1 Kurvendiskussion

1.1 Ein wenig Theorie. Teil 1: Polynomfunktionen

Die 'einfachsten' Beispiele von Funktionen für eine Kurvendiskussion sind die Polynomfunktionen, also Funktionen wie

$$p : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\, t \mapsto 3\,t^4 - (6+\pi)\,t^3 + 2\,\pi\,t^2\,,$$

wobei jeder reellen Zahl t eine reelle Zahl $p(t)$ zugeordnet wird. p bezeichnet die Funktion, t ihre Variable oder aber auch eine konkrete Zahl und $p(z)$ die Auswertung der Funktion an der Stelle $z \in \mathbb{R}$. Man sagt auch kurz *Polynom* statt *Polynomfunktion*. (Streng genommen wäre $(0, 2-\pi, -6, \pi, 3)$ das Polynom von p.) Die größte Potenz von t in p ist 4, d.h. ihr *Grad* ist 4. Und f ist *homogen*, weil $a_0\,t^0$ (also ein Vielfaches von 1) nicht dazu addiert ist. Nun zu einigen Eigenschaften dieser Funktionen:
a) Eine Polynomfunktion vom Grad n hat immer n Nullstellen (in den komplexen Zahlen $\mathbb{C}$), wobei es *mehrfache Nullstellen* geben kann. Für das obige Beispiel gilt:

$$p(t) = 3\,\left(t - \frac{\pi}{3}\right)\,(t-2)\,t^2\,,$$

d.h. die Nullstellen von p liegen bei $t = +\frac{\pi}{3}$, $t = +2$ und $t = 0$ (Doppelte Nullstelle). In der Tat sieht man relativ schnell, dass

$$p(t) = 3\,t^2\,\left(t^2 - \left(2 + \frac{\pi}{3}\right)\,t + \frac{2\,\pi}{3}\right)$$

gilt und damit muss man nur mehr die quadratische Gleichung

$$t^2 - \left(2 + \frac{\pi}{3}\right)\,t + \frac{2\,\pi}{3} = 0$$

lösen um an die Nullstellen zu kommen. Natürlich machen Sie dies jetzt als Übung. Alternative, wenn Sie die Nullstelle $t = 2$ erraten, dann können Sie die Nullstelle $\frac{\pi}{3}$ mit Hilfe der Polynomdivision

$$\begin{array}{lll}
\left(t^2 - \left(2 + \frac{\pi}{3}\right)\,t + \frac{2\,\pi}{3}\right) : (t-2) = t - \frac{\pi}{3} & & \\
\underline{-(t^2 \qquad - 2\,t\quad)} & & \\
\qquad -\frac{\pi}{3}\,t \qquad + \frac{2\,\pi}{3} & & \\
\underline{\quad -\left(-\frac{\pi}{3}\,t \qquad + \frac{2\,\pi}{3}\right)} & & \\
\qquad\quad 0 \qquad\qquad 0 & &
\end{array} \tag{1}$$

berechnen. Eine reelle und eine komplexe Polynomfunktion mit zwei komplexen Nullstellen sind zum Beispiel durch

$$g(x) = x^2 + 1 = (x - \mathrm{i})\,(x + \mathrm{i}) \qquad \text{und} \qquad h(z) = z^2 - 2\mathrm{i}\,z - 1 = (z - \mathrm{i})^2$$

gegeben. g hat also keine reelle Nullstelle; in der Tat gilt offensichlicherweise $g(x) \geq 1$. (Wir betrachten natürlich nur Kurvendiskussionen von reellen Polynomfunktionen.)
b) Eine (reelle) Polynomfunktion ist immer stetig und erfüllt immer

$$\lim_{t \to +\infty} p(t) = \infty \qquad \text{oder} \qquad \lim_{t \to +\infty} p(t) = -\infty$$

