Universität Innsbruck | Prüfung aus MECHANIK 1 | Familienname:
AB Angewandte Mechanik | 1. Teil (Rechenbeispiel) | Vorname:
11.11.2022 | Kenn- und Matr.Nr.:

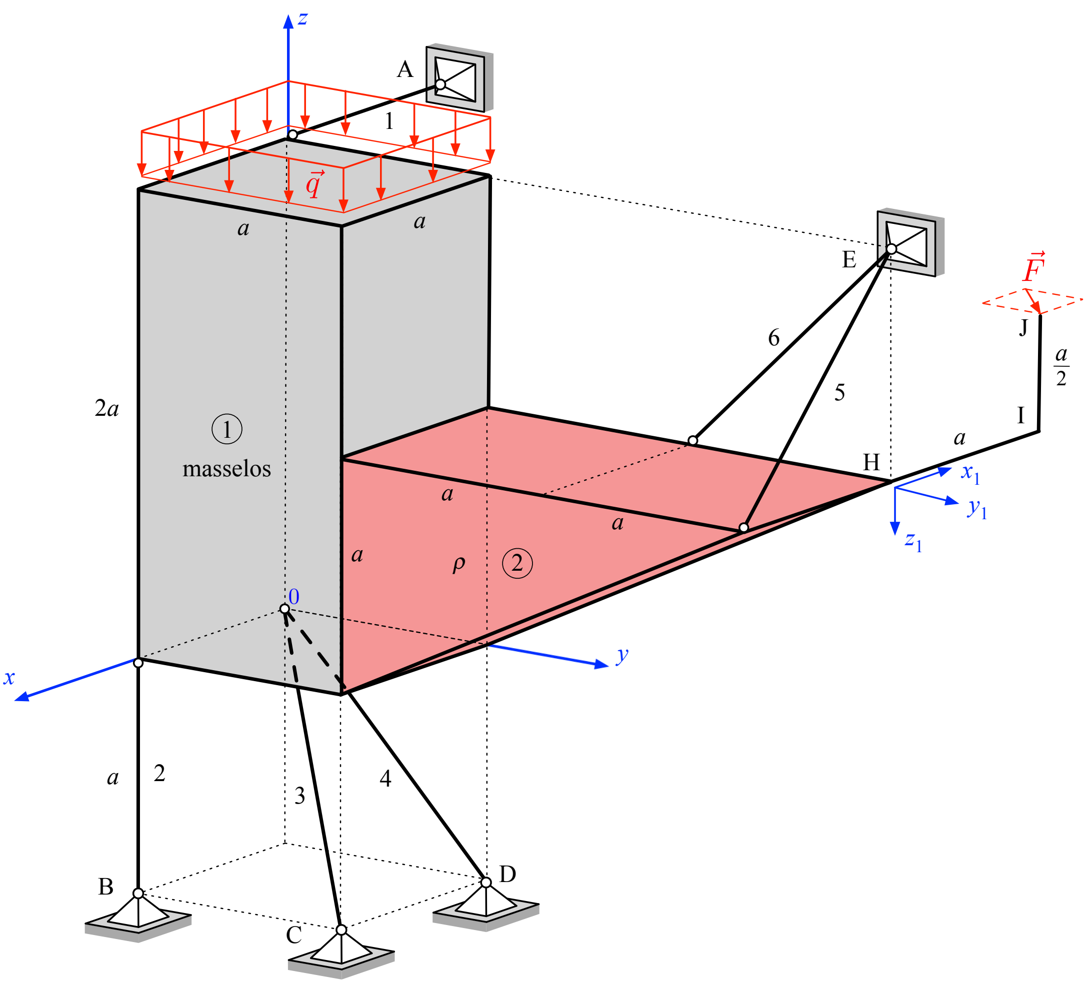
Beispiel (20 Punkte)

<u>Gegeben</u>:

- Statisch bestimmtes System lt. Skizze (Längenmaß a) bestehend aus (1) einem masselosen Quader, (2) einem Prisma mit Dichte ρ und einem masselosen biegesteif angeschlossenen geknickten Biegestab HIJ sowie sechs starren Pendelstützen
- Flächenlast $\vec{q} = -q\vec{e}_z$
- Einzelkraft $\vec{F} = F\vec{e}_x + F\vec{e}_y$

