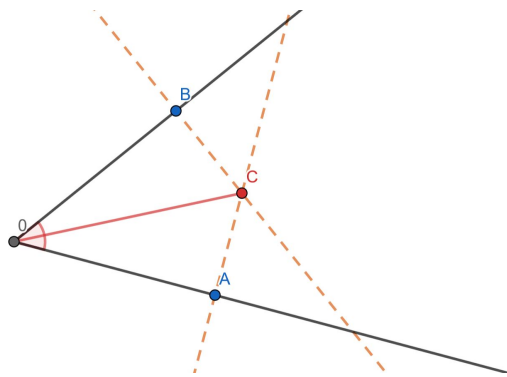
- i) Eine Einheitsstrecke kann auf jeder konstruierten Linie markiert werden.*
- ii) Axiom (4) über Winkelhalbierung gilt.*
- iii) Eine konstruierte Streckenlänge auf einer beliebigen Linie kann auf einer anderen Linie markiert werden.*

Beweis. Wir zeigen nun im Kreisschluss:

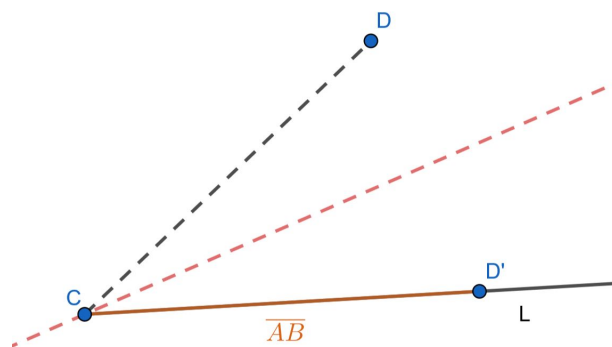
iii) \rightarrow i) : Ist trivial.

i) \rightarrow ii) : Wir zeigen zuerst, dass alle konstruierten Winkel zweigeteilt werden können, wenn wir Einheitslängen auf einem konstruierten Strahl konstruieren können. O.B.d.A. können wir annehmen, dass der Winkel kleiner als 180° ist. Wie vorhin können wir den Winkel in den Ursprungspunkt verschieben und auf jedem Strahl, welche die Winkel einschließen, Einheitslängen markieren, welche uns die Punkte A und B liefern. Im nächsten Schritt legen wir Senkrechte in die Punkte A und B , welche sich im Punkt

C schneiden. Die vier Punkte A, B, C und der Ursprungspunkt 0 geben uns zwei rechtwinklige Dreiecke mit einer gemeinsamen Hypotenuse und zwei Schenkeln, welche sich in 0 bei einer Länge von 1 treffen. Das bedeutet, dass die dritten Seiten gleich sind und somit die Dreiecke kongruent sind. Also: Der Winkel wurde halbiert.



ii) → iii) : Wir nehmen nun an, dass alle konstruierten Winkel halbiert werden können. Wir nehmen auch an, dass eine Strecke \overline{AB} mit einer gewissen Länge konstruiert wurde und ein Strahl L beginnend bei C gegeben ist. Wir können die Strecke \overline{AB} nun so verschieben, dass sie im Punkt C beginnt (Lemma 1). Nun halbieren wir den Winkel zwischen \overline{CD} und dem gegebenen Strahl L . Wir spiegeln anschließend \overline{CD} entlang dieser Winkelhalbierenden. Nun haben wir die Länge \overline{AB} entlang dieses Strahls markiert.



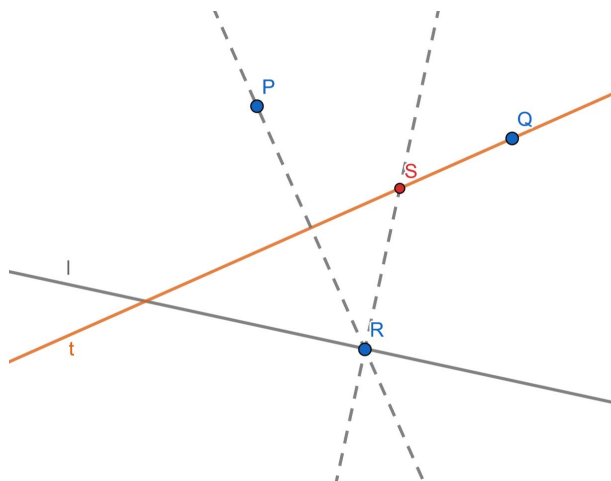
□

Wir können dieses vierte Axiom als Werkzeug verstehen, mit dessen Hilfe wir Punkte auf einem Kreis mit konstruierbarem Mittelpunkt P und einem gegebenen konstruierbaren Radius r , konstruieren können, welche auf einer Linie durch P mit konstruierbarer Steigung liegen. Wir verwenden als Startpunkte $0, 1$ und i . i wird mithilfe der Axiome (1) – (4) konstruiert, indem nur mit 0 und 1 gestartet wird, dann der 90° -Winkel zwischen den Achsen halbiert wird und durch Spiegelung erhalten wir dann die Einheiten auf der y -Achse. Eine weitere

wichtige Folgerung von Axiom (4) ist, dass Strecken bestimmter Längen konstruiert werden können. Das bedeutet, dass Π für jeden konstruierbaren Punkt (a, b) unter $\sqrt{a^2 + b^2}$ abgeschlossen ist.

Um nun zu den euklidischen Konstruktionen zu kommen, fügen wir Axiom (5) hinzu. Die Zahlen, die wir damit konstruieren können, nennen wir die Euklidischen Origami Zahlen ε , welche wir durch die Startpunkte 0 und 1 erhalten können. Mit diesen ersten fünf Axiomen können wir exakt dieselben Zahlen konstruieren wie mit Zirkel und Lineal. Also die kleinste Menge, welche \mathbb{Q} enthält und unter Quadratwurzeln abgeschlossen ist. Der Prozess des Wurzelziehens einer komplexen Zahl $z = re^{i\Theta}$ kann folgendermaßen gesehen werden. Wir halbieren den Winkel Θ und nehmen die Quadratwurzel von r . Natürlich können wir jeden konstruierbaren Winkel halbieren, indem wir Axiom (4) benutzen. Wir können auch schon einige Quadratwurzeln ziehen, z.B.: $\sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$, aber nicht alle. Deshalb werden wir uns nun einige Konsequenzen vom Axiom (5) anschauen und erkennen, dass wir dadurch Abgeschlossenheit unter Quadratwurzeln erhalten.

