**1. Beispiel** (10 Punkte)

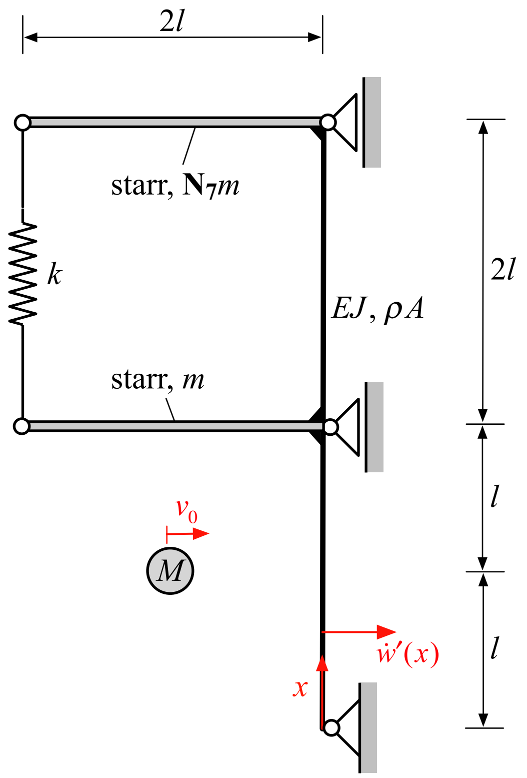
Gegeben:
Ebenes schwingungsfähiges System lt. Skizze (*Grundriss*):

- Punktmasse: Masse $M$, Anfangsgeschwindigkeit $v_0$
- Linear elastischer Balken: Länge $4l$, Biegesteifigkeit $EJ$, Masse pro Längeneinheit $\rho A$
- Starre Stäbe: Länge $2l$, Masse $m$ bzw. $\mathbf{N_7}m$
- Linear elastische Feder: Federsteifigkeit $k$

*) $\mathbf{N_7}$ entspricht der 7. Ziffer der Matrikelnummer (z.B. 01801234: $N_7 = 3$). Ist die 7. Ziffer gleich Null, dann ist die nächstvordere Ziffer ungleich Null einzusetzen (z.B. 01502000: $N_7 = 2$). „$N_7\ l$" entspricht „$2\ l$", wenn $N_7$ gleich 2 ist.

Gesucht:

1. Geschwindigkeit $v$ der Punktmasse unmittelbar vor dem Stoß
2. Bestimmung der Geschwindigkeiten $v'$ und $\dot{q}'$ mit Hilfe der ***Lagrange*schen Stoßgleichungen** für einen vollkommen **unelastischen** Stoß unter der Annahme der folgenden Geschwindigkeitsverteilung im linear elastischen Balken unmittelbar nach dem Stoß:
   $0 \leq x \leq 4l: \quad \dot{w}'(x) = \dot{q}'\varphi(x), \quad \varphi(x) = sin\frac{\pi x}{2l}$
3. Bestimmungsgleichung für die Umkehrlagen $q_u$ mit Hilfe des Verformungsansatzes für die Durchbiegung des elastischen Balkens: $w^*(x,t) = q(t)\varphi(x)$




*Grundriss*

# Lösung zum 1. Beispiel

### 1. Geschwindigkeit *v* der Punktmasse unmittelbar vor dem Stoß

$$v = v_0$$

### 2. Geschwindigkeiten *v'* und $\dot{q}'$ unmittelbar nach einem vollkommen unelastischen Stoß

$$v' = \frac{M}{M+m^*}v; \qquad \dot{q}' = \frac{M}{M+m^*}v$$

$$\text{mit } m^* = 2\rho A l + \frac{m\pi^2\left(1+N_7\right)}{3}$$

### 3. Bestimmungsgleichung für die Umkehrlagen

$$\dot{q}'\left(m^*+M\right) - q_u^2\left(\frac{EJ\pi^4}{8l^3} + 4\pi^2 k\right) = 0$$