<u>Gesucht</u>:

1. Überprüfung der statischen Bestimmtheit der Lagerung (nachvollziehbare Berechnung)
2. Gewichtskraft $\vec{G}$ und Resultierende $\vec{R}_q$ der Flächenlast sowie die Lage der momentenfreien Angriffspunkte $\vec{r}_G$ und $\vec{r}_q$ bezüglich des Punkts 0 (Ursprung des globalen xyz-Koordinatensystems)
3. Reduktion der Kräfte $\vec{G}$, $\vec{R}_q$ und $\vec{F}$ in den Punkt 0
4. Aufstellen der Gleichgewichtsbedingungen zur Ermittlung der Stabkräfte (mit beiliegender Tabelle)
5. Berechnung der Stabkräfte $\vec{S}_1$ bis $\vec{S}_6$
6. Ermittlung der Auflagerreaktion $\vec{E}$ im Punkt E
7. Berechnung der Schnittgrößen $\vec{R}(x_1)$ und $\vec{M}(x_1)$ im Abschnitt HI des Biegestabs (bezogen auf das lokale $x_1y_1z_1$-Koordinatensystem)
8. Grafische Darstellung der Schnittgrößenverläufe im Abschnitt HI mit Angabe der Werte an den Punkten H und I (Skizze auf beiliegender Seite)



Lösungen zum Beispiel

1. Überprüfung der statischen Bestimmtheit der Lagerung

$$f = 6n_1 + 5n_2 - r - \nu = 0 \quad \text{mit:} \quad n_1 = 1\,,\ n_2 = 6\,,\ r = 15 \text{ und } \nu = 21$$

2. Gewichtskraft und Resultierende der Flächenlast sowie Lage der Angriffspunkte

$$\vec{G} = -\underbrace{\rho g a^3}_{G}\,\vec{e}_z \quad , \quad \vec{r}_G = \begin{Bmatrix} \frac{a}{2} \\ \frac{5a}{3} \\ \frac{2a}{3} \end{Bmatrix} \qquad \vec{R}_q = -\underbrace{q a^2}_{R_q}\,\vec{e}_z \quad , \quad \vec{r}_q = \begin{Bmatrix} \frac{a}{2} \\ \frac{a}{2} \\ 2a \end{Bmatrix}$$

3. Reduktion der Gesamtbelastung in den Koordinatenursprung

$$\vec{R} = \begin{Bmatrix} F \\ F \\ -G - R_q \end{Bmatrix} \quad , \quad \vec{M} = \begin{Bmatrix} -\frac{5}{3}Ga - \frac{3}{2}Fa - \frac{1}{2}R_q a \\ \frac{1}{2}Ga + \frac{3}{2}Fa + \frac{1}{2}R_q a \\ -4Fa \end{Bmatrix}$$

4. Aufstellen der Gleichgewichtsbedingungen

	X_i	Y_i	Z_i	x_i	y_i	z_i	M_{ix}	M_{iy}	M_{iz}
$\vec{G}$	0	0	$-G$	$\frac{1}{2}a$	$\frac{5}{3}a$	$\frac{2}{3}a$	$-\frac{5}{3}Ga$	$\frac{1}{2}Ga$	0
$\vec{F}$	F	F	0	$-a$	$3a$	$\frac{3}{2}a$	$-\frac{3}{2}Fa$	$\frac{3}{2}Fa$	$-4Fa$
$\vec{R}_q$	0	0	$-R_q$	$\frac{1}{2}a$	$\frac{1}{2}a$	$2a$	$-\frac{1}{2}R_q a$	$\frac{1}{2}R_q a$	0
$\vec{S}_1$	$-S_1$	0	0	0	0	$2a$	0	$-2S_1 a$	0
$\vec{S}_2$	0	0	$-S_2$	a	0	0	0	$S_2 a$	0
$\vec{S}_3$	$\frac{1}{\sqrt{3}}S_3$	$\frac{1}{\sqrt{3}}S_3$	$-\frac{1}{\sqrt{3}}S_3$	0	0	0	0	0	0
$\vec{S}_4$	0	$\frac{1}{\sqrt{2}}S_4$	$-\frac{1}{\sqrt{2}}S_4$	0	0	0	0	0	0
$\vec{S}_5$	$-\frac{1}{\sqrt{2}}S_5$	0	$\frac{1}{\sqrt{2}}S_5$	a	$3a$	a	$\frac{3}{\sqrt{2}}S_5 a$	0	$\frac{3}{\sqrt{2}}S_5 a$
$\vec{S}_6$	0	$\frac{1}{\sqrt{2}}S_6$	$\frac{1}{\sqrt{2}}S_6$	0	$2a$	a	$\frac{1}{\sqrt{2}}S_6 a$	0	0