Betrachten wir nun eine Parabel K , mit Leitlinie l und Brennpunkt P . Axiom (5) erlaubt es uns die Punkte dieser Parabel sowie die Tangenten zu konstruieren. Um das zu sehen, benutzen wir Axiom (5) mit Brennpunkt P und Leitlinie l um die Linie t zu konstruieren, welche durch einen Hilfspunkt Q verläuft und P auf l spiegelt. Die Senkrechte zu t durch den Punkt P schneidet die gegebene Linie l im konstruierbaren Punkt R . Als nächstes konstruieren wir die Senkrechte von l im Punkt R . Der Schnittpunkt dieser Senkrechten mit der Linie t ist der Punkt S .



t ist die Mittelsenkrechte von \overline{PR} , der Punkt S hat den selben Abstand zu P sowie zu R und ist somit auf der Parabel K . Die Linie t ist die Tangente der Parabel im Punkt S , da sie den Winkel $\angle PSR$ halbiert. Denn eine Linie t ist tangential zu einer Parabel K , wenn t den Winkel zwischen der Linie \overline{PS} und der Linie parallel zur Achse von K durch Punkt S halbiert.

Es ist nun einfach eine Parabel zu benutzen, um Quadratwurzeln zu konstruieren. Nehmen wir den Punkt $(0, 1)$, eine Leitlinie l und $y = -1$, dann hat

die Parabel die Gleichung $y = \frac{1}{4}x^2$. Die Tangente an dieser Parabel im Punkt $(x_0, \frac{1}{4}x_0^2)$ hat die Steigung $\frac{1}{2}x_0$. Die Tangentengleichung lautet:

$$y - \frac{1}{4}x_0^2 = \frac{1}{2}x_0(x - x_0)$$

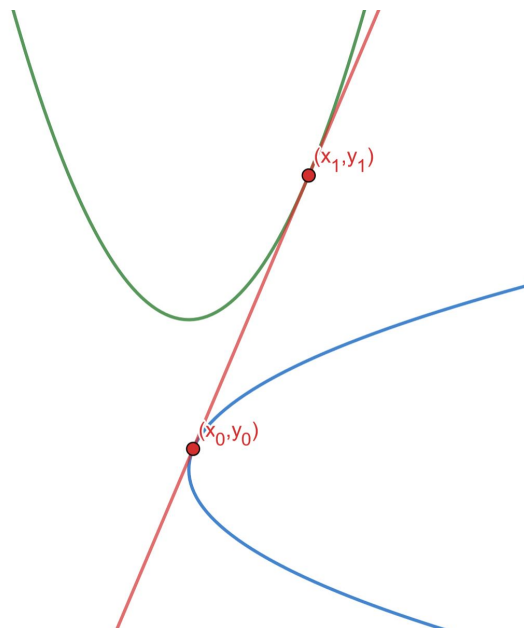
Der Schnittpunkt dieser Tangente mit der Linie $x = 0$ gibt uns den Punkt $Q = (0, -\frac{1}{4}x_0^2)$. Nun benützen wir Axiom (5), mit Brennpunkt $P = (0, 1)$, Leitlinie $y = -1$ und Hilfspunkt $Q = (0, -\frac{1}{4}r)$, um den Punkt auf der Parabel zu konstruieren, welcher die x - Koordinate \sqrt{r} besitzt.

Als Konsequenz können wir alle Quadratwurzeln von komplexen Zahlen in ε konstruieren. Ebenso ist es einfach zu sehen, dass jeder mit Axiom (5) neu konstruierte Punkt nur aus bereits bekannten Operationen und Quadratwurzeln von vorher konstruierten Zahlen entsteht. Deshalb ist die Menge, welche wir mit diesen fünf Axiomen erhalten genau die Menge der Euklidisch konstruierbaren komplexen Zahlen. Somit können wir folgendes Theorem formulieren.

Theorem (2). *Die konstruierbaren Punkte in \mathbb{C} , welche wir durch die Axiome (1) – (5) erhalten, wenn wir mit den Zahlen 0 und 1 starten, also die Menge der Euklidisch konstruierbaren Zahlen, ist die kleinste Teilmenge von \mathbb{C} welche unter Quadratwurzeln abgeschlossen ist.*

Wir nehmen nun abschließend das sechste Axiom hinzu. Wir wir bereits gesehen haben, können wir mit diesem Axiom eine Tangente konstruieren, welche gleichzeitig zu zwei Parabeln tangential liegt. Diese Tangente kann nicht immer konstruiert werden, da sie nicht immer notwendigerweise existiert. Diese sechs Axiome zusammen sind die Konstruktionsaxiome um die sogenannten komplexen Origami - Zahlen \mathbb{O} zu konstruieren. Diese Konstruktionsaxiome erlauben es uns eine reelle Lösung einer kubischen Gleichung mit reellen Koeffizienten in \mathbb{O} zu bestimmen. Um das zu sehen, betrachten wir die Kegelschnitte:

$$(y - \frac{1}{2}a)^2 = 2bx \text{ und } y = \frac{1}{2}x^2$$



Diese Kegelschnitte haben Brennpunkte und Leitlinien, welche mit den obigen Axiomen konstruierbar sind. Betrachten wir nun so eine Tangente, also eine Linie mit Steigung μ , welche durch die Punkte $(x_0, y_0), (x_1, y_1)$ verläuft. Wir müssen noch beifügen, dass man zeigen kann, dass eine konstruierbare Linie nur dann konstruierbar ist, wenn ihre Steigung in \mathbb{O} liegt oder ∞ ist. Durch Differentiation erhalten wir:

$$\begin{aligned}\frac{b}{y_0 - \frac{a}{2}} &= x_1 = \mu \\ y_1 &= \frac{1}{2}\mu^2 \\ x_0 &= \frac{(y_0 - \frac{a}{2})^2}{2b} = \frac{1}{2}b\mu^2\end{aligned}$$

und damit

$$\mu = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} = \frac{\frac{\mu^2}{2} - \frac{a}{2} - \frac{b}{\mu}}{\mu - \frac{b}{2}\mu^2}$$

Vereinfachen wir dies, erhalten wir folgende Gleichung:

$$\mu^3 + a\mu + b = 0$$

Damit sehen wir, dass wir (für reelle Wurzeln) alle kubischen Gleichungen mit reellen konstruierbaren Zahlen $a, b \in \mathbb{O}$ lösen können. Daraus können wir folgern, dass das delische Problem der Würfelverdopplung, also die Konstruktion von $2^{\frac{1}{3}}$ mithilfe der obigen Parabeln lösbar ist, indem man die Gleichung $\mu^3 - 2 = 0$ löst. Ebenso kann man konstruierte Winkel mithilfe der Chebychev - Gleichung $4x^3 - 3x = \cos 3\Phi$ für $x = \cos 3\Phi$ dreiteilen. Um noch die Frage zu beantworten, welche n -Ecke mit Origami konstruierbar sind, hat zum Beispiel Gleason gezeigt, dass wir alle n -Ecke mit $n = 2^a 3^b P_1 P_2 \dots P_s$ konstruieren können, wo die verschiedenen Primzahlen P_i von der Form $2^c 3^d + 1$ sind. Wir erkennen auch hier die Ähnlichkeit zu den mit Zirkel und Lineal konstruierbaren n -Ecken. Der Faktor 3 kommt also davon, dass wir zusätzlich zu quadratischen Gleichungen auch kubische Gleichungen lösen können.

