Aus der Korrespondenz des Innsbrucker Mathematikers Leopold Vietoris (1891-2002)

- 1918 (August). Der einige Jahre an der Universität Bonn lehrende Wiener Mathematiker Hans Hahn diskutiert mit Vietoris Fragen der Mengenlehre.
- 1918 (Juni/Juli). Der in Greifswald lehrende Felix Hausdorff, Mitbegründer der modernen Topologie (Mengenlehre), später als Bonner Professor vom NS-Regime verfolgt, korrespondiert mit Leopold Vietoris.
- Im Nachlass von Vietoris findet sich ein Exemplar von Hausdorff' klassischen "Grundzügen der Mengenlehre". In späten Jahren hat Vietoris die Abschriften seiner Briefe an Hausdorff transkribiert.

H. Hahn, Bonn,
Kronprinzenstr. 9.
an L. Vietoris, Wien

Bonn 8. 12. 1918

Sehr geehrter Herr Oberleutnant!

Sogleich nach Eintreffen Ihres Briefes habe ich die von Ihnen zitierten Abhandlungen nachgesehen, um festzustellen, ob in ihnen tatsächlich der Begriff des „Zusammenhanges im Kleinen" auftritt. Soviel ich sehe, ist dies nicht der Fall. Sowohl Zoretti wie Lennes behandeln nur von „Cantor'schen Kurven"; der Begriff, der bei diesen Autoren auftritt, und den sie wohl im Auge hatten, ist nur auf solche anwendbar: Konvergiert P gegen M, so soll auch „der Bogen PM" gegen M konvergieren. Der von mir benützte Begriff hingegen ist auf beliebige Mengen anwendbar: Konvergiert P gegen M, so gibt es einen P und M enthaltenden zusammenhängenden Teil der Menge, der gegen M konvergiert. Die Begriffe sind selbstverständlich verwandt, oder präziser: der von Zoretti und Lennes benutzte Begriff ist der des Zusammenhanges im Kleinen, spezialisiert für Cantor'sche Kurven. Aber eben dadurch, dass diese Autoren eine so spezialisierte Definition verwenden, konnten sie die Bedeutung des allgemeinen Begriffes nicht erkennen, die — wie ich

zeigte – darin besteht, dass er das charakteristische Merkmal darstellt, das aus allen zusammenhängenden Mengen diejenigen herausgreift, die stetiges Bild einer Strecke, also stetige Kurvenbögen sind. Ich habe darüber zwei Arbeiten veröffentlicht: 1.) über die allgemeinste ebene Punktmenge, die stetiges Bild einer Strecke ist Jahresber. d. deutschen Mathem.-Ver. Bd 23 (1914) S. 318.
2.) Mengentheoretische Charakterisierung der stetigen Kurve Sitzungsber. d. Wiener Akad. Bd 123 (1914) S. 2433, die ich Ihnen demnächst zusenden werde.

Was Ihre Anfrage über Axiome des Grenzbegriffes anlangt, so möchte ich Sie auf M. Fréchet Sur quelques points du calcul fonctionnel (Rendiconti del circolo mat. di Palermo Bd 22 (1906)) verweisen, der sich eingehend mit diesen Fragen beschäftigt. Ich selbst habe nur im Anschluss an Fréchet einige kleine Beiträge geliefert in einer in den „Wiener Monatsheften f. Math. u. Phys." Bd 19 erschienenen kleinen Abhandlung.

Selbstverständlich ist es mir durchaus erwünscht, wenn Sie in Ihrer Arbeit darauf hinweisen, dass der Begriff des Zushgs i. Kl. ~~[illegible]~~ in spezialisierter Form schon bei Lennes u. Zoretti vorkommt. In seiner allgemeinen Form, in der allein er zur Lösung des Problemes der stetigen Kurve dienen kann (die für im allg. durchaus keine kontinuierliche Linie ist), glaube ich nach wie vor, ihn zuerst aufgestellt zu haben.

Mit besten Empfehlungen

H. Hahn

Leopold Vietoris
~~IX. Nussdorferstr. 21~~

GRUNDZÜGE
DER
MENGENLEHRE

VON

FELIX HAUSDORFF
O. PROFESSOR DER MATHEMATIK AN DER UNIVERSITÄT GREIFSWALD

MIT 53 FIGUREN IM TEXT

LEIPZIG
VERLAG VON VEIT & COMP.
1914

DEM SCHÖPFER DER MENGENLEHRE

HERRN GEORG CANTOR

IN DANKBARER VEREHRUNG

GEWIDMET

Vorwort.

Das vorliegende Werk will ein Lehrbuch und kein Bericht sein: es versucht die Hauptsachen der Mengenlehre ohne Voraussetzung höherer Vorkenntnisse mit vollständig ausgeführten Beweisen darzustellen und verzichtet dafür auf Vollständigkeit des behandelten Stoffes. Hinsichtlich der thematischen Begrenzung, bei der ja übrigens die Mitwirkung subjektiver Gründe nicht auszuschalten ist, habe ich der Mengenlehre selbst vor ihren Anwendungen den Vorzug gegeben; infolgedessen wird man vielleicht finden, daß den geordneten Mengen zuviel und etwa den reellen Funktionen einer reellen Variablen zuwenig Platz eingeräumt worden sei. Was die Tendenz anbelangt, immer zu beweisen und niemals bloß zu referieren, so ist mir die in dem bekannten Voltaireschen Worte bezeichnete Gefahr nicht entgangen; aber in einem Gebiet, wo schlechthin nichts selbstverständlich und das Richtige häufig paradox, das Plausible falsch ist, gibt es außer der lückenlosen Deduktion kaum ein Mittel, sich und den Leser vor Täuschungen zu bewahren. Ich habe, um von dem menschlichen Privileg des Irrtums einen möglichst sparsamen Gebrauch zu machen, nichts ungeprüft übernommen und manches von der Wiedergabe ausgeschlossen, was mir nur auf persönlichen Kredit hin glaubwürdig erschien; aber selbst fertige und im ganzen einwandfreie Darstellungen, die ich meinem Plane einzugliedern hatte, mußte ich häufig einer gründlichen Umarbeitung unterziehen, bis sie sich den mir vorschwebenden Forderungen an Präzision fügten.