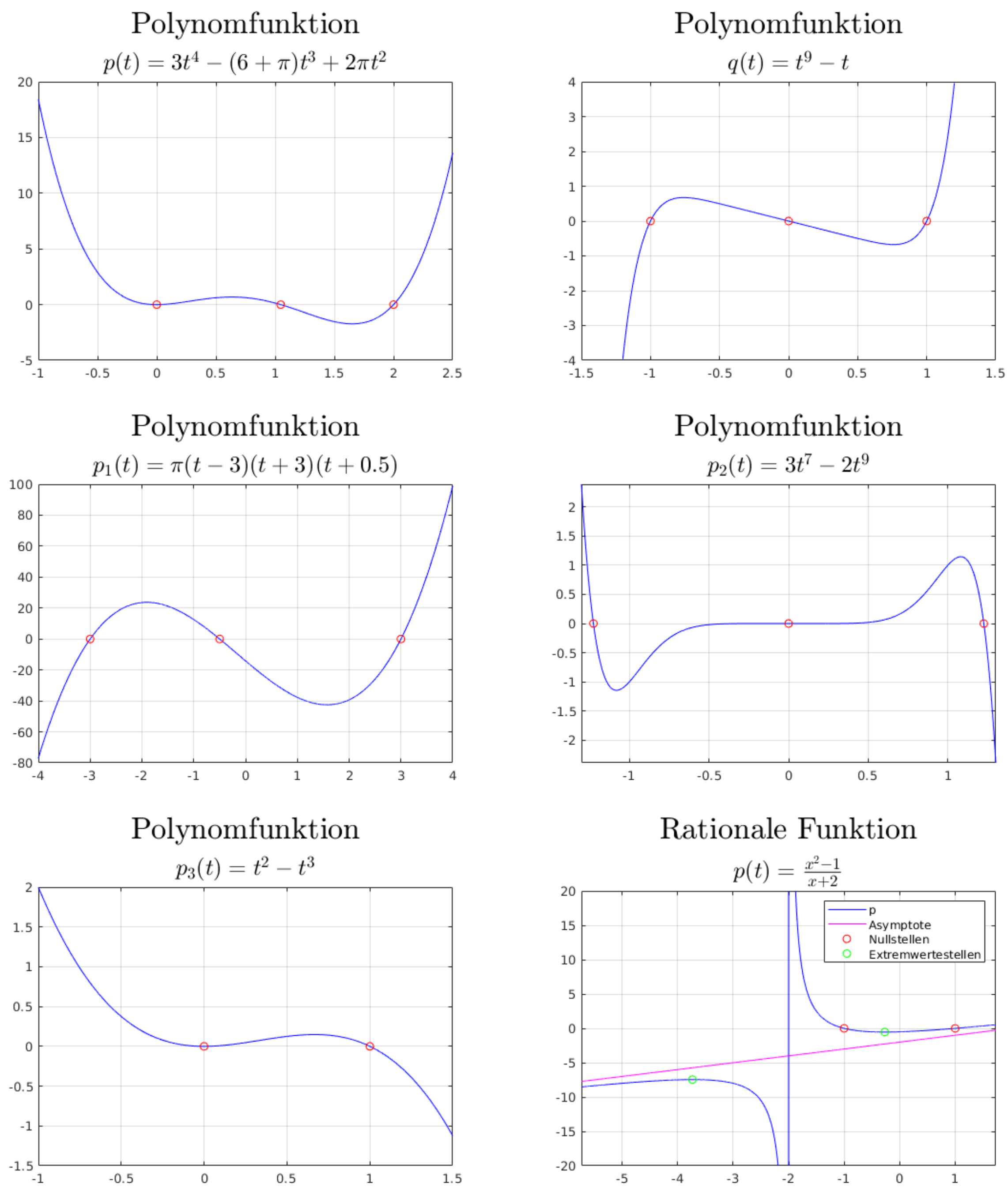

Figure 1: Zur Diskussion von Funktionen.

und

$$\lim_{t\to-\infty} p(t) = \infty \qquad \text{oder} \qquad \lim_{t\to-\infty} p(t) = -\infty$$

Mit diesem Wissen, d.h. Stetigkeit, Nullstellen und Grenzerte für $t \to \pm\infty$, können wir jede Polynomfunktion qualitative zeichnen. Das müssen Sie können!

Betrachten wir nun eine andere Polynomfunktion und zwar

$$q(t) = t^9 + a\,t + b\,,$$

wobei a und b gegebene reelle Zahlen sein sollen. Zuerst stellen wir uns die Frage für welche a und

b gibt es Extremstellen? Aus

$$q'(t) = 9\,t^8 + a\,, \qquad q''(t) = 72\,t^7\,, \qquad q'''(t) = 504\,t^6\,, \ldots$$

folgt für die möglichen Extremstellen

$$t_0 = \left(-\frac{a}{9}\right)^{\frac{1}{8}} = \sqrt{\sqrt{\sqrt{-\frac{a}{9}}}}\,,$$

d.h. ein Extremwert kann nur dann existieren, wenn a negative oder gleich 0 ist (8 ist gerade!). Für $a < 0$ bzw. $a = 0$ folgt $t_0 > 0$ bzw. $t_0 = 0$ und damit $q''(t_0) > 0$ bzw. $q''(t_0) = 0$. Damit muss für $a < 0$ (und jedes beliebige $b \in \mathbb{R}$) bei t_0 immer ein Minimum liegen. Für $a = 0$ liegt ein Sattelpunkt bei t_0. Falls $b = 0$ und $a \leq 0$ gilt, dann können wir die Nullstellen von q berechnen. Wegen

$$q(t) = t^9 - a\,t = t\,(t^8 + a) \qquad \text{folgt} \qquad t_1 = 0\,, \quad t_{2,3} = (-a)^{\frac{1}{8}}\,.$$

Für den Fall $a = 0$ ist $t_1 = 0$ eine 9-fache Nullstelle. Siehe auch Abbildung 1. In Abbildung 1 haben wir den Graphen von einige Polynomfunktionen dargestellt.

Zum üben der Kurvendiskussion können Sie folgende Polynomfunktionen verwenden (vgl. Abbildung 1):

$$p_1(t) = \pi\,(x-3)\,(x+3)\,(x+0.5) = \pi\,t^3 + \frac{\pi}{2}\,t^2 - 9\,\pi\,x - \frac{9\,\pi}{2}\,,$$

$$p_2(t) = 3\,t^7 - 2\,t^9 = 3\,t^7\,\left(1 - \sqrt{\frac{2}{3}}\,t\right)\,\left(1 + \sqrt{\frac{2}{3}}\,t\right) = -2\,t^7\,\left(t - \sqrt{\frac{3}{2}}\right)\,\left(x + \sqrt{\frac{3}{2}}\right)$$

und

$$p_3(t) = t^2 - t^3 = -t^2\,(t-1)\,.$$

Zuvor verwendeten wir t als Variable, nun nehmen wir x als Variable.