## **2. Beispiel** (10 Punkte)

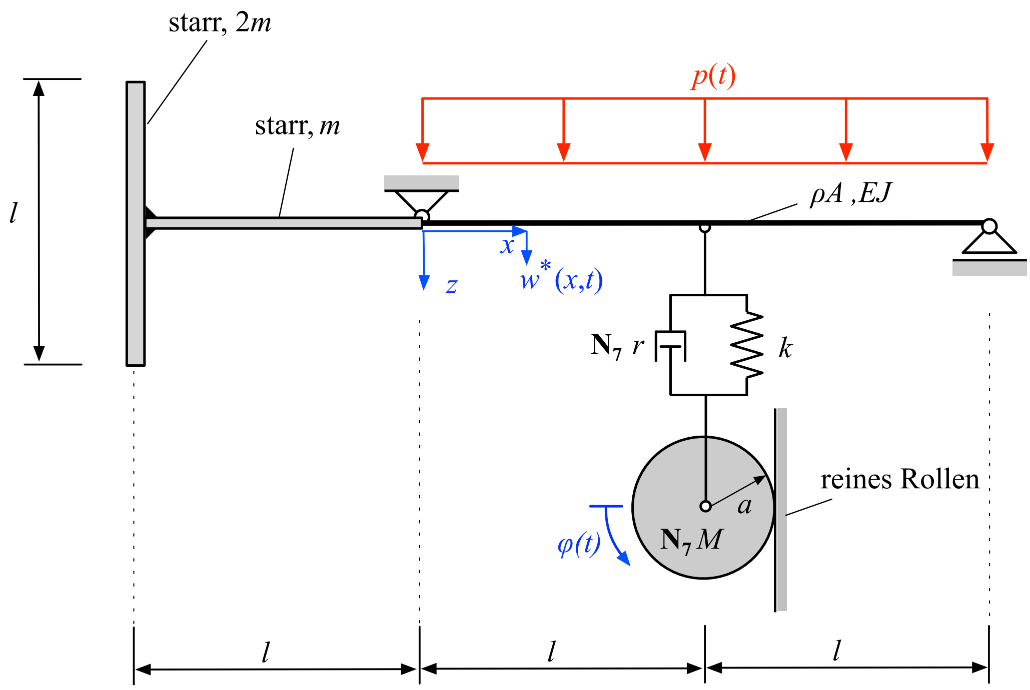
<u>Gegeben</u>:
Ebenes schwingungsfähiges System lt. Skizze, welches sich in der dargestellten Lage im <u>statischen Gleichgewicht</u> befindet:

- Linear elastischer Biegestab: Länge $2l$, Biegesteifigkeit $EJ$, Masse pro Längeneinheit $\rho A$
- Starrer Stab: Länge $l$, Masse $m$
- Starrer Stab: Länge $l$, Masse $2m$
- Starre, homogene Kreisscheibe: Radius $a$, Masse $\mathbf{N_7}\,M$
- Geschwindigkeitsproportionaler Dämpfer: Dämpferkonstante $\mathbf{N_7}\,r$
- Linear elastische Feder: Federsteifigkeit $k$
- Gleichlast: $p(t)$

*) $\mathbf{N_7}$ entspricht der 7. Ziffer der Matrikelnummer (z.B. 0180123<u>4</u>: $N_7 = 3$). Ist die 7. Ziffer gleich Null, dann ist die nächstvordere Ziffer ungleich Null einzusetzen (z.B. 0150<u>2</u>000: $N_7 = 2$). „$\mathbf{N_7}\,a$“ entspricht „$2a$“, wenn $\mathbf{N_7}$ gleich 2 ist.

<u>Gesucht</u>:

1. Anzahl der Freiheitsgrade des Ersatzsystems bei Verwendung des folgenden eingliedrigen *Ritz*schen Ansatz für die Durchbiegung $w$ des Biegeträgers
   $w^*(x,t) = q(t)\varphi(x)$ mit $\varphi(x) = \sin\frac{\pi x}{2l}$ für $0 \le x \le 2l$
2. Kinetische Energie, potentielle Energie und generalisierte Kräfte des Ersatzsystems
3. Bewegungsgleichung(en) des Ersatzsystems in *Lagrange*scher Form für kleine Schwingungen um die statische Gleichgewichtslage
4. Statische Auslenkung des Ersatzsystems $w^*_{stat}$ an der Stelle $x = l$ zufolge $p = p_s$



# Lösung zum 2. Beispiel

## 1. Anzahl der Freiheitsgrade

2 FHG, $q(t)$ ... Durchbiegung des Biegeträgers an der Stelle $x = l$
$\varphi(t)$ ... Verdrehung der Kreisscheibe

## 2. Kinetische Energie, potentielle Energie und generalisierte Kräfte

$$T = \frac{1}{2}\left[\rho A l \dot{q}^2 + \frac{5}{8} m\pi^2 + \frac{3}{2}\mathrm{N}_7 M a^2 \dot{\varphi}^2\right]$$

$$U = \frac{1}{2}\left[\left(EJ\frac{\pi^4}{16l^3} + k\right) q^2 + k\varphi^2 a^2 - 2kq\varphi a\right]$$

$$W = -pq\frac{4l}{\pi}$$

$$Q_q = -\mathrm{N}_7 r\left(\dot{q} - \dot{\varphi}a\right)$$

$$Q_\varphi = \mathrm{N}_7 r\left(\dot{q}a - \dot{\varphi}a^2\right)$$

## 3. Bewegungsgleichungen

$$\begin{bmatrix} \rho A l + \frac{5}{8}m\pi^2 & 0 \\ 0 & \frac{3}{2}\mathrm{N}_7 M a \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \ddot{q} \\ \ddot{\varphi} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathrm{N}_7 r & -\mathrm{N}_7 r a \\ -\mathrm{N}_7 r & \mathrm{N}_7 r a \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \dot{q} \\ \dot{\varphi} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{EJ\pi^4}{16l^3} + k & -ka \\ -k & ka \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} q \\ \varphi \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} p\frac{4l}{\pi} \\ 0 \end{Bmatrix}$$

## 4. Statische Auslenkung

$$w^*_{stat}(x = l) = \frac{p_s\frac{4l}{\pi}}{\frac{EJ\pi^4}{16l^3}}$$