

# Nichtlineare Gleichungen in $\mathbb{R}$

## A) Die Prototypen

Die ‘einfachste’ nichtlineare Gleichung wird durch eine nichtlineare Polynomfunktionen  $P : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , welche die Gestalt

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 \quad (a_0, a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R} \text{ konstant}, a_n \neq 0, n \geq 2)$$

hat, beschrieben. Genauer, ein einfaches nichtlineares Problem ist gegeben durch:

Finde alle  $x \in \mathbb{R}$ , sodass  $P(x) = 0$  gilt.

Damit das Problem *nicht linear* ist muss  $a_n \neq 0$  mit  $n \geq 2$  gelten. Wir erinnern, dass  $x \mapsto a_0$ ,  $x \mapsto a_1 x$  und  $x \mapsto a_1 x + a_0$  eine *konstante*, eine *lineare* und eine *affine* Funktion sind, falls  $a_j \neq 0$  für alle  $j$ . Sehr oft wird zwischen linear und affin nicht unterschieden!

**Definition 1** Eine Funktion  $f : V_{\mathbb{R}} \rightarrow V_{\mathbb{R}}$  heißt linear, genau dann wenn

$$f(x + y) = f(x) + f(y) \quad \text{und} \quad f(\lambda x) = \lambda f(x) \quad \text{für alle} \quad \lambda \in \mathbb{R}, x, y \in V_{\mathbb{R}}.$$

Hier ist  $V_{\mathbb{R}}$  ein Vektorraum<sup>1</sup> über  $\mathbb{R}$ , z.B.  $V_{\mathbb{R}} := \mathbb{R}$ .

Wir werden nicht erklären was genau ein Vektorraum über  $\mathbb{R}$  ist, hier benötigen wir nur den Spezialfall  $V_{\mathbb{R}} := \mathbb{R}$ .

**Aufgaben 1** Zeige, das  $x \mapsto \sqrt{3}x$  eine lineare Funktion ist und  $x \mapsto \sqrt{2}x^2$  keine lineare Funktion ist.

**Beispiel 1** Löse die nichtlineare Gleichung  $x^7 \sqrt{6} - \sqrt{3}x^4 = -x^2 \sqrt{12}x^2$  in  $\mathbb{R}$ . Zuerst vereinfachen wir die Gleichung zu

$$\sqrt{6}x^7 + \sqrt{3}x^4 = 0 \quad \text{und dann zu} \quad (\sqrt{6}x^3 + \sqrt{3})x^4 = 0.$$

Da ein Produkt von Zahlen genau dann Null ist wenn mindestens einer der beiden Faktoren Null ist folgt:

$$x = 0 \quad \text{oder} \quad \sqrt{6}x^3 + \sqrt{3} = 0.$$

Die letzte Gleichung ist äquivalent zu  $\sqrt{6}x^3 = -\sqrt{3}$ , was wiederum äquivalent ist zu  $x^3 = -\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{6}} = -\sqrt{\frac{3}{6}} = -\sqrt{\frac{1}{2}}$  und damit folgt

$$x = \sqrt[3]{-\sqrt{\frac{1}{2}}} = \sqrt[3]{-1} \sqrt[3]{\sqrt{\frac{1}{2}}} = -\sqrt[6]{\frac{1}{2}}.$$

Hier haben wir verwendet, dass  $\sqrt[u]{-1} = 1$  für ungerades  $u$  und  $\sqrt[r]{\sqrt[s]{a}} = \sqrt[r \cdot s]{a}$  für  $a > 0$  und  $r, s \in \mathbb{N}$ . (Vgl. mit  $\sqrt[r]{a} \cdot \sqrt[s]{a} = \sqrt[r \cdot s]{a}$  für  $a > 0$  und  $r, s \in \mathbb{N}$ .) Alles zusammen ergibt, dass die Lösungsmenge der nichtlineare Gleichung gegeben ist durch

$$\mathbb{L} = \left\{ 0, -\sqrt[6]{\frac{1}{2}} \right\}.$$

<sup>1</sup>Was benötigen wir damit die Bedingungen für  $f$  sinnvoll sind?  $x, y \in V_{\mathbb{R}}$  impliziert  $x + y \in V_{\mathbb{R}}$  und  $\lambda \in \mathbb{R}, x \in V_{\mathbb{R}}$  impliziert  $\lambda x \in V_{\mathbb{R}}$ . Dies gilt für Vektorräume.