Nach diesem Programm glaube ich, daß das Buch von jedem, der über einige Abstraktion des Denkens verfügt, insbesondere oder außerdem von Studierenden der Mathematik in mittleren Semestern mit Erfolg gelesen werden kann; auf der andern Seite würde ich seinen Zweck für verfehlt halten, wenn ich nicht hoffen dürfte, auch den Fachgenossen manches Neue, mindestens in methodischer und formaler Hinsicht, zu bieten. Daß man zerstreute Einzelheiten logisch verkettet und systematisiert, bisherige Resultate von unnötig speziellen und komplizierenden Voraussetzungen befreit, einen Fortschritt in Einfachheit und Allgemeinheit anstrebt, ist schließlich das mindeste, was von dem Bearbeiter eines schon behandelten Stoffes verlangt werden kann. Diesen Anforderungen hoffe ich innerhalb gewisser Grenzen entsprochen und dem Gegenstande wenigstens einige neue Seiten abgewonnen zu haben; um zur Rechtfertigung dieses Anspruches nicht nur auf das Buch als Ganzes zu verweisen, mögen hier etwa die symmetrischen Mengen, die Limesbildungen von Mengenfolgen, die Umgebungstheorie der Punktmengen, die systematische Durchführung der Relativbegriffe, die reduziblen Mengen, die Behandlung des Inhalts von Punktmengen erwähnt werden.

Die Quellenangaben sind in einen Anhang verwiesen, der außerdem einige nicht unwesentliche Nachträge bringt. Ich glaubte jene in Grenzen halten zu dürfen, die man in unserem historisch-philologischen Zeitalter entschieden eng finden wird, und zwar nicht nur aus äußeren Gründen, sondern weil auch eine innere Schwierigkeit bestand, Keime und Anregungen, die sich im Laufe der Darstellung bisweilen erheblich umgeformt hatten, nachträglich zu rekonstruieren. Insbesondere sind durch die Axiomatisierung der Punktmengentheorie viele Sätze über lineare Punktmengen so verwandelt, verallgemeinert, zerlegt und in einem andern Zusammenhang wieder verknüpft worden, daß ein einfaches Zitat kein richtiges Bild geben kann.

Herr J. O. Müller (Bonn) hat sich der aufopferungsvollen Mühe unterzogen, eine Korrektur des Buches mitzulesen, und Herr W. Blaschke (Prag) den größten Teil der Figuren gezeichnet; beiden Kollegen fühle ich mich zu herzlichem Danke verpflichtet.

Greifswald, 15. März 1914.

Felix Hausdorff.

Inhalt.

Sechstes Kapitel. **Beziehungen zwischen geordneten und wohlgeordneten Mengen.**

Siebentes Kapitel. **Punktmengen in allgemeinen Räumen.**

Achtes Kapitel. **Punktmengen in speziellen Räumen.**

Neuntes Kapitel. **Abbildungen oder Funktionen.**

Zehntes Kapitel. **Inhalte von Punktmengen.**

Greifswald, 6. 7. 1918

Geehrter Herr Vietoris!

Ihr ausführlicher Brief hat mich sehr interessirt. Ich fasse die Tendenz Ihrer Untersuchungen dahin auf, dass Sie möglichste Allgemeinheit der Voraussetzungen möglichst lange festzuhalten suchen, während ich in meinem Buche, nach dem allgemein gehaltenen 7. Kapitel, dann durch die Abzählbarkeitsaxiome gleich sehr starke Specialisirungen einführe. Die Bestimmung des Punktes, von wo an Allgemeinheit auf Kosten der Einfachheit erkauft wird, ist natürlich individuell; ich habe den Plan, die Punktmengen ebenso allgemein wie die geordneten Mengen zu behandeln und z. B. Verdichtungspunkte beliebiger Mächtigkeit einzuführen, wohl gehegt, aber schliesslich aufgegeben. Ihre Arbeit zeigt, dass man noch eine Strecke weit mit allgemeinen Voraussetzungen auskommt.

Der Zusammenhangs- oder Stetigkeitsbegriff hat gleich drei von einander unabhängige Entdecker gehabt: Sie, mich und *N. J. Lennes* (Am. J. of Math. 33 (1911), S. 303), auf welchen mich ein Citat bei A. Rosenthal aufmerksam machte. Dass er der Dedekindschen Stetigkeit bei geordneten Mengen entspricht, ist ganz richtig. Dass die Theorie der geordneten Mengen und die der Punktmengen überhaupt einheitlicher verarbeitet werden könnten, namentlich in der Bezeichnungsweise, ist mir nicht entgangen; ich fand in meinem Buche nur nicht den Muth, an der eingebürgerten Terminologie soviel zu ändern. Aber Ihre Benennung „*stetig*", neben der man das Cantorsche „zusammenhängend" beibehalten kann, ist zweifellos gut.