Beispiel 1 *Es sei $a > 0$ und $b \in \mathbb{R}$. (Sie können sich auch bestimmte Zahlen wählen und das Beispiel durchrechen). Bestimme die Extremstellen der Funktion*

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\, x \mapsto a\,(b-x)^2\,.$$

Die erste Ableitung von f ergibt sich als

$$f'(x) = 2\,a\,(b-x)\,(-1) = 2\,a\,(x-b) \qquad ((-1)\ \textit{durch die innere Ableitung!})$$

Wir sehen, dass $f'(x) > 0$ für $x > b$ und $f'(x) < 0$ für $x < b$ gilt. Zeichnen Sie sich den Graphen von f auf. Damit folgt, dass bei $x = b$ ein Minimum liegt. (Für die erste Ableitung folgt $f'(b) = 0$ und für die zweite Ableitung folgt $f''(x) = 2\,a > 0$ was auch zeigt, dass bei $x = b$ ein Minimum liegt.) Bemerkung: Für $a < 0$ folgt, dass bei $x = b$ ein Maximum liegt. Mehr noch für $a \neq 0$ haben wir genau ein Extremum und damit ein globales Extremum.

Beispiel 2 *Was sollen wir tun falls wir die Bedingungern eines Sattelpunkt vergessen haben? Der Prototyp eines Sattelpunktes (bei $x = 0$) ist durch die Funktion*

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\, x \mapsto x^3$$

gegeben. Die ersten drei Ableitungen sind gegeben durch

$$f'(x) = 3\,x^2 \geq 0\,, \qquad f''(x) = 2 \cdot 3 \cdot x = 6\,x \qquad \textit{und} \qquad f'''(x) = 6 > 0\,.$$

Der Sattelpunkt liegt bei $x_0 = 0$ und dort gilt:

$$f'(x_0) = 0\,, \qquad f''(x) = 0 \qquad \textit{und} \qquad f'''(x) \neq 0\,.$$

Beispiel 3 *Wie ist ein Wendepunkt definiert? Geben Sie ein einfaches Beispiel an. Ein Wendepunkt bei x_0 ist fast ein Sattelpunkt bei x_0, der Unterschied besteht darin, dass $f'(x_0) \neq 0$ gilt. Keine horizontale Tangente also man kann es nicht mit einem Extrempunkt verwechseln. Wir machen den Ansatz eines Polynoms vom Grad 3 also*

$$f(x) = a_0 + a_1\,x + a_2\,x^2 + a_3\,x^3\,.$$

Die Ableitung unseres Ansatzes lautet:

$$f'(x) = a_1 + 2\,a_2\,x + 3\,a_3\,x^2\,.$$

Angenommen $x_0 = 0$ ist eine Stelle eines Wendepunktes, dann muss $f'(x_0) = f'(0) \neq 0$ gelten also $a_1 \neq 0$. a_0 und a_2 setzen wir Null, damit es möglichst einfach ist, also $f(x) = a_1\,x + a_3\,x^3$ mit $a_1,\, a_3 \neq 0$. Für dieses Beispiel gilt:

$$f'(x_0) = a_1 + 3\cdot a_3\cdot 0^2 = a_1 \neq 0\,, \qquad f''(0) = 2\cdot 3\cdot a_3\cdot 0 = 0 \qquad \textit{und} \qquad f'''(x) = 6\cdot a_3 \neq 0\,,$$

weil wir $a_1,\, a_3 \neq 0$ angenommen haben. Damit liegt bei $x = 0$ tatsächlich ein Wendepunkt. Konkrete Beispiele sind gegeben durch

$$f(x) := 3\,x + 5\,x^3\,, \qquad f(x) := -3\,x + 5\,x^3\,, \qquad f(x) := 3\,x - 5\,x^3 \qquad \textit{und} \qquad f(x) := -3\,x - 5\,x^3\,.$$

Jetzt sollten Sie noch ein altes Testbeispiel rechnen.

Aufgaben 1 *Führen Sie eine Kurvendiskussion der Funktion $f : D \to \mathbb{R},\, x \mapsto (2-x)\,(x-1)\,x$ durch. (Alle Ergebnisse* **mit ausreichender Begründung**.*)*

- *Bestimmen Sie den Definitionsbereich $D \subset \mathbb{R}$, die Grenzwerte $\lim_{x\to\infty} f(x)$, $\lim_{x\to-\infty} f(x)$ und (falls vorhanden) Polstellen und Nullstellen.*
- *Weiters bestimmen Sie (falls vorhanden) Maxima und Minima, Sattelpunkte und Wendepunkte.*
- *Skizzieren Sie den Graphen (≡Kurve) von f qualitative.*
- *Geben Sie den Definitionsbereich der Funktion $g(x) := \frac{f(x)}{(x-2)\,x}$ an und skizzieren Sie ihren Graphen.*

1.2 Ein wenig Theorie. Teil 2: Stetigkeit und stetige Erweiterung von Funktionen

Um den letzten Teil der Aufgabe 1 lösen zu können benötigen wir noch etwas Theorie. Wenn Sie diese Lernhilfe zum ersten mal lesen, dann können Sie diesen Abschnitt überspringen.

Wir wiederholen nun den Begriff der Stetigkeit einer Funktion, welche eine Teilmenge der reellen Zahlen in die reellen Zahlen abbildet.