Alperin schließt in [12] mit folgendem Theorem ab, in welchem er nochmals festhält, welche Punkte in \mathbb{C} konstruierbar sind.

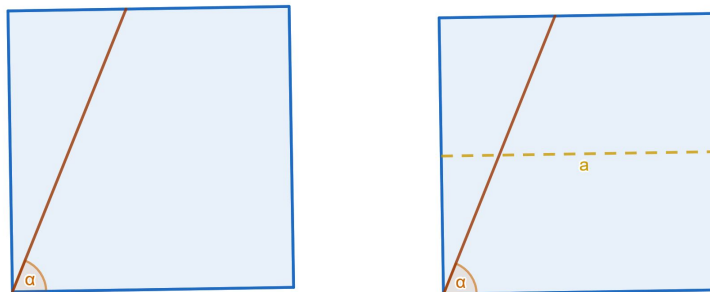
Theorem (3). *Die konstruierbaren Punkte in \mathbb{C} , welche wir durch die Axiome (1) – (6) erhalten, indem wir als Startpunkte 0 und 1 wählen, nennen wir das Feld der konstruierbaren Origami-Zahlen \mathbb{O} . Es ist die kleinste Teilmenge von \mathbb{C} welche unter Quadratwurzeln, Kubikwurzeln und komplexer Konjugation abgeschlossen ist.*

Im nächsten Kapitel werden wir uns die zwei antiken Konstruktionsprobleme ansehen, welche nun mit Hilfe von Origami lösbar werden. Ebenso werden wir uns ein Beispiel zur Konstruktion eines regelmäßigen Fünfecks ansehen. Es bleibt noch anzufügen, dass die Quadratur des Kreises auch mit Origami nicht lösbar wird.

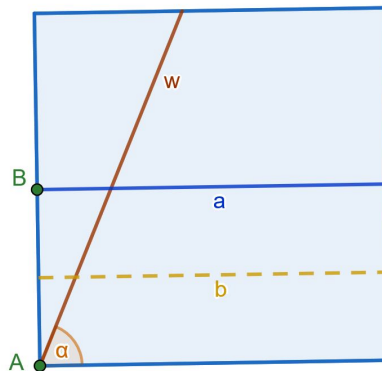
Lösungen von Konstruktionsproblemen durch Origami

Wir haben im vorigen Kapitel gezeigt, dass wir Winkel dreiteilen können. Wir zeigen nun eine Vorgehensweise, wie wir dies machen können und wählen die Konstruktionsanleitung von Abe, auch Abe's Winkeldreiteilung genannt (siehe dazu auch [11]). Sei also ein Blatt Papier gegeben mit einer Linie, die den Winkel α einschließt.

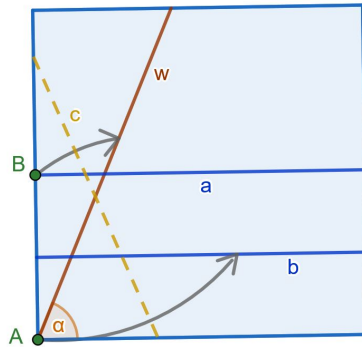
- 1) Im ersten Schritt konstruieren wir die Linie a , indem wir eine Randlinie auf die andere falten, verwenden also Axiom ($H3$).



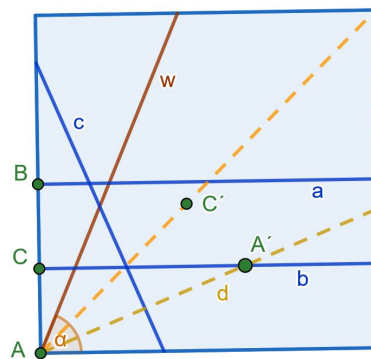
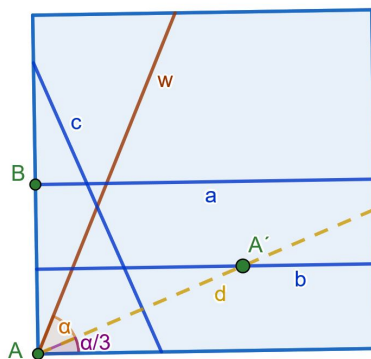
- 2) Im zweiten Schritt konstruieren wir die Linie b , indem wir Linie a auf die Randlinie falten, also erneut Axiom ($H3$) verwenden.



- 3) Im dritten Schritt konstruieren wir die Linie c , indem wir $(H6)$ verwenden und die Punkte A und B auf die Linien b und w falten.

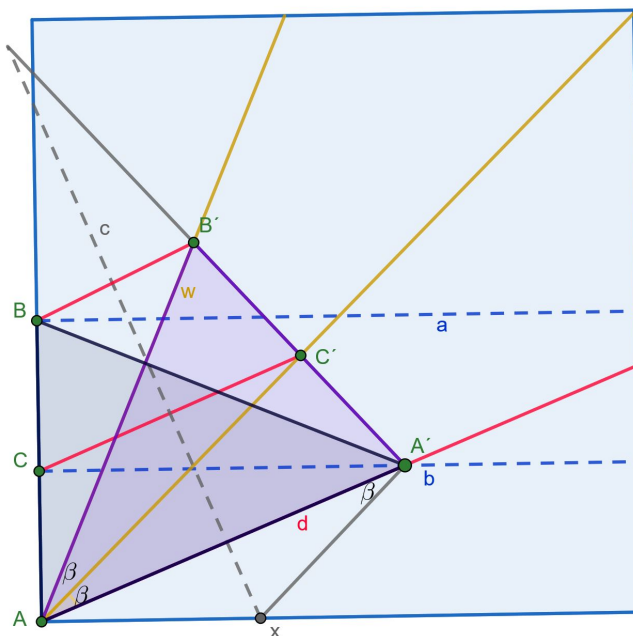


- 4) Im vierten Schritt konstruieren wir die Linie d , indem wir $(H1)$ verwenden und durch die konstruierten Punkte A und A' eine Linie konstruieren. Diese Linie drittelt nun den Winkel α .
Um den Winkel $\frac{2\alpha}{3}$ zu erhalten, konstruieren wir zusätzlich wie A' auch C' und verwenden $(H1)$ indem wir durch die Punkte A und C' eine Linie konstruieren.