Ihr Begriff *Linienstück* hat ebenfalls meinen Beifall. Dass Sie sein Zerfallen nach Tilgung eines Punktes beweisen können, ist ein Fortschritt gegen das „irreducible Continuum" Zorettis; ich sehe das aber nicht auf Rechnung der Stetigkeit, sondern darauf, dass Ihre Irreducibilitätsforderung schärfer ist als die von Zoretti (bei Ihnen darf L keine stetige, a und b enthaltende echte Theilmenge, bei 2. nur kein a und b enthaltendes Theilcontinuum, d. h. keine stetige, beschränkte, abgeschlossene Theilmenge besitzen).

Ob Ihr Axiom ($\bar{C}$) statt (C) Vortheile bietet, und welche Rolle Ihr Axiom ($\bar{E}$) spielt, vermag ich nicht zu erkennen; da die Nichtbeachtung des letzteren mich nirgends gehindert hat, halte ich es zunächst für überflüssig.

Ihre „orientirte" Menge kommt bei mir als „theilweise geordnete Menge" (S. 139) ebenfalls vor. Sollte es nicht auch in Ihrer Untersuchung möglich sein, diesen Begriff zu entbehren und nur Grenzpunkte von geordneten Mengensystemen zu brauchen? Ihre Grenzpunktmenge (d. h. Menge der theilweisen Grenzpunkte) dürfte im Princip mit meinem Lim sup (S. 236), die Menge der gänzlichen Grenzpunkte mit meinem Lim inf sich decken, ~~also~~ die dem Borelschen ensemble limite complet, ensemble limite restreint analog gebildet sind.

Ihre Forderung der Lückenlosigkeit schliesst, wenn ich nicht irre, die meinige der Compactheit ein, die sich nur auf Existenz von Häufungspunkten abzählbarer Mengen bezieht, während Sie für jede Menge der Mächtigkeit m Verdichtungsstellen von der Dichte m fordern (beim lückenlosen = extremalen Bereich). Das erklärt mir, dass Sie Sätze über Grenzmengen beliebiger Mengensysteme aussprechen können, die bei mir nur für Mengenfolgen bewiesen sind.

Ob eine abgeschlossene, zwischen a, b stetige Menge ein Linienstück L(a, b) enthält, ist eine interessante Frage. Bei einer nicht abgeschlossenen Menge glaube ich sie verneinen zu können.

Sie sehen aus meinen Randbemerkungen, dass Ihr Schreiben mich interessirt hat; ich würde mich freuen, wenn Sie eine Publication mit ausführlichen Beweisen daraus machen würden.

Ihr ergebener

F. Hausdorff

a.1

Abschrift eines Briefes (Nr.1) an Herrn Dr.Felix Hausdorff, Prof. d.Universität Greifswald, Am Graben 5:

Wien, am 27.6.1918

Geehrter Herr Professor !

Verzeihen Sie mir die Kühnheit, Ihnen ohne Erlaubnis diesen Brief zu schreiben. Ich war zu Beginn des Krieges, d.i.beiläufig um die Zeit des Erscheinens Ihrer "Grundzüge der Mengenlehre" Student und seither Soldat, ohne meine Studien beenden zu können, da ich fast immer im Feld gestanden bin. Daher kannte ich Ihr Buch nur oberflächlich und ich war erstaunt, als ich neulich darin Ihren Zusammenhangsbegriff sah, einen Begriff, den ich selbst seit 1913 benützte und für dessen Alleinbesitzer ich mich bisher gehalten habe. Es fällt mir natürlich nicht ein, Ihnen die Priorität irgendwie streitig machen zu wollen; denn da Sie 1914 schon in der Lage waren,ihn samt einer Reihe anschließender Sätze zu veröffentlichen, müssen Sie ihn schon gekannt haben, als ich auf dem Gymnasium die Schulbank drückte.

Ich bin auf den Begriff von einer Problemstellung aus gekommen, welche sich in Ihrem Buch findet, und nenne ihn nicht Zusammenhang, sondern Stetigkeit.

Ich möchte diese Benennung auch allen Ernstes vorschlagen. Denn erstens ist Zusammenahng im Cantor-Jordanschen Sinn ein Begriff, der seine Bedeutung hat und in gewissem Sinn auch behalten wird, zweitens deckt sich Zusammenhang im Ihrem Sinn mit der für lineare Mengen definierten Dedekindschen Stetigkeit, drittens ist es(wenigstens nach meinem Gefühl) die Idee der Stetigkeit, d.h. das, was den Mathematikern vor der Definition irgendeiner Stetigkeit als Stetigkeit vorschwebte, daß für stetige Mengen der Satz gilt, den Sie auf S.247 aussprechen, indem sie anstatt stetig zusammenhängend sagen.:"Enthält eine zusammenhängende Menge Punkte von Komplementärmengen A,B, so enthält sie auch einen Punkt der Grenze $A_g=B_g$."

Weil ich hoffe, daß Sie daran Interesse haben, gebe ich im Folgenden eine kurze Darstellung meines Weges zu dem Begriff und dessen, wozu ich ihn verwendet habe.