Definition 1 *Eine Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ heißt* stetig *an der Stelle $z \in D$ genau dann, wenn*

- *f an der Stelle z definiert ist ($f(z)$ ist definiert) und*
- *falls $\lim_{x\to z} f(x) = f(z)$ gilt, d.h. für jede Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von reellen Zahlen die gegen z konvergiert, konvergiert $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ gegen $f(z)$.*

Eine Funktion die in jedem Punkt ihres Definitionsbereichs D stetig ist, heißt stetige Funktion.

Definition 2 *Es sei* $g : A \to \mathbb{R}$ *eine stetige Funktion,* $z \in \mathbb{R}\backslash\{A\}$ *(z ist reell, liegt aber nicht in A) und* $D := A \cup \{z\}$*.* $f : D \to \mathbb{R}$ *heißt die stetige Erweiterung von g, falls*

- *es ein reelles w gibt, sodass* $\lim_{x\to z} f(x) = w$ *und*
- $f(z) := w$.

Beispiel 4 *Gegeben ist die stetige Funktion* $g(x) := x^2 - x$ *für* $x \in \mathbb{R}$ *und die Funktion* $f(x) := \frac{g(x)}{x}$ *für* $x \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$*. Für* $x \neq 0$ *stimmen beide Funktionen f und* $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x - 1$ *überein, weil*

$$f(x) = \frac{x^2 - x}{x} = x - 1 =: h(x) \qquad \textit{für alle } x \in \mathbb{R}\backslash\{0\}\,.$$

Mit anderen Worten, der Graph von h ist eine Gerade (die auf ganz $\mathbb{R}$ *definiert ist) und f ist dieselbe Gerade mit einer Lücke im Punkt* $(0, h(0))$ *auf der Geraden bzw. einer Lücke bei der Stelle* $x = 0$*. Weil h stetig ist können wir die Funktion f im Punkt 0 stetig erweitern, also*

$$f(x) := \frac{x^2 - x}{x} \qquad \textit{für alle } x \in \mathbb{R}\backslash\{0\} \qquad \textit{und} \qquad f(0) := h(0) = -1\,.$$

Nach der stetigen Erweiterung von f sind f und h gleich, nur ihre Definitionen sind anders (oder sehen anders aus).

Beispiel 5 *Falls möglich berechne die stetige Erweiterung der Funktion definiert durch*

$$f(x) := \frac{(x^2 - 4)\,(x - 2)}{4\,(x + 2)}$$

und zeichne ihren Graphen.

Wegen $(a^2 - b^2) = (a - b)\,(a + b)$ *folgt*

$$f(x) = \frac{(x^2 - 4)\,(x - 2)}{4\,(x + 2)} = \frac{(x - 2)\,(x + 2)\,(x - 2)}{4\,(x + 2)} = \frac{1}{4}\,(x - 2)^2 =: h(x)$$

existiert die Stetige Erweiterung von f und ist die quadratische Funktion:

$$h : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\, x \mapsto \frac{1}{4}\,(x - 2)^2\,.$$

h hat seine doppelte Nullstelle bei $x = 2$*, wo auch ihr Minimum liegt. Die Parabel ist nach oben geöffnet und ihr Scheitel liegt im Punkt* $(2, 0)$*. Die Funktion f ist überall eine Parabel, außer bei* $x = -2$ *ist Sie nicht definiert, d.h. ihr Graph hat im Punkt* $(-2, h(-2))$*, also* $(-2, 4)$*, eine Lücke. Jetzt zeichnen Sie noch die Graphen von f und h.*

Beispiel 6 *Falls möglich berechne die stetige Erweiterung der Funktion definiert durch*

$$f(x) := \frac{x^2 + 4}{x + 2}$$

und zeichne ihren Graphen.

Wir können nun den Zähler nicht wie vorhin zerlegen. Achtung: $(x^2 + 4) \neq (x - 2)\,(x + 2)$*. Gibt es trozdem eine stetige Erweiterung? Nein. Wenn* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *eine Folge von Zahlen mit* $x < -2$ *ist, die monoton gegen* -2 *konvergiert, dann folgt*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_n^2 + 4}{x_n + 2} = \frac{\lim_{n\to\infty}(x_n^2 + 4)}{\lim_{n\to\infty}(x_n + 2)} = \frac{8}{(\lim_{n\to\infty} x_n) + 2} = \infty\,.$$

Weil keine Funktion den Wert ∞ *annehmen kann* ($\infty \notin \mathbb{R}$)*, gibt es keine stetige Erweiterung.*

1.3 Ein wenig Theorie. Teil 3: Rationale Funktionen

Betrachten wir die rationale Funktion

$$f : D \to \mathbb{R},\, x \mapsto \frac{x^2 - 1}{x + 2} \qquad \text{(ehemaliges Testbeispiel)}\,,$$

welche für alle reellen Zahlen ungleich -2 definiert ist, d.h. ihr Definitionsbereich ist $D = \mathbb{R}\backslash\{-2\}$. Die Nullstellen ergeben sich aus $x^2 - 1 = 0$, also aus $x^2 = 1$ und damit sind $x_I = -1$ und $x_{II} = 1$ die Nullstellen von f. Für die ersten zwei Ableitungen von f folgt mit Hilfe der *Quotientenregel der Differentiation* und ein wenig Rechnung:

$$f'(x) = \frac{x^2 + 4\,x + 1}{(x + 2)^2} \qquad \text{und} \qquad f''(x) = \frac{6}{(x + 2)^3}\,.$$