Begründung:

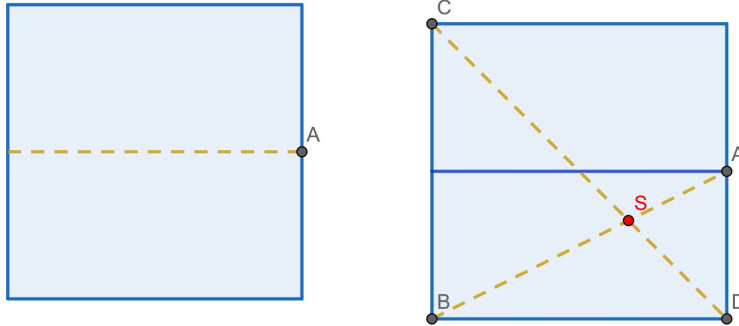
Seien die Punkte A , B und C , wie in der Abbildung unten, die durch die zwei ersten Schritte konstruierten Punkte. Dabei ist C nach Konstruktion der Mittelpunkt der Strecke \overline{AB} . Nun werden durch den dritten Konstruktionsschritt diese Punkte durch die konstruierte Linie c auf die Punkte A' , B' und C' gespiegelt, wobei C' wiederum der Mittelpunkt der Strecke $\overline{A'B'}$ ist. Da nun A' auf der horizontalen Linie b liegt, welche durch den Punkt C verläuft, der Mittelpunkt von \overline{AB} ist, gilt, dass $\overline{AA'} = \overline{BA'}$. Somit ist das Dreieck $\triangle ABA'$ gleichschenkelig. Ebenso muss gelten, dass $\triangle AA'B'$ gleichschenkelig ist. Nun wird der Winkel $\angle A'AB'$ durch die Gerade durch A und C' geteilt, also $\angle A'AC' = \angle C'AB' = \alpha$. Da $\triangle AB'A'$ gleichschenkelig ist, gilt $\angle AA'C' = 90^\circ - \alpha$. Nun ist A' aber eine Spiegelung der Ecke des gegebenen Quadrats, welche ein rechter Winkel ist. Dies bedeutet, dass $\angle XA'A = \alpha$ sein muss und wegen der Spiegelung auch $\angle XAA' = \alpha$ gelten muss. Somit ist der ursprüngliche Winkel α gedrittelt worden in $\beta + \beta + \beta$.



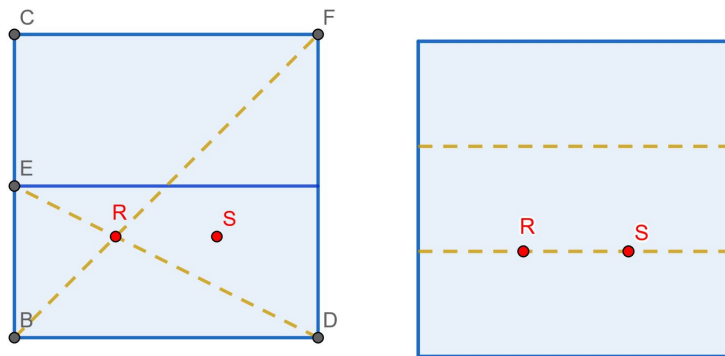
□

Widmen wir uns nun einem zweiten antiken Konstruktionsproblem, nämlich die Verdoppelung des Würfels. Wie im vorigen Kapitel gezeigt, ist dies möglich. Wir werden uns hier die Konstruktionsvorschrift nach Messer [11] anschauen.

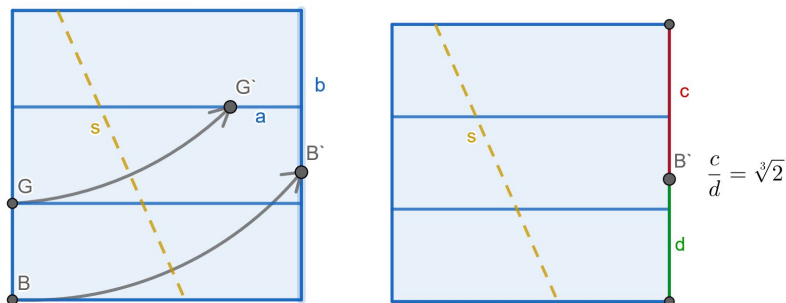
- 1) Wir starten mit einem quadratischen Stück Papier (die Konstruktionsbeschreibung gilt auch für rechteckige Stücke Papier) und teilen es in drei gleiche Teile, indem wir folgendermaßen vorgehen. Wir verwenden zunächst (H3) um die Mittelsenkrechte zu konstruieren. Anschließend verwenden wir (H1), indem wir eine Linie durch die Punkten A und B sowie C und D konstruieren. Den Schnittpunkt dieser Linien nennen wir S .



Wir können nun in ähnlicher Weise den Punkt R konstruieren, indem wir die Linien durch E und D sowie B und F konstruieren. Verwenden wir nun noch einmal $(H1)$ und konstruieren die Linie durch die Punkte R und S , so drittelt diese Linie das Blatt Papier. Um die letzte Linie für die Drittelung des Papiers zu erhalten, verwenden wir $(H3)$.



- 2) Im zweiten Schritt verwenden wir $(H6)$ und konstruieren Linie s , indem wir Punkt B auf Linie b und Punkt G auf Linie a abbilden. Das Verhältnis der Strecke c zur Strecke b beträgt dann $\sqrt[3]{2}$.



Begründung:

Bei der Begründung werde ich mich an [14] anlehnen. Zunächst gehen wir zur Vereinfachung davon aus, dass die Seitenlänge des quadratischen Stücks Papier drei beträgt. Wir sehen zunächst, dass die konstruierte Linie durch die Punkte R und S das Blatt Papier drittelt, indem wir die konstruierten Linien $\overline{BF} := f(x)$ und $\overline{ED} := g(x)$ als Funktionen auffassen und wir $B = (0, 0)$ als Nullpunkt wählen. Also

$$f(x) = x$$
$$g(x) = -\frac{1}{2}x + \frac{3}{2}$$

Berechnen wir nun die Koordinaten des Schnittpunktes R , so erhalten wir

$$x = -\frac{1}{2}x + \frac{3}{2}$$
$$\frac{3}{2}x = \frac{3}{2} \Rightarrow x = 1 \Rightarrow R = (1, 1)$$

Also drittelt \overline{RS} das Blatt. Betrachten wir nun die weiteren Konstruktionsschritte.