Ähnlich wie Zoretti [1] und Janiszewski [2] stellte ich mir die Aufgabe, das Linienstück als irreduzibles Kontinuum zu definieren. Ich habe gefunden, daß dies am einfachsten auf folgende Weise geschieht:

Def.: Wir sagen, zwei Mengen A,B grenzen in einem Punkt p an einander, wenn dieser der einen von beiden angehört und Häufungspunkt der anderen ist.

Def.: Eine Menge M heißt von a nch b stetig oder zwischen a und b stetig, wenn sie a und b enthält und wenn je zwei einander auf M ergänzende Teilmengen, von denen die eine a, die andere b enthält,(in mindestens einem Punkt) an einander grenzen.

Def.: Eine Menge M heißt (schlechtweg) stetig, wenn je zwei echte Teilmengen von M, deren Summe M ist, aneinandergrenzen.

---

1) La notion de ligne. Ann.de l'Ec.Norm.26 (1909) und Contribution à l'etude des lignes Cantoriennes. Acta Math.36(1912).

2) Sur les continus irreductibles entre deux points. J.de l'Ec.Pol.(2)16.

a2

Zu den stetigen Mengen rechnen wir noch die Mengen, die aus nur einem Punkt bestehen, und die leere Menge.

Es ist klar, daß sich diese Stetigkeit mit Ihrem Zusammenhang deckt. In dieser Form ist auch ersichtlich, daß die Dedekindsche Stetigkeit einer linearen Menge ein Sonderfall der obigen Stetigkeit ist.

Eine stetige Menge ist also eine solche, welche zwischen je zweien ihrer Punkte stetig ist.

Def.: Eine Menge L heißt ein Linienstück von a nach b, wenn sie selbst, aber keine ihrer echten Tielmengen von a nach b stetig ist.

Es folgt:

L ist eine (schlechtweg)stetige Menge.

Ferner:

Ist $c \neq a$ $c \neq b, c \varepsilon L$, so zerfällt L-c in zwei elementfremde Teile L(a,c) und L(b,c), welche nicht an einander grenzen und L-c als Summe haben.

Def.: Wir nennen $c < d$, d.i. $d > c$, wenn $c \neq d$ und $c \varepsilon L(a,d)$ ist. Ferner definieren wir $a < x < b$ für $x \varepsilon L$, $x \neq a$, $x \neq b$.

Dann läßt sich zeigen, daß $d \varepsilon L(c,b)$ ist, d.h., daß $c < d$ und $d < c$ ein Widerspruch ist.

Ferner folgt aus $c \varepsilon L(ad)$ und $d \varepsilon L(a,e)$, daß $c \varepsilon L(a,e)$ ist; d.h.: Es folgt aus $c < d$, $d < e$ daß $c < e$ ist. Damit ist die natürliche (d.h. in der Definition des Linienstücks liegende) Anordnung der Elemente der Hauptsache nach gezeigt.

Ein solches Linienstück hat also die Eigenschaft, daß es nicht aus einer Menge in die Komplementärmenge reichen kann, ohne mit der GrenzePunkte gemein zu haben. Außerdem ist es inbezug auf diese Eigenschaft irreduzibel, sobald die Endpunkte, das sind in der obigen Definition die Punkte a und b, fest sind. Dies sind gerade die wichtigsten Eigenschaften, welche wir an einfachen Wegen von Punkten vorfinden. Doch ist ein solches Linienstück nicht immer abgeschlossen, wie das Beispiel der Kurve $y=f(x)$ zeigt, wenn wir

$$f(o)=o \text{ und } f(x)=\sin(1:x) \text{ für } 0 < x \leq m$$

definieren.Sie ist ein Linienstück zwischen den Punkten (0,0) und (m,sin(1:m)).

Ein Vergleich mit den Arbeiten von Zoretti und Janiszewski zeigt, daß die vorstehende Definition des Linienstücks die bei Weitem einfachere ist. Dies ist nur der Vewendung der Stetigkeit zu danken.

Von diesem Stetigkeitsbegriff habe ich noch eine Reihe von Sätzen entwickelt, welche eine sehr allgemeine Gültigkeit haben.

Die oben geschilderten Überlegungen gelten schon, wenn für den Umgebungsbegriff nur die erste Gruppe von Axiomen , wie sie sich in Ihrem Buch finden, feststeht. Doch verwende ich anstelle von (C) das folgende Axiom ($\bar{C}$):

($\bar{C}$) Zu jeder Umgebung U_x von x gibt es immer eine Umgebung V_x von x, sodaß jeder Punkt von V_x samt einer seiner Umgebungen in U_x liegt.

Die Umgebungssysteme, welche A,B,C,D und die, welche A,B,$\bar{C}$,D genügen, sind jedoch gleichwertig. Nur gestattet ($\bar{C}$) auch die Verwendung von Umgebungen, die nicht lauter innere Punkte enthalten.