Damit sind alle möglichen Extremstellen durch die Lösung der quadratische Gleichung $x^2+4\,x+1 = 0$ gegeben. Es folgt $x_1 = -2 - \sqrt{3}$ und $x_2 = -2 + \sqrt{3}$. Wegen

$$f''(x_1) = (-\sqrt{3})^3 = -3^{3/2} < 0 \qquad \text{und} \qquad f''(x_2) = (+\sqrt{3})^3 = +3^{3/2} > 0$$

liegt bei der Stelle x_1 ein Maximum und bei x_2 ein Minimum. Die Asymptote

$$A : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\, x \mapsto x - 2$$

von f ergibt sich aus der Polynomdivision

$$\begin{array}{l} (x^2 - 1) : (x + 2) = x - 2 \\ \underline{-(x^2 + 2\,x)} \\ \qquad -2\,x - 1 \\ \quad \underline{-(-2\,x \; - 4)} \\ \qquad\qquad +3 \end{array} \qquad \text{also} \qquad \frac{x^2 - 1}{x + 2} = x - 2 + \frac{3}{x + 2}\,. \tag{2}$$

Jetzt zeichnen Sie noch den Graphen von f qualitative.

Nun diskutieren wir die Eigenschaften folgender Funktion:

$$f : D(\subset \mathbb{R}) \to \mathbb{R},\, x \mapsto \frac{1}{(x - 1)\,(x + 1)}\,.$$

wobei D (eine Teilmenge von den reellen Zahlen) den Definitionsbereich der Funktion f bezeichnet. Die Vorschrift, welche die Funktion f definiert lautet

$$f(x) := \frac{1}{(x - 1)\,(x + 1)} \qquad \text{für alle} \qquad x \in D\,.$$

Weiter sehen wir aus $f : D \to \mathbb{R}$, dass die Funktion jedem $x \in D$ eine reelle Zahl zuordnet. Wenn man sich auf die obige Funktion bezieht kann man f oder $f : D \to \mathbb{R}$ verwenden. Oft spricht man auch nur von der Funktion die durch $f(x) := \frac{1}{(x-1)\,(x+1)}$ definiert ist. Unsere Aufgabe lautet nun: Bestimme D (eigentlich die größtmögliche Menge D) und diskutiere den Verlauf der Kurve (genauer Graphen von f).
Los geht's. Weil f durch einen Bruch definiert ist muss garantiert werden, dass niemals durch 0 dividiert wird, d.h.

$$(x - 1)\,(x + 1) \neq 0 \qquad \text{für alle} \qquad x \in D\,. \tag{3}$$

Wir verwenden nun den

Satz 1 *Ein Produkt von reellen (oder komplexen) Zahlen ist genau dann Null, wenn mindestens einer der beiden Faktoren Null ist.*

Das Produkt in (3) ist also genau dann Null, wenn[1] $x = 1$ oder $x = -1$ gilt und damit folgt $D = \mathbb{R}\backslash\{-1, +1\}$. Also alle reellen Zahlen außer -1 und $+1$. Damit haben wir gezeigt, dass f bei $x = -1$ und $x = 1$ je einen Pol besitzt. Für hinreichend kleine $\delta > 0$ gilt

$$f(1+\delta) = \frac{1}{\delta\,(2+\delta)} > 0 \qquad \text{und} \qquad f(1-\delta) = \frac{1}{-\delta\,(2-\delta)} < 0\,.$$

Damit folgt für $\delta \to 0$:

$$f(1+\delta) \to +\infty \qquad \text{und} \qquad f(1-\delta) \to -\infty\,.$$

Analog folgt

$$f(-1+\delta) = \frac{1}{(-2+\delta)\,\delta} < 0 \qquad \text{und} \qquad f(-1-\delta) = \frac{1}{(-2-\delta)(-\delta)} > 0\,.$$

also für $\delta \to 0$:

$$f(-1+\delta) \to -\infty \qquad \text{und} \qquad f(-1-\delta) \to +\infty\,.$$

Jetzt betrachten wir das Monotonieverhalten von f und dazu verwenden wir

Satz 2 *Eine stetig differenzierbare Funktion ist monoton (oder streng monoton) steigend auf der Menge M, genau dann wenn*

$$f'(x) \geq 0 \qquad (\textit{oder} \quad f'(x) > 0) \qquad \textit{für alle} \qquad x \in M$$

gilt. Ist $-f$ (streng) monoton steigend, so ist f (streng) monoton fallend.

f ist stetig differenzierbar auf D, weil es eine rationale Funktion ist (eine Polynomfunktion dividiert durch eine Polynomfunktion).[2] Mit Hilfe der Quotientenregel (für das Differenzieren) folgt:

$$f'(x) = -\frac{(x+1)+(x-1)}{(x-1)^2\,(x+1)^2} = \frac{-2\,x}{(x-1)^2\,(x+1)^2}\,.$$

Zur Erinnerung:

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'\,g - f\,g'}{g^2} \qquad \text{bzw.} \qquad \left(\frac{1}{g}\right)' = -\frac{g'}{g^2}\,.$$

