Leopold Vietoris' mathematische Arbeiten

Leopold Vietoris war ein vielseitiger Mathematiker, der sich mit vielerlei Fragen beschäftigte. Ein paar davon sollen hier aufgelistet werden; für eine tiefergehende Beschäftigung mit seinem Werk wird die Schrift "Leopold Vietoris zum Gedenken" von Heinrich Reitberger empfohlen, welche dieser als Nachruf nach dem Tod von Leopold Vietoris verfasste (`https://www.oemg.ac.at/db/IMN/191`)

1 Grundlagen der allgemeinen Topologie

Die ersten Jahre des Schaffens von Leopold Vietoris fallen in die Zeit, als die Topologie langsam aufgebaut wurde. In seiner Dissertation "Stetige Mengen" führte er dabei erstmalig gerichtete Mengen, verallgemeinerte Folgen (welche später Netze bzw. Moore-Smith-Folgen genannt wurden) ein und dazu die äquivalente Mengendarstellung als Filter mit Filterbasen, die er damals "Kranz" nannte. [Als dann Henri Cartan 1937 den Begriff des Filters einführte, meinte Vietoris "Das hatten wir doch schon vor 20 Jahren – nur haben wir es 'Kranz' genannt."]. Mit diesen Filtern bzw. zugehörigen Filterbasen konnte der Umgebungsbegriff und die Konvergenz sauber eingeführt werden.

2 Algebraische Topologie

Zentrales Anliegen der Topologie war es, die Homöomorphie von Räumen nachzuweisen bzw. zu widerlegen. Da die Algebra bereits weit entwickelt war, lag das große Interesse daran, diese Untersuchungen mit Hilfe der Algebra durchführen zu können. Dazu entwickelte Vietoris mit Hilfe von Simplizes in metrischen Räumen den "Vietoris-Komplex" mit den Gruppen der Fundamentalfolgen und deren Quotienten – den Homologiegruppen. Von entscheidender Bedeutung mit Hilfe der Randabbildung ergab sich daraus eine Folge von Abbildungen, welche auf Vietoris und W.Mayer zurückgeht und den bekannten Namen "Mayer-Vietoris-Sequenz" trägt.

3 Funktionalgleichungen

Bei Funktionalgleichungen geht es in erster Linie darum, Funktionen mit Hilfe von Gleichungen (eindeutig?) zu charakterisieren – ohne auf Ableitungen zurückzugreifen. Ein typisches Beispiel, mit dem sich Vietoris beschäftigte, sind die Additionstheoreme für Winkelfunktionen. Gesuchte sind also zwei Funktionen $s\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sowie $c\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, welche für alle $x, y \in \mathbb{R}$ den beiden Gleichungen c(x+y) = c(x)c(y) – s(x)s(y) s(x+y) = s(x)c(y) + c(x)s(y) genügt. Vietoris betrachtet dazu die Funktion $A(x) = c(x)+is(x)$, welche sich als "Lösung" der multiplikativen Cauchyschen Funktionalgleichung $A(x+y) = A(x)A(y)$ herausstellt. Diese kann Vietoris unter Zuhilfenahme einer Hamelbasis lösen.

4 Trigonometrische Summen

"Über das Vorzeichen gewisser trigonometrischer Summen" war das Thema mehrerer Arbeiten, wobei er die letzte davon im "jugendlichen" Alter von 103 Jahren(!) verfasste. Dabei bewies er folgende Ungleichungen: Ist $n > 0$ eine natürliche Zahl und sind $a_0, a_1, \ldots, a_n$ reelle Zahlen mit den Eigenschaften $a_0 \geq a_1 \geq \ldots \geq a_n > 0$ sowie $a_{2k} \leq \frac{2k-1}{2k} a_{2k-1}$ für $1 \leq k \leq \frac{n}{2}$, so gilt $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_k \sin(kt) > 0$ sowie $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k \cos(kt) > 0$ für alle t, $0 < t < \pi$.

5 Einige "Entdeckungen"

Lange nach seiner Emeritierung – Vietoris war bereits mehr als 80 Jahre alt – beschäftigte er sich mit Fragen der Wahrscheinlichkeit und der Statistik. Dabei fand er eine interessante Formel: Für natürliche Zahlen m, n, k mit $0 \leq k < m$ gilt $(m+n)! = \dfrac{m!}{k!(m-k-1)!} \displaystyle\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} (k+i)!(m+n-k-1-i)!$ Allerdings war – durch Umschreiben auf Wahrscheinlichkeiten – diese Formel nach Feller bereits bekannt.

Mit dem Vergleich "unbekannter Mittelwerte" konnte er folgende Formel entdecken und beweisen (für natürliche Zahlen k):

$$\mathrm{e}^k \frac{1}{(k-1)!} \int_k^\infty x^{k-1} \mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x = \sum_{i=0}^{k-1} \frac{k^i}{i!} < \frac{1}{2}\,\mathrm{e}^k < \sum_{i=0}^{k} \frac{k^i}{i!} = \mathrm{e}^k \frac{1}{k!} \int_k^\infty x^k \mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x.$$

Allerdings konnte W. Uhlmann, dem er seine Arbeiten zukommen ließ, diese Ungleichung aus seinen früheren Arbeiten folgern. Außerdem lieferte Ramanujans Frage Nr. 294, welche Szegő und Watson bereits 1921 unabhängig voneinander bewiesen hatten, folgende Ungleichung

$$1 + \frac{k}{1!} + \ldots + \frac{k^k}{k!}\,\frac{1}{3} < \frac{1}{2}\,\mathrm{e}^k < 1 + \frac{k}{1!} + \ldots + \frac{k^k}{k!}\,\frac{1}{2}.$$