Ihre zweite Gruppe von Umgebungsaxiomen war für meine Untersuchungen zu eng; D.h. diese ist dadurch nicht wesentlich länger geworden, daß ich zu allgemeineren Bereichen übergegangen bin[3] Ich verwende als zweite Gruppe von Axiomen das folgende Axiom:

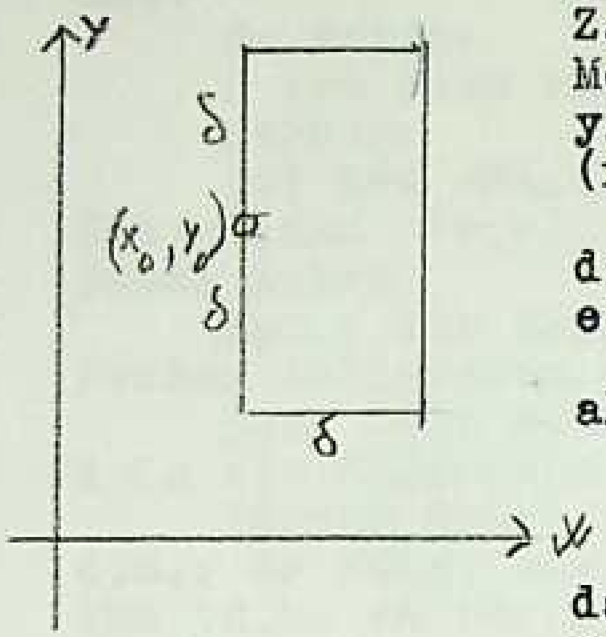
---

3) Das Wort Bereich soll hier immer nur im Sinn von Definitionsbereich, Geltungsbereich verwendet werden.

($\bar{E}$) Zu jeder Umgebung U_x von x gibt es eine Umgebung W_x von x, sodaß jeder Punkt der Komplementärmenge von W_x samt einer seiner Umgebungen in der Komplementärmenge von U_x liegt.

Die Analogie von $\bar{E}$ und $\bar{C}$ ist deutlich. Doch besitze ich sehr einfache Beispiele, welche die gegenseitige Unabhängigkeit von A,B,$\bar{C}$,D,$\bar{E}$ zeigen.

Daß $\bar{E}$ aus allen Axiomen A,B,C,D,E,F nicht folgt, zeigt das folgende Beispiel:



Bereich sei sei die Menge der gemeinen komplexen Zahlen x+iy. Umgebung eines Punktes x_0+iy_0 sei die Menge der Punkte x+iy, für welche $x_0 < x < x_0+\delta$ und $y_0-\delta < y < y_0+\delta$ $(\delta > 0)$ ist, vemehrt um den Punkt (x_0,y_0).

Ich halte deshalb, weil solche Möglichkeiten doch ausgeschlossen werden müssen, das Axiom $\bar{E}$ für eine notwendige Ergänzung Ihres Axiomensystems.

Geordnet nenne ich eine Menge nur,√ außer den allgemein üblichen Voraussetzungen ausnahmslos ent-

√wenn weder $a < b$ oder $a > b$ oder $a \equiv b$ (identisch) gilt.

Ersetzt man hier $a \equiv b$ durch $a=b$ (gleich), dann heiße die Menge geschichtet. Zwei Elemente $a=b$ heißen dann in derselben Schichte, d.i. der Menge aller Punkte $x=a=b$ liegend.

Die Menge der Schichten einer geschichteten Menge ist geordnet.

Gestattet man nun noch, daß auch der Fall möglich sein soll, daß weder $a<b$ noch $a>b$ noch $a=b$ gilt, dann heiße eine Menge orientiert, wenn es nur von je zwei Elementen entscheidbar ist, ob eine der drei Beziehungen und welche besteht.

Während eine geordnete Menge höchstens ein erstes und höchstens ein letztes Element haben kann, kann eine geschichtete Menge eine ganze Schichte erster und eine ganze Schichte letzter Elemente haben. Der triviale Fall, daß diese beiden Schichten identisch sein können, stört uns nicht.

Beispiel einer orientierten Menge ist die Menge aller Untermengen einer beliebigen Menge. Sie ist durch die Beziehung $\leq$ "natürlich" orientiert. Ebenso ist die Menge der Umgebungen eines Punktes natürlich orientiert.

Daß dieser Begriff der Orientierung einer Menge von dem der Ordnung praktisch verschieden ist, geht daraus hervor, daß eine orientierte Menge M ohne letztes Element nicht immer eine geordnete Teilmenge ohne letztes Element besitzt, sodaß der Durchschnitt zweier beliebiger Reste R und S_1 von M und M_1 von 0 verschieden ist.

Beispiel: A sei der erste nicht abzählbare Abschnitt der Menge der transfiniten Zahlen, B die Menge der ganzen positiven Zahlen. A.B, d.h. die Menge der Zahlenpaare (α,β) $(\alpha \varepsilon A, \beta \varepsilon B)$ ist orientiert wenn wir $(\alpha,\beta) < (\alpha',\beta')$ definieren, sobald $\alpha < \alpha'$ und $\beta < \beta'$ ist. A.B besitzt aber keine geordnete Teilmenge der obigen Art.

Auch Umgebungssysteme lassen sich leicht definieren, welche A,B,$\bar{C}$,D,$\bar{E}$ genügen und sich nicht durch gleichwertige ersetzen lassen in denen jeder Punkt eine geordnete Menge von Umgebungen hat, deren Durchschnitt dieser Punkt allein ist.

Aus diesem Grund halte ich es auch für eine sehr schwierige Sache, aus A,B,$\bar{C}$,D,$\bar{E}$ mit Hinzunahme des Auswahlaxioms jene Folgerungen zu ziehen, welche sich auf Ihre zweite Gruppe von Umgebungen stützen, wenn man sich nicht des Begriffs der Ordnung bedient.

Def.: Ein Punkt r heißt gänzlicher Grenzpunkt einer orientierten Menge zweiter Ordnung $M=\{\ldots Q \ldots Q \ldots\}$ ohne letztes Element, wenn es zu jeder Umgebung V von r ein Q_V M gibt, sodaß jedes Q / Q_V Punkte von V enthält.