Wir sehen, dass der Nenner immer positiv ist, aber der Zähler für positives x negativ und für negatives x positive ist. Und natürlich $f'(0) = 0$. Damit folgt, dass f auf $]-\infty, 0[$ streng monoton steigend ist und f auf $]0, \infty[$ streng monoton fallend ist. Und es folgt noch, das f bei $x = 0$ ein Minimum hat mit Wert $f(0) = -1$, denn es gilt:

Satz 3 *Eine stetig differenzierbare Funktion f hat bei $x = a$ ein lokales (stricktes) Minimum, genau dann wenn es ein kleines $\delta > 0$ gibt, sodas f auf $]a-\delta, a[$ (streng) monoton steigend und f auf $]a, a+\delta[$ (streng) monoton fallend ist. Ist f zweimal stetig differenzierbar, dann ist dies äquivalent zu $f'(a) = 0$ und $f''(x) > 0$ für $x \in]a-\delta, a+\delta[$, falls $\delta > 0$ hinreichend klein ist.*

Wegen des Monotonieverhalten von f gibt es keine Sattelpunkte und keine Wendepunkte, also benötigen wir nicht mehr die zweite Ableitung. Gibt es Nullstellen? Nein, den $1/a \neq 0$ für alle $a \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$. Bis auf das Zeichnen des Graphen haben wir nun alles was sinnvoll ist diskutiert. Der Graph von f ist in Fig. 2 dargestellt.

[1] In der Mathematik gilt immer das 'und/oder' und nicht das 'entweder/oder'.

[2] Damit ist f sogar unendlich oft stetig differenzierbar.

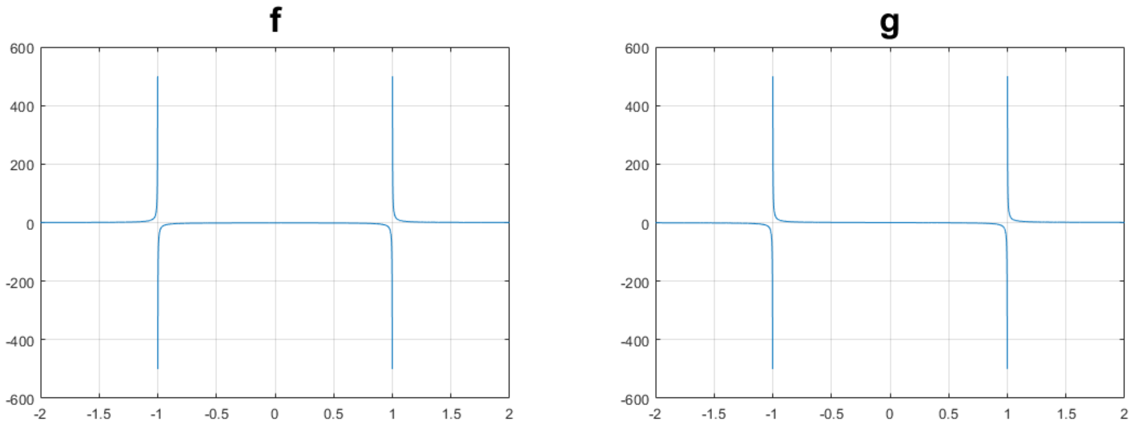

Figure 2: Darstellung der Graphen der Funktionen definiert durch $f(x) := \frac{1}{(x-1)\,(x+1)}$ und $g(x) := \frac{x}{(x-1)\,(x+1)}$ für $x \in \mathbb{R}\backslash\{-1,+1\}$. Wegen $g'(x) = -\frac{x^2+1}{(x-1)^2\,(x+1)^2} < 0$ ist g überall streng monoton fallend.

Aufgaben 2 *Führe eine Kurvendiskussion der Funktion*

$$g : D(\subset \mathbb{R}) \to \mathbb{R},\, x \mapsto \frac{x}{(x-1)\,(x+1)}$$

durch (vgl. Fig. 2).

Und noch ein altes Testbeispiel.

Aufgaben 3 *Führen Sie eine Kurvendiskussion der Funktion* $f : D(\subset \mathbb{R}) \to \mathbb{R},\, x \mapsto \frac{x^2-1}{x^2+2}$ *durch. (Alle Ergebnisse* **mit ausreichender Begründung***.)*

- *Bestimmen Sie den Definitionsbereich* $D \subset \mathbb{R}$*, die Grenzwerte* $\lim_{x\to\infty} f(x)$, $\lim_{x\to-\infty} f(x)$ *und (falls vorhanden) Polstellen und Nullstellen.*
- *Weiters bestimmen Sie (falls vorhanden) Maxima und Minima, Sattelpunkte und Wendepunkte.*
- *Skizzieren Sie den Graphen (≡Kurve) von* f *qualitative.*

1.4 Ein wenig Theorie. Teil 4: Einige elementare transzendente Funktionen

Wir beginnen mit der Exponentialfunktion

$$x \in \mathbb{R} \mapsto a^x \qquad \text{für geeignettes } a.$$

Welche Werte von a sind geeignet? We stehts mit $a = 0.7$? 0.7^{-1} (also $1/0.7$), $0.7^{0.5}$ (also $\sqrt{0.7}$) und 0.7^0 (also 1) sind ok. $0^3 = 0 = 0^{0.3}$ ist ok, aber uninteressant (Null hoch 'irgendwas' ist Null) und 0^{-1} geht nicht. Weiters ist $\sqrt{-1}$ nicht oK in den reellen Zahlen, d.h. $a > 0$ ist sinnvoll. Das war natürlich kein richtiger Beweis, aber es sollte für unsere Zwecke reichen.