Dazu seien $c := \overline{B'F}$, $d := \overline{DB'}$, $e := \overline{ID}$, $f := \overline{IB'}$. Damit gilt $c + d = e + f = 3$. Da nun die Dreiecke $\triangle IDB'$ und $\triangle G'HB'$ ähnlich sind, gilt

$$\frac{e}{f} = \frac{c-1}{1}$$

Daraus folgt mit $f = 3 - e$

$$\frac{e}{3-e} = \frac{c-1}{1}$$
$$e = \frac{3c-3}{c}$$

und mit $e = 3 - f$

$$\frac{3-f}{f} = c-1$$
$$f = \frac{3}{c}$$

Auch gilt, dass $d = 3 - c$. Betrachten wir nun das Dreieck $\triangle IDB'$ und verwenden den Satz von Pythagoras, so erhalten wir

$$f^2 = e^2 + d^2$$
$$\left(\frac{3}{c}\right)^2 = \left(\frac{3c-3}{c}\right)^2 + (3-c)^2$$

Potenzieren wir die quadratischen Ausdrücke und erweitern anschließend mit c^2 erhalten wir

$$c^4 - 6c^3 + 18c^2 - 18c = 0$$

Da c nun offensichtlich nicht 0 ist, können wir die Gleichung durch c dividieren und anschließend multiplizieren wir die Gleichung mit drei und erhalten

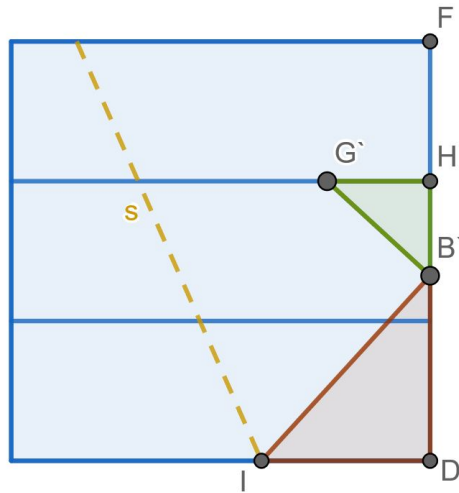
$$3c^3 - 18c^2 + 54c - 54 = 0$$

Diese Gleichung formen wir nun geschickt um und erhalten

$$c^3 = -2c^3 + 18c^2 - 54c + 54 = 2(27 - 27c + 9c^2 - c^3) = 2(3 - c)^3 = 2d^3$$

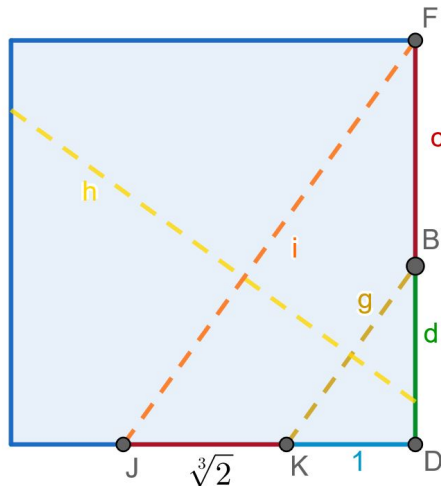
und damit

$$\frac{c}{d} = \sqrt[3]{2}$$



□

Es stellt sich schließlich noch die Frage, wie wir nun die Strecke mit einer Länge von $\sqrt[3]{2}$ konstruieren können. Wir konstruieren hierfür zunächst wie zu Beginn beschrieben den Punkt K , welcher die Seite des Quadrats drittelt. Also $K = 1$. Dann konstruieren wir mit (H1) Linie g . Nun verwenden wir (H2) und konstruieren Linie h , indem wir Punkt B' auf K falten. Im nächsten Schritt verwenden wir (H4), indem wir Linie h auf sich durch Punkt F falten und erhalten so Linie i . Für die Strecke \overline{JK} gilt nun $\overline{JK} = \sqrt[3]{2}$.



Begründung:

Die Begründung erfolgt durch die Verwendung des Strahlensatzes. Es gilt mit $x \geq 0$:

$$\frac{d}{3} = \frac{1}{1+x}$$

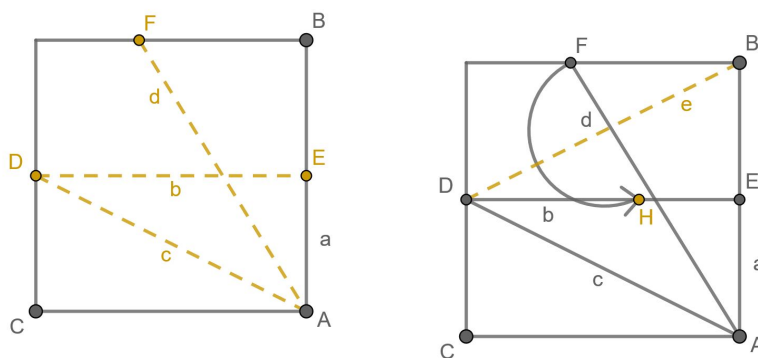
$$d + dx = 3 \Rightarrow x = \frac{3-d}{d} \Rightarrow x = \frac{c+d-d}{d} \Rightarrow x = \frac{c}{d} = \sqrt[3]{2}$$

□

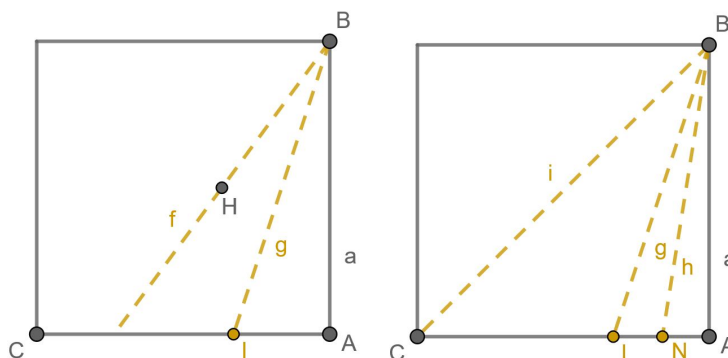
Schließlich wollen wir uns noch ansehen, wie man mit Origami ein regelmäßiges Fünfeck konstruieren kann. Wir wissen, da man mit Origami alle regelmäßigen n -Ecke für $n = 2^\alpha \cdot 3^\beta \cdot p_1 \cdot \dots \cdot p_k$ mit $\alpha, \beta, k \in \mathbb{N}$ und $p_1 \cdot \dots \cdot p_k$ unterschiedliche Fermatzahlen sind, konstruieren können. Ich werde im Folgenden eine exakte Konstruktionsmethode nach David Dureisseix [16] anführen (Konstruktionsmethoden, welche ein regelmäßiges Fünfeck annähern, gibt es sehr viele, exakte Konstruktionen sind schwieriger zu finden). Eine weitere Anleitung für ein annähernd regelmäßiges Fünfeck würde sich in [15] finden.