Def.: Ein Punkt r heißt teilweiser Grenzpunkt einer orientierten Menge zweiter Ordnung $M=\{\ldots Q \ldots Q \ldots\}$ ohne letztes Element, wenn es zu jeder Umgebung V von r und zu jedem Element Q von M noch Elemente Q Q von M gibt, welche Punkte von v enhalten.

Danach ist r auch gänzlicher, beziehungsweise teilweiser Grenzpunkt von M, wenn es zu jedem $Q_\beta \varepsilon M$ ein $Q_\alpha \varepsilon M$ gibt, sodaß r in allen beziehungsweise in irgendeinem $Q_\xi > Q_\alpha$ enthalten ist. Solche Grenzpunkte mögen uneigentliche heißen.

Diese zwei Definitionen erhalten einen einfacheren Sinn, wenn die Elementmengen von M einzelne Punkte sind, d.h. wenn M eine Menge erster Ordnung ist.

Beispiel eines gänzlichen Grenzpunktes ist ein beliebiger limes der Analysis. Beispiele von teilweisen Grenzpunkten sind limsup und liminf der Analysis, ferner ist die Menge der Punkte (0,y) für $|y| \leq 1$ teilweiser Grenzpunkt der oben definierten Kurve $y=f(x)$, wenn man sie nach abnehmenden Abszissen ordnet.

Es gilt der folgende wichtige Satz:

Jeder Punkt ist einziger und gänzlicher Grenzpunkt der in natürlicher Weise orientierten Menge seiner Umgebungen.

Nun bin ich in der Lage, die letzte Voraussetzung für die oben erwähnte Reihe von Sätzen zu formulieren.

Def.: Eine Menge M heißt in einer orientierten Menge B lückenlos, wenn jede geodnete Teilmenge von M ohne letztes Element mindestens einen zu B gehörenden Grenzpunkt hat. Dieser braucht M nicht anzugehören.[4]

Damit ist auch gesagt, was in sich lückenlos heißt. Für einen Bereich ist lückenlos und insich lückenlos dasselbe.

Nennen wir einen Bereich extremal (Frechet), wenn jede seiner Mengen von der Mächtigkeit $\aleph$ mindestens eine Verdichtungsstelle der Mächtigkeit $\aleph$ hat, so läßt sich der folgende Satz zeigen:

Jeder lückenlose Bereich ist extremal und umgekehrt.

Eine Menge zweiter Ordnung der Art, daß der Durchschnitt je zweier Elementmengen wieder eine Elementmenge enthält, nenne ich im Anschluß an den Begriff des Ringes einen Kranz.

Jeder Kranz ist durch die Beziehung $\leq$ "natürlich" orientiert.

Mithilfe des Auswahlaxioms folgt, wenn wir von nun an einen lückenlosen Bereich voraussetzen;

Jeder Kranz von abgeschlossenen nicht leeren Mengen hat einen abgeschlossenen nicht leeren Durchschnitt.

Jeder Kranz hat einen nicht leeren Durchschnitt oder eine nicht leere Menge von Grenzpunkten.

Jede orientierte Menge ohne letztes Element, hat eine Grenzpunktmenge $\neq 0$.

---

[4] Damit ist ersichtlich, wie ich mir die allgemeine Definition einer Lückenlosigkeit vorstelle. Es handelt sich nur mehr um die vorteilhafteste Form.

Es ist hier, wo die nähere Darstellung fehlt, ein scheinbarer Widerspruch, daß in der Definition der Lückenlosigkeit nur geordnete Mengen auftreten und hier wieder Sätze über geordnete Mengen erscheinen. Der Grund für diese Erscheinung ist die Verwendung des Auswahlaxioms.

Def.: Wir sagen, eine Menge U_A umgebe A, wenn jeder Punkt von A samt einer seiner Umgebungen in U_A liegt.

Es gelten die Sätze:

Haben die abgeschlossenen Mengen A und B keinen Punkt gemein, so gibt es zwei A, beziehungsweise B umgebende Mengen, welche mit einander keinen Punkt gemein haben.

Dasselbe in anderer Form:

Grenzen die Mengen A und B nicht an einander und haben sie keinen Punkt oder Häufungpunkt gemein, dann gibt es eine Teilung des Bereiches in zwei Teile $M \supset A$ und $N \supset B$, sodaß auf der Grenze zwischen M und N kein Punkt von A oder von B liegt.

Dieser Satz, der als Umkehrung Ihres oben erwähnten Satzes auf S.247 aufgefaßt werden kann, scheint auf den ersten Blick eine Folge desseben zu sein. Doch besitze ich den Beweis, daß für seine Gültigkeit alle angegebenen Voraussetzungen, insbesondere die der Lückenlosigkeit notwendig sind. Er spielt in allen folgenden Untersuchungen die Rolle eines unentbehrlichen Hilfssatzes. Besonders die folgenden Sätze stützen sich auf ihn.

Stetigkeitssätze:

Die Grenzpunktmenge G einer orientierten Menge M von zwischen zwei Punkten a und b stetigen Mengen ist selbst von a nach b stetig

Jeder Kranz von stetigen Mengen hat eine stetige Grenzpunktmenge.

Jede Grenzpunktmenge einer orientierten Menge M von stetigen Mengen ist selbst stetig, wenn M mindestens einen gänzlichen Grenzpunkt hat.

Ist eine Menge M abgeschlossen und von a nach b stetig, so hat sie eine (schlechtweg) stetige Teilmenge, welche a und b entHält.