Beispiel 7 *Zeige, dass die Exponentialfunktion*

$$\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\, x \mapsto e^x$$

keine Extrema, keine Sattelpunkte und keine Wendepunkte besitzt. Ist Sie monoton steigend oder fallen?

Wegen[3] $\exp(x) > 0$ *und* $\exp'(x) = \exp(x)$ *folgt*

$$\exp'(x) = \exp(x) > 0\,, \qquad \exp''(x) = \exp(x) > 0\,, \qquad \exp'''(x) = \exp(x) > 0\,, \qquad \ldots$$

also kann bei keinem $x \in \mathbb{R}$ *eine Extremstelle, ein Sattelpunkt oder ein Wendepunkt liegen. Weil ihre Ableitung immer positiv ist folgt, dass* $\exp$ *streng monoton stigend ist. (Wegen* $\exp'(-x) = -\exp(x) < 0$ *ist die andere Exponentialfunktion* $x \mapsto e^{-x}$ *streng monoton fallend.)*

Beispiel 8 *Zeige, dass die Exponentialfunktion*

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\, x \mapsto a^x \qquad (a > 0 \quad \textit{und} \quad a \neq 1)$$

keine Extrema, keine Sattelpunkte und keine Wendepunkte besitzen.

Wir verwenden folgende Identität:

$$a^x = e^{\log a^x} = e^{x\, \log(a)}\,.$$

Hier bezeichnet $\log$ *den Logarithmus zur Basis e auch mit* $\log_e$ *bezeichnet.*[4] *Jetzt ist alles trivial. Es folgt sofort*

$$a^x > 0 \qquad \textit{und} \qquad (a^x)' = \log(a)\, e^{x\, \log(a)} = \log(a)\, a^x\,.$$

Wegen $a \neq 0$ *gilt entweder* $a > 1$ *oder* $0 < a < 1$ *also entweder* $\log(a) > 0$ *oder* $\log(a) < 0$*. Insgesamt folgt für die* $n-$*te Ableitung von* $x \mapsto a^x$

$$\frac{d^n a^x}{dx^n} = (\log(a))^n\, a^x \neq 0$$

also gibt es auch keine Extremstellen, Sattelpunkte oder Wendepunkte. Für den Fall $a > 1$ *(z.B.* $\frac{3}{2}$ *oder* π*) folgt*

$$\frac{da^x}{dx} = (\log(a))\, a^x > 0\,,$$

also ist die Funktion streng monoton steigend. Hier haben wir verwendet, dass $\log(a) > 0$ *wegen* $a > 1$ *gilt und natürlich* $a^x > 0$*. Die höheren Ableitungen hätten wir gar nicht berechnen müssen, denn* <u>*strenge*</u> *Monotonie einer Funktion impliziert, dass es keine Extremstellen, Sattelpunkte oder Wendepunkte geben kann! Eine Funktion die nur monoton (aber nicht streng monoton) ist, kann einen Sattelpunkt haben (vgl.* $x \mapsto x^3$*).*

Beispiel 9 *Führe eine Kurvendiskussion der Funktion*

$$\phi : D \to \mathbb{R},\, x \mapsto e^{x^2-9} - 1$$

durch.

Der Definitionsbereich ist ganz $\mathbb{R}$*, weil die Exponentialfunktion auf ganz* $\mathbb{R}$ *definiert ist. Es gibt zwei Nullstellen, denn*

$$e^{x^2-9} - 1 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad e^{x^2-9} = 1 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 - 9 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x_{I,II} = \pm 3\,.$$

[3] $f(x) > 0$ bedeutet $f(x) > 0$ für alle x aus dem Definitionsbereich von f.

[4] International wird der natürliche Logarithmus mit log und in Europa mit ln bezeichnet. Zur Sicherheit kann man natürlich $\log_e$ schreiben.

Die ersten zwei Ableitung lauten

$$\phi'(x) = e^{x^2-9}\, 2\,x \qquad \textit{und} \qquad \phi''(x) = e^{x^2-9}\,(2\,x)^2 + e^{x^2-9}\, 2 = 2\,e^{x^2-9}\,(2\,x^2+1)\,.$$

Die Nullstellen von ϕ' sind die potentiellen Extremstellen. Weil

$$0 = \phi'(x) = e^{x^2-9}\, 2\,x \quad \Leftrightarrow \quad x = 0$$

könnte bei $x = 0$ ein Extremum liegen. In der Tat folgt aus

$$\phi''(0) = 2\,e^{0^2-9}\,(2\cdot 0^2+1) = 2\,e^{-9} > 0\,,$$

dass x eine Minimalstelle ist, d.h. der Wert von ϕ ist am kleinsten bei $x = 0$. Weiters folgt:

$$\lim_{x\to\infty} \phi(x) = e^{\lim_{x\to\infty} x^2-9} - 1 = e^{\lim_{x\to\infty} x^2}\, e^{-9} - 1 = „\frac{\infty}{e^9} - 1" = \infty$$

und

$$\lim_{x\to-\infty} \phi(x) = e^{\lim_{x\to-\infty} x^2-9} - 1 = e^{\lim_{x\to\infty} (-x)^2-9} - 1 = \infty\,.$$

Wendepunkte, Sattelpunkte, Pole und Asymptoten gibt es keine! Siehe Abbildung 3.