$$\text{(I)} \quad 0 = F - S_1 + \frac{1}{\sqrt{3}}S_3 - \frac{1}{\sqrt{2}}S_5$$
$$\text{(II)} \quad 0 = F + \frac{1}{\sqrt{3}}S_3 + \frac{1}{\sqrt{2}}S_2 + \frac{1}{\sqrt{2}}S_6$$

Alle Ergebnisse ohne Gewähr auf Richtigkeit und Vollständigkeit

$$
\begin{aligned}
\text{(III)}\quad & 0 = -G - R_q - S_2 - \tfrac{1}{\sqrt{3}}S_3 - \tfrac{1}{\sqrt{2}}S_4 + \tfrac{1}{\sqrt{2}}S_5 + \tfrac{1}{\sqrt{2}}S_6 \\
\text{(IV)}\quad & 0 = -\tfrac{5}{3}Ga - \tfrac{3}{2}Fa - \tfrac{1}{2}R_q a + \tfrac{3}{\sqrt{2}}S_5 a + \tfrac{1}{\sqrt{2}}S_6 a \\
\text{(V)}\quad & 0 = \tfrac{1}{2}Ga + \tfrac{3}{2}Fa + \tfrac{1}{2}R_q a - 2S_1 a + S_2 a \\
\text{(VI)}\quad & 0 = -4Fa + \tfrac{3}{\sqrt{2}}S_5 a
\end{aligned}
$$

5. Stabkräfte

$$
\begin{aligned}
\vec{S}_1 &= \left(-\frac{23}{12}F + \frac{17}{12}G + \frac{1}{4}R_q\right)\,(-\vec{e}_x) & \vec{S}_2 &= \left(-\frac{8}{3}F + \frac{7}{3}G\right)\,(-\vec{e}_z) \\
\vec{S}_3 &= \left(-\frac{19}{12}F + \frac{17}{12}G + \frac{1}{4}R_q\right)\,(\vec{e}_x + \vec{e}_y - \vec{e}_z) & \vec{S}_4 &= \left(\frac{37}{12}F - \frac{37}{12}G - \frac{3}{4}R_q\right)\,(\vec{e}_y - \vec{e}_z) \\
\vec{S}_5 &= \left(\frac{4\sqrt{2}}{3}F\right)\,(-\vec{e}_x + \vec{e}_z) & \vec{S}_6 &= \left(\frac{5}{3}G - \frac{5}{2}F + \frac{1}{2}R_q\right)\,(\vec{e}_y + \vec{e}_z)
\end{aligned}
$$

6. Auflagerreaktion in E

$$
\vec{E} = \left(-\frac{4\sqrt{2}}{3}F\right)\,\vec{e}_x + \left(\frac{5}{3}G - \frac{5}{2}F + \frac{1}{2}R_q\right)\,\vec{e}_y + \left(\frac{4\sqrt{2}}{3}F + \frac{5}{3}G - \frac{5}{2}F + \frac{1}{2}R_q\right)\,\vec{e}_z
$$

7. Schnittgrößen im Abschnitt HI

$$
\begin{aligned}
\vec{R} &= (-F)\,\vec{e}_x + (F)\,\vec{e}_y \\
\vec{M} &= \left(\frac{1}{2}Fa\right)\,\vec{e}_x + \left(\frac{1}{2}Fa\right)\,\vec{e}_y + (F(a - x_1))\,\vec{e}_z
\end{aligned}
$$

8. Grafische Darstellung der Schnittgrößenverläufe im Abschnitt HI