Ist eine Menge M abgeschlossen und von a nach b stetig, so besitzt jede Teilmenge A von M, welche a enthält, eine stetige Teilmenge, welche a enthält und an M-A grenzt.

Schließlich vermute ich den folgenden Satz, den zu beweisen ich noch nicht im Stande war:

Eine zwischen zwei Punkten a und b stetige abgeschlossene Menge hat immer ein Linienstück L von a nach b als Teil ?

Es sei noch einmal erwähnt, daß von dem durch den Text laufenden großen Strich an nur mehr lückenlos Bereiche vorausgesetzt sind. Ein lückenloser Bereich hat, wie man sieht, die wichtigsten Eigenschaften eines vollständigen Raumes.

Der Beweis dieses Satzes ist logisch ziemlich einfach, doch erfordert er viel Schreibarbeit, sodaß ich hier auf ihn nicht eingehen kann.

Zur Aufstellung dieses Satzes bin ich gedrängt worden durch die Untersuchung von mehrdimensionalen Gebilden, welche ich als irreduzible Kontinua, jedoch mit einer anderen Randbedingung als der des Linienstücks (Forderung, zwei gegebene Punkte zu enthalten) definiere. Ob dazu die geschilderte Theorie der stetigen Mengen schon alle Mittel liefert, habe ich bis jetzt nicht erkennen können.

Zum Schluß bitte ich nochmals um Verzeihung für meine Zudringlichkeit, aber ich hoffe, Sie nicht gelangweit zu haben. Ich bitte auch, die schlechte Schrift zu entschuldigen; ich habe in absehbarer Zeit unmöglich Muße, schöner zu schreiben.

Ihr ganz ergebener

Leopold Vietoris m.p.

Wien IX. Nußdorferstr. 21

Als Berichtigung zum Brief (Nr.1) vom 27,6.1918 schrieb ich den folgenden Brief (Nr.2) an F.Hausdorff:

Geehrter HerrProfessor !   Wien, am 5.Juli 1918.

In dem Brief, welchen ich mir an Sie zu schreiben erlaubt habe, finden sich die folgenden Fehler:

1) Im angeführten Axiom (E) habe ich aus Versehendie Komplementärmengen von W_x und U_x mit einander vertauscht.

2) Der dritte Absatz nach der Definition der orientierten Menge soll lauten:

"Daß dieser Begriff der Orientierung einer Menge von dem der Ordnung praktisch verschieden ist, geht daraus hervor, daß eine orientierte Menge M ohne letztes Element nicht immer eine geordnete Teilmenge M_1 ohne letztes Element besitzt, sodaß in jedem Rest R von M ein Rest R_1 von M_1 enthalten ist.

3) Die Definition des extremalen Bereiches lautet klarer:

Wir nennen einen Bereich extremal, wenn jede seiner Mengen mindestens eine Verdichtungsstelle hat, deren Dichte gleich der Mächtigkeit von M ist.

Diese Fehler konnten sich nur dadurch einschleichen, daß ich von der Vorbereitung auf eine bevorstehende Prüfung fast ganz in Anspruch genommen bin.

Bei 2) hatte ich mich verleiten lassen, das als richtig erkannte Alte durch etwas einfacheres zu ersetzen, was mir(jedoch ohne die unerläßliche Unte suchung) als ebenso richtig erschien. Das nachfolgende Beispiel wird durch diese Berichtigung erst verständlich.

Wenn ich durch diese Fehler Ihre kostbare Zeit vergeudet oder Sie geärgert habe, dann tut mir das herzlich leid und ich bitte vielmals um Verzeihung.

Ihr ergebener
Leopold Vietoris m.p.

c 1

Abschrift eines mit der Reinschrift im Wesentlichen gleichlautenden Konzeptes:

Geehrter Herr professor !   Wien, am 2o.Juli 1918

Für Ihren gütigen Brief bin ich Ihnen zu großem Dank verpflichtet. Er hat mir gezeigt, wie wenig von meinen Untersuchungen wirklich neu ist, andererseits zeigt mir die Tatsache, daß das Meiste in teilweise anderer Form schon vorhanden ist, daß meine Überlegungen richtig sind und dem Grund der Sache nachgehen.

In der von Ihnen zitierten Arbeit von N.J.Lennes (Am.J.of Math. 33(1911) findet sich S.3o8 auch eine Definition eines einfachen Bogens als dessen, was ich nach meiner Definition ein abgeschlossenes Linienstück nennen müßte. Ich glaube, es ist vorteilhafter, das Linienstück als solches zu definieren und erst im Einzlfall die Abgeschlossenheit hinzuzunehmen. Denn diese geht in die meisten Überlegungen, welche mit Linienstücken, Bögen etc. angestellt werden, nicht wesentlich ein, Bei Lennes selbst erst bei Theor.8, welches aussagt, daß daß ein abgeschlossenes Linienstück, d.i. eine einfacher Bogen nach der Terminologie Hahns zusammenhängend im Kleinen ist. Es ist nur schade, daß Lennes einen so speziellen Umgebungsbegriff verwendet. Doch gelten seine Überlegungen allgemeinerer Natur auch, wenn man sein "triangle" einfach mit "Umgebung" übersetzt. Vielleicht ist dieser Standpunkt in einer anderen Arbeit von Lennes(Curves and surfaces in analysis situs. Amer.Math.Soc. Bull.(2)17(525), welche ich aber nicht zu Gesicht bekommen habe, durchgeführt.