Wir beginnen mit einem quadratischen Blatt Papier (es gibt auch Faltbeschreibungen für Rechtecke) und halten uns an folgende Konstruktionschritte:

- 1) Wir verwenden (H3) und konstruieren somit Linie b , indem wir zwei Randlinien aufeinander falten. Anschließend konstruieren wir mit Hilfe von (H1) Linie c durch Punkt A und den zuvor konstruierten Punkt D . Dann, mit (H3), konstruieren wir Linie d , indem wir Linie c auf a falten und somit die Winkelhalbierende erhalten.
- 2) Wir konstruieren nun Linie e mit Hilfe von H5, indem wir Punkt F auf Linie b abbilden, wobei Punkt B auf e liegen soll.

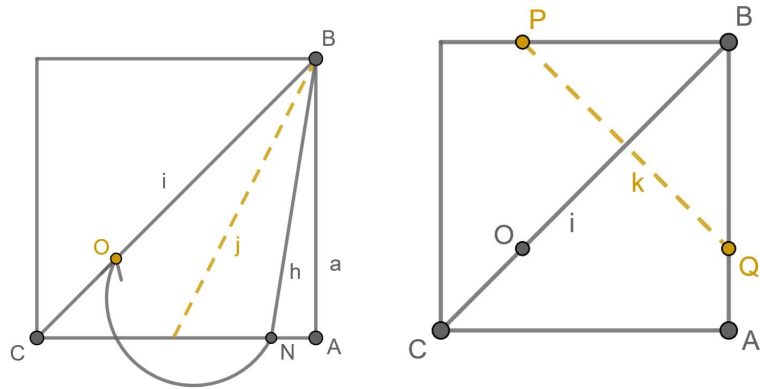


- 3) Wir konstruieren nun Linie f mit (H1) indem wir durch die Punkte B und H falten. Im nächsten Schritt verwenden wir (H3) und falten die Winkelhalbierende zwischen den Linien f und a .
- 4) Nun verwenden wir (H1) und konstruieren Linie i durch die Punkte B und C . Dann mit Hilfe von (H3) konstruieren wir die Winkelhalbierende zwischen den Linien g und a .

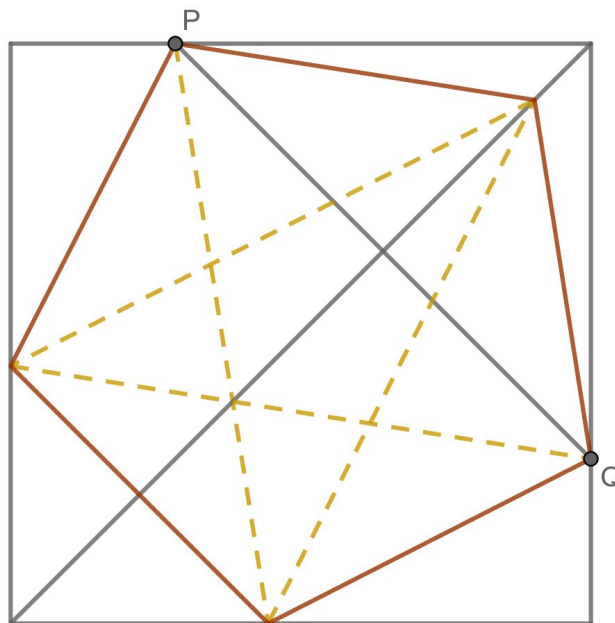


- 5) Im nächsten Schritt bilden wir erneut die Winkelhalbierende Linie j zwischen den Linien i und h mit (H3) und bilden dann mit (H4) Punkt N auf Linie i über j ab und erhalten Punkt O .

- 6) Wir falten mit Hilfe von (H2) Punkt B auf O und erhalten somit Linie k sowie die Punkte P und Q .



- 7) Die nun erhaltene Linie k verwenden wir nun durch mehrmaliges Anwenden von (H5) um den gewünschten fünfzackigen Stern zu erhalten. Durch die Eckpunkte können wir dann die fünf gesuchten Seiten des Fünfecks konstruieren.



Begründung:

Um ein regelmäßiges Fünfeck zu konstruieren, müssen wir den Winkel $\frac{2\pi}{5}$ konstruieren. Um dies zu erreichen, wird bei vielen Konstruktionsbeschreibungen mit Hilfe des Goldenen Schnittes gearbeitet, denn man kann zeigen, dass die Diagonale in einem regelmäßigen Fünfeck genau dem $\frac{1}{2} \cdot (\sqrt{5} + 1)$ -fachen der Seitenlänge entspricht. Wir nehmen im Folgenden zur Vereinfachung eine Kantenlänge des Quadrats von 1 an und werden dann schrittweise eine Linie der Länge

$$l = \frac{1}{\cos\left(\frac{\pi}{20}\right)}$$

konstruieren, denn, wie man zeigen kann, ist l die maximale Länge der Diagonalen des in das Quadrat eingeschriebenen regelmäßigen Fünfecks (siehe dazu [16]). Um nun das regelmäßige Fünfeck zu konstruieren, werden wir zunächst ein Pentagramm mit Diagonallänge l konstruieren.

Im ersten Schritt wird der Winkel $\angle BAD$ halbiert.

Es ist:

$$\tan \angle DAC = \frac{1}{2}$$

und

$$\angle BAF = \angle FAD = \frac{1}{2} \cdot \angle BAD = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{\pi}{2} - \angle DAC\right)$$

Wir können daraus berechnen, dass

$$\tan(\angle BAF) = \frac{(\sqrt{5} - 1)}{2} = \overline{BF}$$

ist. Dieses Ergebnis zeigt uns, dass die Seite im Verhältnis des Goldenen Schnittes geteilt wurde (siehe dazu auch [17]).