**Aufgaben 2** Betrachte die nichtlineare Gleichung  $x^6 \sqrt{6} - \sqrt{3} x^4 = -x^2 \sqrt{12} x^2$ . Zur Information,  $x^7$  in Beispiel 1 wurde durch  $x^6$  ersetzt.

Für Mathe 1: Zeige, dass die Lösungsmenge in  $\mathbb{R}$  durch  $\mathbb{L} = \{0\}$  gegeben ist.

Für Mathe 2: Zeige, dass die Lösungsmenge in  $\mathbb{C}$  durch  $\mathbb{L} = \left\{0, i \sqrt[4]{\frac{1}{2}}\right\}$  gegeben ist.

**Beispiel 2** Löse die folgenden Gleichungen in  $\mathbb{R}$ :

$$(i) \sqrt{x} = a \quad \text{und} \quad (ii) \sqrt{x} = -b \quad \text{wobei} \quad a \geq 0, b > 0.$$

Wir wiederholen, dass die (positive) Wurzelfunktion das Intervall  $[0, \infty[$  bijektiv auf das Intervall  $[0, \infty[$  abbildet. Und damit folgt, dass die Gleichung  $\sqrt{x} = a$  genau eine Lösung in  $\mathbb{R}$  hat und die Gleichung  $\sqrt{x} = -b$  keine Lösung in  $\mathbb{R}$  hat. Wegen  $\sqrt{0} = 0$  und  $\sqrt{1} = 1$  folgt, dass  $\sqrt{x} = 0$  die Lösung  $x = 0$ ,  $\sqrt{x} = 1$  die Lösung  $x = 1$  und  $\sqrt{x} = -1$  keine Lösung hat. Die Lösung für den Fall (i) folgt sofort durch quadrieren der Gleichung  $\sqrt{x} = a$  und ergibt  $x = a^2$ . Eine Warnung: Sie können natürlich formal die Gleichung  $\sqrt{x} = -b$  quadrieren, was  $x = b^2$  ergibt, aber dieses Ergebnis ist nur dann korrekt, wenn das ursprüngliche Problem eine Lösung hat - aber dem ist nicht so.

**Beispiel 3** Löse die folgenden Gleichungen in  $\mathbb{C}$ :

$$(i) \sqrt{z} = a \quad \text{und} \quad (ii) \sqrt{z} = -b \quad \text{wobei} \quad a \geq 0, b > 0.$$

Angenommen es gibt eine komplexe Lösung  $z$ , d.h. es gilt<sup>2</sup>

$$\sqrt{z} = a \quad \text{und} \quad z = r e^{i\varphi} \quad (r > 0, \varphi \in [0, 2\pi[).$$

Die Darstellung  $z = x + iy$  mit  $x, y \in \mathbb{R}$  ist zwar korrekt, aber nicht sehr hilfreich für dieses Problem. Wurzelziehen ergibt für diese Darstellung von  $z$ :

$$\sqrt{z} = \sqrt{r} e^{i\frac{\varphi}{2}} \quad \text{also} \quad a e^{i0} = \mathbf{a} = \sqrt{z} = \sqrt{r} e^{i\frac{\varphi}{2}}$$

woraus  $\sqrt{r} = a$  und  $\frac{\varphi}{2} = 0$  folgt. Damit muss die Lösung  $z$  eine reelle Zahl sein ( $\varphi = 0!$ ) und  $a$  darf nicht negativ sein ( $a = \sqrt{r} > 0$ ). Insbesondere gibt es keine Lösung für den Fall (ii). Der Fall (i) folgt durch quadrieren was zu  $z = x = a^2$  führt; oder wegen  $\sqrt{r} = a$  und  $z = r$  folgt  $z = a^2$ .