Daß Sie meine Bezeichnung stetig so schnell gut geheißen haben und in Ihrem ganzen Brief durchführen, hat mich außerordentlich, aber auch freudig überrascht. Eigentlich ist es zu verwundern, daß der Begriff der Stetigkeit erst im 20-ten Jahrhundert geschaffen worden ist, da er doch so natürlich ist. Definiert doch schon im 14. Jahrhundert Bradwardinus (Zeitschr.f.Math.u.Phys XIII Suppl.): Continuum est quantum cuius partes ad invicem copulantur" nur weiß man natürlich nicht, was er unter copulari versteht. Auch die Ausführungen von Rieß (Atti del IV congresso int.dei Mat.,Roma 19o8) geben über Zusammenhangseigenschaften nichts konkretes; im Gegenteil findet sich dort ein Satz, der zum Mindesten mißvertsnden werden kann, daß sich nämlich Zusammenhangseigenschaften durch den Begriff der Verdichtungsstelle nicht mehr beschreiben lassen. Dagegen ist der Begriff der Verkettung, von dem das "aneinander Grenzen" ein Sonderfall ist, ein wertvoller Begriff.

Das Axiom ($\bar{C}$) habe ich dem Axiom (C) vorgezogen, weil es mitunter vorteilhaft ist, jede Obermenge einer Umgebung eines Punktes wieder als Umgebung desselben aufzufassen, wodurch man ein ganz allgemeines, dem ursprünglichen gleichwertiges System von Umgebungen erhält. Dieser Vorgang ist aber für Ihr Axiomensystem nicht brauchbar, weil auch (E) und (F) in ihrer Gültigkeit gestört würden. Im übrigen gefällt mir lediglich die Symmetrie zwischen ($\bar{C}$) und ($\bar{E}$).

Daß Sie durch die Nichtbeachtung von ($\bar{E}$) nicht gestört werden, scheint mir seinen Grund darin zu haben, daß ($\bar{E}$) aus Ihrem Axiomensystem folgt, wenn man noch die Kompaktheit des Bereiches oder nur aller vorkommenden Mengen voraussetzt. Diese Forderung bringt auch mit sich, daß der Bereich extremal=lückenlos ist (ebenso zu beweisen, wie Ihr Satz I auf S.268). Ich kann also alle meine Ergebnisse auf Ihren Bereich anwenden, sobald ich ihn als kompakt voraussetze. Im Übrigen beweisen Sie die fraglichen Sätze, wie Satz X des VII. Kap. mit wesentlicher Benützung des Abstandsbegriffs.

"Orientiert" und "teilweise geordnet " ist tatsächlich das-c/2

selbe. Aber Ihre Frage, ob man diesen Begriff auch auf meinem allgemeineren Standpunkt nicht entbehren kann, glaube ich verneinen zu müssen. In Ihrem Bereich gibt es nur abzählbar viele Umgebungen. Ist also eine Menge A von Punkten gegeben, so gibt es immer eine (abzählbare) Folge von A umgebenden Mengen, deren Durchschnitt A ist. In meinem Bereich sind die A umgebenden Mengen durch die Beziehung $\subset$ teilweise geordnet, im allgemeinen gibt es aber keine geordnete Teilmenge M von sdchen umgebenden Mengen, welche dem Gesamtsystem N der A umgebwnden Mengen gleichwertig ist, d.h. daß in jeder Elementmenge von M eine von N enthalten ist und umgekehrt. Wollte man diese Schwierigkeit ausschalten, so müßte man voraussetzen, daß erstens jeder Punkt eine geordnete und daher auch eine wohlgeordnete Menge von in einander geschachtelten Umgebungen hat, deren Durchschnitt er allein ist, und daß diese Wohlordnungstypen alle dieselben sind. Da nun der Bereich zum mindesten kompakte Mengen enthalten soll, muß es Punkte geben, für weche dieser Ordnungstypus der der ganzen positiven Zahlen ist, d.h. Ihr erstes Abzählbarkeitsaxiom wäre notwendig erfüllt.

Mir scheinen demnach hier nur zwei Wege gangbar zu sein. Entweder man setzt Ihr Axiomensystem und, wo es notwendig ist, die Kompaktheit voraus. Dann kommt man ohne den Begriff der teilweise geordneten Menge, insbesondere ohne deren Limits aus, oder man verwendet anstatt der Abzählbarkeitsaxiome und der Kompaktheit das Axiom $(\overline{E})$ und die Voraussetzung der Lückenlosigkeit.

Was Sie von Ihrem $\overline{\mathrm{Lim}}$sup, bezw. $\overline{\mathrm{Lim}}$inf sagen, muß ich anerkennen. Ein Unte schied liegt nur in der Bezeichnungsweise; während Ihre Bezeichnungen sich von einem algemeineren Standpunkt aus auf die Mengen der Grenzpunkte beziehen, habe ich diese als solche benannt.

Ich habe diesen Brief nur in der selbstverständlichen Voraussetzung geschrieben, daß Herr Professor ihn nur dann beantworten werden, wenn Sie irgend ein höheres Interesse dazu veranlaßt, niemals aber aus reiner Höflichkeit oder Rücksichtnahme auf mich.

Indem ich mich nochmals für Ihren gütigen Brief bedanke, verbleibe ich Ihr ergebener

Leopold Vietoris
m.p.

Wien IX, Nußdorferstr.21