Durch die Faltungen im zweiten Schritt erhalten wir:

Da $\cos\left(\frac{\pi}{5}\right) = \frac{1}{\sqrt{5}-1}$ sowie $\overline{BE} = \frac{1}{2}$ gilt, folgt

$$\overline{BF} = \overline{BH} = \frac{(\sqrt{5} - 1)}{2} = \frac{1}{2 \cdot \cos\left(\frac{\pi}{5}\right)} = \frac{\overline{BE}}{\cos\left(\frac{\pi}{5}\right)}$$

Daraus können wir nun schließen:

$$\cos(\angle HBE) = \frac{\overline{BE}}{\overline{BH}} = \cos\left(\frac{\pi}{5}\right)$$

$$\angle HBE = \frac{\pi}{5}$$

Im dritten Schritt durch Winkelhalbierung des Winkels $\angle HBE$ erhalten wir

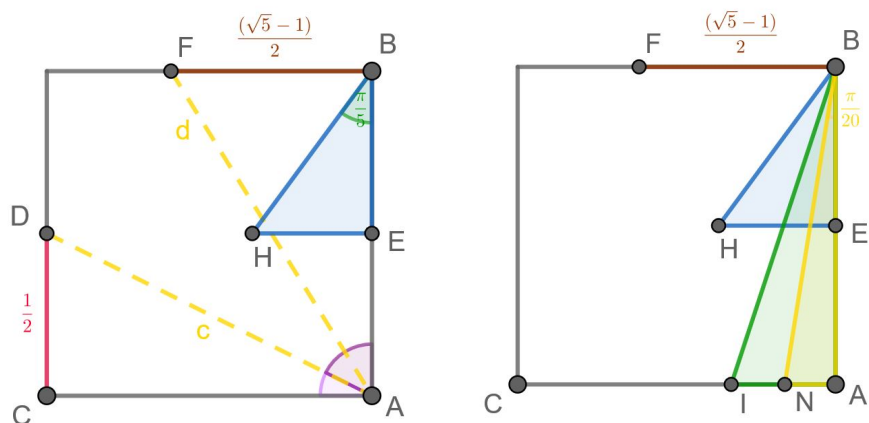
$$\angle IBA = \frac{\pi}{10}$$

Durch erneute Winkelhalbierung von $\angle IBA$, erhalten wir

$$\angle NBA = \frac{\pi}{20}$$

$$\overline{BN} = \frac{1}{\cos\left(\frac{\pi}{20}\right)}$$

Dies ist nun genau die gesuchte Länge l , welche der Diagonalen unseres regelmäßigen Fünfecks entspricht. Die nächsten Schritte dienen nun dazu, diese Diagonale an die richtige Position zu bekommen. Es fällt uns auf, dass wir das Konstruktionsaxiom (H6) nicht benötigt haben. Wie wir bereits wissen, sind regelmäßige Fünfecke mit Zirkel und Lineal konstruierbar. Das ist auch der Grund, warum wir mit den ersten fünf Konstruktionsaxiomen auskommen.



Anwendbarkeit von Origami im Schulunterricht

In diesem letzten Kapitel wollen wir nun kurz auf den schulischen Aspekt von Origami eingehen. Wir wissen, dass Origami im herkömmlichen Mathematik- bzw. Geometrieunterricht selten bis gar nicht zum Einsatz kommt und vorwiegend die Konstruktion mit Zirkel und Lineal bevorzugt wird. Vorteile von Zirkel und Lineal sind offensichtlich, lassen sich damit wichtige geometrische Operationen einfach und in beliebiger Größe auf einem Blatt Papier konstruieren. Würde Origami benutzt, so müssten Schüler das Blatt Papier falten, was zu Problemen führt, wenn die Schüler ein Mathematikheft benutzen oder für die Konstruktion nur einen Teil des Blattes verwenden möchten. Jedoch sollte Origami deshalb nicht schon auf das Abstellgleis geschoben werden. Da ich in dieser Arbeit ausschließlich auf ebene Faltungen eingegangen bin und im Unterricht natürlich dreidimensionale Faltungen ebenfalls möglich sind und vielfach auch ausschließlich verwendet werden, werden wir im Folgenden unter Origami auch die dreidimensionale Faltungen miteinbeziehen. Es gibt einige Publikationen, welche den Nutzen von Origami beschreiben, der durch wissenschaftliche Experimente und Beobachtungen von Schülern beurteilt wurde. Ich möchte hier auf einen solche Artikel eingehen, nämlich auf [13]. Ein ebenfalls interessanter Artikel von Chen [21] beschäftigt sich beispielsweise über Origami und seine Vorteile im Unterricht mit Schwerhörigen oder Gehörlosen. Auf diesen Artikel möchte ich hier nicht eingehen.

In [13] wird beschrieben, dass es zunehmend Studien über die Zusammenhänge von mathematischen Fähigkeiten und räumlichem Vorstellungsvermögen gibt. Demnach beeinflusst das räumliche Vorstellungsvermögen bestimmte Aspekte der numerischen Verarbeitung im Gehirn. Dieses räumliche Vorstellungsvermögen kann durch Origami verbessert werden um dadurch die Entwicklung der numerischen Verarbeitung im Gehirn zu unterstützen.

Da es lange Zeit keine einheitliche Definition von räumlichem Vorstellungsvermögen gab, einigte man sich auf ein zweidimensionales Klassifizierungssystem, welches auf Newcombe und Shipley basiert. Dabei wird die eine Dimension in eine intrinsische bzw. extrinsische und die andere in eine statische bzw. dynamische Dimension unterteilt. Also erhalten wir dadurch folgende vier räumliche Fähigkeiten:

- i) intrinsisch und statisch: Objekte wahrnehmen
- ii) intrinsisch und dynamisch: komplexe Objekte aus kleineren, zwei- oder dreidimensionalen Transformationen erzeugen, mentale Rotation
- iii) extrinsisch und statisch: Verständnis abstrakter, räumlicher Konzepte (z.B.: das Lot)
- iiii) extrinsisch und dynamisch: Visualisierung von Objekten aus einem anderen Blickwinkel (z.B.: Drei-Berge-Aufgabe von Piaget)

Ebenfalls wurde der Begriff der mathematischen Schwierigkeiten häufig nicht klar definiert, da diese ein weniger starkes Problem darstellen als Dyskalkulie. Dennoch kommen mathematische Schwierigkeiten viel häufiger vor als Dyskalkulie und ein Subtyp von diesen Schwierigkeiten stellen die räumlichen Fähigkeiten dar. Deshalb kann die Verbesserung dieser räumlichen Fähigkeiten, eben etwa

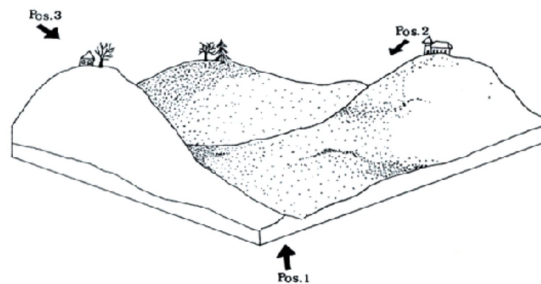


Abbildung 9: Drei-Berge-Aufgabe von Piaget

durch Origami, die mathematischen Schwierigkeiten verringern. Aufgaben mit Origami sind eine Kombination von mentaler Rotation, mentaler Faltung und motorischer Aktivität. Taylor und Hutton (2013) haben dies näher untersucht und man kann zusammenfassend sagen, dass alle Schüler, welche mit Origami übten, im Bereich der räumlichen Fähigkeiten signifikant besser abschnitten als die Kontrollgruppe. Man muss aber bemerken, dass bei vielen solcher Experimenten die Anzahl der Schüler limitiert war, also man trotzdem mit vorschnellen Schlüssen vorsichtig sein sollte. Was man aber auf alle Fälle festhalten muss, ist der Aspekt der zusätzlichen Motivation der Schüler, da Origami die Mathematik, insbesondere die Geometrie, nochmals anschaulicher und erlebbarer macht.