Im Beispiel 3 haben wir stillschweigend folgenden Satz verwendet:

**Satz 1** Die Funktion  $\exp(i \cdot) : [0, 2\pi[ \rightarrow [-1, 1]$ ,  $\varphi \mapsto e^{i\varphi}$  ist bijektiv und erfüllt die Eigenschaft:

$$\exp(i\varphi) = \cos(\varphi) + i \sin(\varphi) \quad \text{für} \quad \varphi \in [0, 2\pi[.$$

Liegt also  $z$  auf dem Kreis  $x^2 + y^2 = 1$ , dann hat die Gleichung  $\exp(i\varphi) = z$  genau eine Lösung  $\varphi$  in  $[0, 2\pi[$ . Insbesondere, hat die Gleichung  $\exp(i\varphi) = 1$  genau eine Lösung in  $[0, 2\pi[$  nämlich  $\varphi = 0$ .

**Beispiel 4** Löse die Gleichung  $\left(-\frac{x}{5}\right)^3 = -27$  in  $\mathbb{R}$ . Wegen  $(-1)^3 = (-1)(-1)(-1) = 1(-1) = -1$  vereinfacht sich die Gleichung (ohne die Lösungsmenge zu verändern) zu

$$\left(\frac{x}{5}\right)^3 = 27 \quad \text{was äquivalent ist zu} \quad \frac{x}{5} = \sqrt[3]{27} = \sqrt[3]{3 \cdot 3 \cdot 3} = 3.$$

Die letzte Gleichung ist äquivalent zur Gleichung  $x = 3 \cdot 5 = 15$ , die uns die Lösung direkt angibt.

<sup>2</sup>Dies ist die Polardarstellung von  $z$ .

**Beispiel 5** Löse die Gleichungen (i)  $\left(\frac{x}{5}\right)^\pi = 7$  und (ii)  $\left(\frac{x}{5}\right)^{3.1} = -5$  in  $\mathbb{R}$ . Weil die rechte Seite der ersten Gleichung positiv ist folgt

$$\left(\frac{x}{5}\right)^\pi = 7 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{x}{5} = \sqrt[\pi]{7} \quad \Leftrightarrow \quad x = 5 \sqrt[\pi]{7} \quad \text{also} \quad \mathbb{L} = \{5 \sqrt[\pi]{7}\}.$$

Hier haben wir verwendet, das  $\sqrt[a]{a}$  nur für positives  $a$  definiert ist, weil  $\pi$  keine ungerade (positive) Zahl ist. Die in (ii) ist nicht lösbar, weil die rechte Seite der zweiten Gleichung negativ ist und 3.1 keine ungerade (positive) Zahl ist. Also gilt  $\mathbb{L} = \emptyset$  (leere Menge). Mehr zu  $x \mapsto \sqrt[x]{x}$  mit irrationalen  $s$  kommt natürlich nicht. Dies würde zu weit gehen.

**Beispiel 6** Wir lösen nun die einfache nichtlineare Gleichung

$$f(x) := x^3 - (1 + \pi)x^2 + \pi x = 0 \quad \text{auf } \mathbb{R}.$$

Der Fundamentalsatz der Algebra besagt: Jede Polynomfunktion von  $\mathbb{C}$  nach  $\mathbb{C}$  mit dem Grad  $n$  hat genau  $n$  Nullstellen, wobei es Mehrfachnullstellen in  $\mathbb{C}$  geben kann. Sind alle Nullstellen reelle Zahlen so hat die Polynomfunktion genau  $n$  reelle Nullstellen, wobei es Mehrfachnullstellen geben kann. Das heißt also, das obige Gleichung von der Gestalt