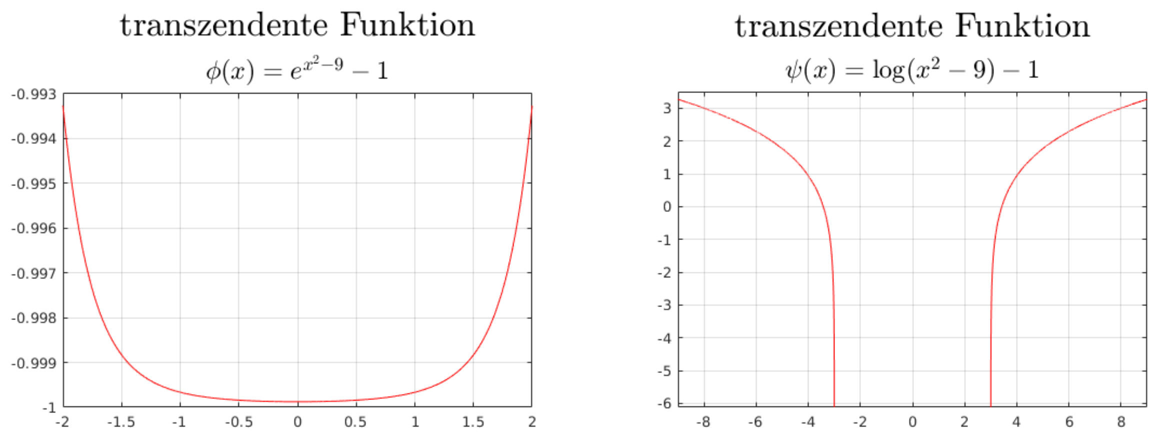

Figure 3: Zur Diskussion von Funktionen.

Die natürliche Logarithmusfunktion, in Zeichen $\log : (0,\infty) \to \mathbb{R}$, ist definiert durch die Eigenschaft

$$e^{\log(x)} = x \qquad \text{bzw.} \qquad \log(e^x) = x\,.$$

$\log(e^x)$ genauer $\log_e(e^x)$ liest sich als: $\log_e(e^x)$ ist jene Zahl mit der man e potenzieren muss damit man e^x bekommt. Allgmein: $\log_a(b)$ ist jene Zahl mit der man a potenzieren muss damit man b bekommt. Wegen $e^0 = 1$ und $a^0 = 1$ $(a > 0)$ folgt $\log(1) = \log_e(1) = 0$ und $\log_a(1) = 0$. Weiters folgt $\log(e^{-1}) = -1$ und $\log_a(a^{-1}) = -1$.

Beispiel 10 *Führe eine Kurvendiskussion der Funktion*

$$\psi : D \to \mathbb{R},\, x \mapsto log(x^2-9) - 1$$

durch.

Der Definitionsbereich ist nicht *ganz* $\mathbb{R}$, *weil die Logarithmusfunktion bei* 0 *und für negative Zahlen nicht definiert ist. Für die Nullstellen von* $g : x \mapsto x^2 - 9$, *das sind* $x_I = -3$ *und* $x_{II} = 3$, *ist* ψ *also nicht definiert. Das gleiche gilt für alle* x *mit* $g(x) < 0$, *also für* $x \in (x_I, x_{II})$. *Damit folgt für den Definitionsbereich:*

$$D = \mathbb{R}\backslash[x_I, x_{II}] = (-\infty, -3) \cup (3, \infty)\,.$$

Ein scharfer Blick auf die Definition der Funktion zeigt uns, dass Sie symmetrisch *ist, in der Tat gilt*

$$\psi(-x) = log((-x)^2 - 9) - 1 = log(x^2 - 9) - 1 = \psi(x) \qquad \textit{für } x \in D.$$

Wegen $\log'(x) = \frac{1}{x}$ *und der Kettenregel ergibt sich für die erste Ableitung*

$$\psi'(x) = \frac{1}{x^2 - 9}\, 2\, x = \frac{2\, x}{x^2 - 9}\,,$$

welche $x = 0$ *als Nullstelle hat. Aber* $x = 0$ *liegt nicht im Definitonsbereich von* ψ *und damit kann es keine Extemwerte im Innern von* D *geben. (Am Rand kann es immer lokale Extremwerte geben (welche man nicht über die Ableitung bekommt!), aber hier hat der Definitionsbereich keinen Rand, denn* $x_I, x_{II} \notin D$*! Die zweite Ableitung können wir uns also sparen. Wegen* $\psi'(x) < 0$ *für* $x < x_I = -3$ *und* $\psi'(x) > 0$ *für* $x > x_{II} = 3$ *ist* ϕ *auf* $(-\infty, x_I)$ *streng monoton fallend und auf* (x_{II}, ∞) *streng monoton steigend. Weiters gilt*

$$\lim_{x \to \pm 3} \phi(x) = \log(0) - 1 = -\infty \qquad \textit{also liegen bei } x_I \textit{ und } x_{II} \textit{ zwei Pole.}$$

Wegen der Monotonie gibt es keine Extremstellen, Wendepunkte und Sattelpunkte. Siehe Abbildung 3.

Aufgaben 4 *Welches Monotonieverhalten hat die Logarithmusfunktion* log*? Zeichen ihren Graphen auf. Wo liegt ihre einzige Nullstelle?*