Wir können also zusammenfassend festhalten, dass Origami, besonders die dreidimensionalen Faltungen, die räumlichen Fähigkeiten eines Schülers positiv beeinflusst. Diese Fähigkeit ist besonders im gesonderten Geometrieunterricht sehr wichtig, weniger im herkömmlichen Mathematikunterricht, wo solche Aufgaben, die das räumliche Vorstellungsvermögen betreffen, seltener anzutreffen sind. Wobei man Origami aber auf alle Fälle im Mathematikunterricht einbauen kann, ist die Verknüpfung der geometrischen Konstruktionen mit Zirkel und Lineal, also beispielsweise die Halbierung des Winkels, die Konstruktion einer Mittelsenkrechten, usw. mit den entsprechenden Konstruktionen mit Origami. Dabei lernen die Schüler die unterschiedlichen Konstruktionsmöglichkeiten kennen und können somit ein tieferes Verständnis dafür entwickeln. Abschließend möchte ich nochmals betonen, dass Origami den Mathematik- und Geometrieunterricht sehr gut ergänzen kann und es wünschenswert wäre, wenn auch Origami mehr Einzug in Schulbücher bzw. in den Unterricht findet.

Literaturverzeichnis

- [1] **Volkert, Klaus**
Vorlesungsskript: Geschichte der geometrischen Konstruktionsprobleme,
Köln, 2007
<http://docplayer.org/24773601.html>,
Eingesehen am 30.04.2018
- [2] **Fischer, Gerd**
Lehrbuch der Algebra,
München, 2011 [378 - 392]
- [3] **Hillebrandt, Gert**
Konstruktionen mit Zirkel und Lineal,
http://www.dr-gert-hillebrandt.de/mathe_schule.htm,
Eingesehen am 30.04.18
- [4] **Stroth, Gernot**
Elementare Algebra und Zahlentheorie;
Basel, 2012 [113 - 121]
- [5] <https://de.wikipedia.org>
Konstruktion mit Zirkel und Lineal,
Eingesehen am 30.04.18
- [6] **Deissler, R.**
Einführung in die Geometrie SS03,
Freiburg, 2003
<https://home.ph-freiburg.de/deisslerfr/geometrie>,
Eingesehen am 30.04.18
- [7] **Euklid**
Elemente,
http://www.opera-platonis.de/euklid/Euklid_Stoicheia.pdf,
Eingesehen am 20.04.18
- [8] **Netzer, Tim**
Algebra Vorlesungsskript WS 2017/18 und SS 2018,
Innsbruck, 2017

- [9] **Stumpf, Florian**
Die Transzendenz von e und π - Ausarbeitung zum Vortrag Überraschungen und Gegenbeispiele in der Analysis - SS 2009,
 Heidelberg, 2009
<https://www.mathi.uni-heidelberg.de/~thaeter/surprises/Trans12Mai.pdf>,
 Eingesehen am 20.05.18
- [10] **O'Rourke, J.**
Origami. In How to Fold It: The Mathematics of Linkages, Origami and Polyhedra,
 Cambridge, 2011 [55 - 56]
- [11] **Demaine, E. und O'Rourke, J.**
Geometric Constructibility. In Geometric Folding Algorithms: Linkages, Origami and Polyhedra,
 Cambridge, 2007 [285 - 291]
- [12] **Alperin, Roger C.**
A Mathematical Theory of Origami Constructions and Numbers. In: New York Journal of Mathematics,
 New York, 2000 [119 - 133]
- [13] **Krisztián, Á.; Bernáth, L.; Gombos, H.; Vereczkei, L.**
Developing numerical ability in children with mathematical difficulties using Origami. In: Perceptual and Motor Skills: Perception,
 Budapest, 2015 [233 - 241]
- [14] **Henn, Hans-Wolfgang**
Origamics - Papierfalten mit mathematischem Spürsinn. In: Die neue Schulpraxis (erweiterte Version),
 Dortmund, 2003
http://www.mathematik.uni-dortmund.de/ieem/_personelles/people/henn/origa_hd.pdf,
 Eingesehen am 20.06.18
- [15] **Geretschläger, Robert**
Arbeitsblätter zum Thema Falten regelmäßiger Vielecke für den Unterricht ab der Sekundarstufe I,
 Graz, 2010
<http://www.brgkepler.at/~geretschlaeg/tsblaetter>,
 Eingesehen am 26.06.18
- [16] **Dureisseix, David**
Folding optimal polygons from squares. In: Mathematics magazine, Mathematical Association of America,
 New York, 2006 [272-280]
- [17] **Werner, Jochen**
Der goldene Schnitt,
<http://num.math.uni-goettingen.de/werner/gold.pdf>,
 Eingesehen am 09.07.18

- [18] **Gesamte Rechtsvorschrift für Lehrpläne – allgemeinbildende höhere Schulen**
<https://www.ris.bka.gv.at>,
Eingesehen am 13.07.2018
- [19] **Lister, David**
Die Geschichte des Papierfaltens - Eine Deutsche Perspektive,
<https://papierfalten.de/documents/geschichte/papierfalten-deutschland.pdf>,
Eingesehen am 16.07.18
- [20] **Walter, Rolf**
Einführung in die Analysis 1,
Berlin, New York, 2007 [110 - 111]
- [21] **Chen, Kaili**
Math in Motion: Origami Math for Students who are deaf and hard hearing
Oxford, 2005

Abbildungsverzeichnis

1	https://www.zvab.com/euklid-elemente/erstaussgabe	5
2	http://www.mathepedia.de/Siebzeck.html	29
3	www.origami-resource-center.com	36
4	https://origamiusa.org	36
5	www.britishorigami.info	36
6	www.crcpress.com	37
7	www.geo.de/geolino/basteln	38
8	www.kreanym.com	39
9	www.lern-psychologie.de	66