$$a(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3) = 0$$

ist. Wir versuchen nun eine der drei Nullstellen zu erraten. Nachdenken führt zu:

$$0 = x^3 - (1 + \pi)x^2 + \pi x = (x^2 - (1 + \pi)x + \pi)x$$

also ist  $x_1 = 0$  eine Nullstelle. (Das ist trivial und sollte immer erkannt werden!) Testen wir noch ob  $x_2 = 1$  gilt? Dazu dividieren wir das Polynom  $(x^2 - (1 + \pi)x + \pi)$  durch  $(x - 1)$  und erhalten

$$(x^2 - (1 + \pi)x + \pi) : (x - 1) = x - \pi,$$

also folgt  $x_1 = 0$ ,  $x_2 = 1$  und  $x_3 = \pi$ . Alternative kann man auch die quadratische Gleichung  $(x^2 - (1 + \pi)x + \pi) = 0$  lösen.

**Beispiel 7** Löse  $2^x = 16$  in  $\mathbb{R}$ . Wir sehen sofort, dass  $2^4 = 16$  gilt also  $x = 4$  eine Lösung ist. Ist es die einzige Lösung? Ja, weil  $x \in \mathbb{R} \mapsto 2^x \in \mathbb{R}$  eine injektive Abbildung ist. Alternative kann man auch den Logarithmus auf beiden Seiten anwenden und das Ergebnis vereinfachen.<sup>3</sup>

$$x \log(2) = \log(16) = \log(2^4) = 4 \log(2) \quad (\text{oder} \quad x \log(2) = \log(16)).$$

Aber dies ist äquivalent zu  $x = 4$  (oder  $x = \frac{\log(16)}{\log(2)} = \frac{\log(2^4)}{\log(2)} = 4$ ), wobei die Division wegen  $\log(2) \neq 0$  erlaubt ist. Bemerkung:  $2^x = -16$  ist nicht lösbar, weil  $2^x > 0$  für alle  $x$ , und  $2^{-x} = 16$  hat die Lösung  $x = -4$  hat. Wir erinnern,  $x = \log_a(b)$  (Logarithmus mit Basis  $a$ ) ist jene Zahl, sodass  $a^x = b$ . Deshalb gilt zum Beispiel  $\log_a(a^x) = x$  und  $\log_a(a^{-x}) = -x$ .

**Beispiel 8** Löse die Gleichung

$$\log(x) \cdot e^x \cdot \frac{x^2}{x - \pi} \cdot (2^x - 4) \cdot (x - \pi) \cdot \frac{1}{3 + x} = 0 \quad \text{in} \quad \mathbb{R}.$$

Zuerst bestimmen wir den Definitionsbereich  $D$  des Ausdrucks auf der linken Seite. Es darf niemals durch Null dividiert werden, d.h. es muss  $x \neq \pi$ ,  $x \neq -3$ ,  $\log(x) \neq 0$  und  $\log(x)$  muss definiert sein. Die vorletzte Bedingung ist äquivalent zu  $x \neq 1$ , den  $\log(1) = 0$ , und die letzte ist äquivalent zu  $x > 0$ . Alles zusammen ergibt  $D = ]0, \infty[ \setminus \{-3, 1, \pi\}$ . Wir bemerken, dass (i)  $\log(1) = 0$ , (ii)  $e^x > 0$  für alle  $x \in \mathbb{R}$  gilt, (iii)  $x^2 = 0$  für  $x = 0$ , (iv)  $2^x - 4 = 0$  gilt genau dann, wenn  $x = 2$ , (v)  $x = \pi$  keine Lösung ist, weil es nicht im Definitionsbereich liegt und (vi)  $1/(3 - x)$  niemals Null sein kann. In summe folgt:

$$\mathbb{L} = \{0, 1, 2\}.$$

<sup>3</sup>Wenn die Basis des Logarithmus nicht wichtig ist, dann lässt man sie weg. Man schreibt also  $\log(b)$  statt  $\log_a(b)$ .