

## Verschiedenes

Im Folgenden behandeln wir einige einfache Rechenbeispiele. Wir zeigen auch auf in welchen (praktischen) Situation sie vorkommen und hilfreich sein können. Dieser Abschnitt hat die zwei Ziele

- 1) Wiederholung von einfachen Aufgaben, welche Sie alle können sollten (, bei denen aber viele von ihnen Probleme haben).
- 2 Aufzeigen ihrer Nützlichkeit bei komplizierteren Rechnungen.

Dies dient dazu, dass

- 1) Sie hier mögliche Schwächen erkenne und beseitigen können und
- 2) Sie ihre Fähigkeiten (wie Konzentration und Überblick) verbessern können.

In jedem Fall sollten Sie diesen Abschnitt durchlesen!

**NB:** Ich werde versuchen diese Lernhilfe nach jeder mündlichen Prüfung zu ergänzen.

## Das Einfachste vom Einfachen

### Beispiel 1 Löse

$$a \cdot 2 = 1 \quad \text{in den reellen Zahlen } (\mathbb{R}).$$

*In Worten: Finde jene Zahl  $a$ , die mit 2 multipliziert 1 ergibt.*

**Lösung.** Die richtige Antwort lautet

$$a = 1/2 \quad \text{bzw.} \quad a = 0.5 \quad \text{bzw.} \quad a = \frac{1}{2} \quad \text{bzw.} \quad a = 2^{-1}.$$

□

Und wo kommt dies nun vor? Angenommen Sie wollen ein Integral lösen und machen einem Fehler:

$$\int_1^2 4x^3 dx = [4 \cdot x^4]_1^2 = \dots \quad \text{richtig wäre} \quad \int_1^2 4x^3 dx = \left[4 \cdot \frac{x^4}{4}\right]_1^2 = 2^4 - 1^4 = 16 - 1 = 15.$$

Zur Probe rechnen wir (korrekt):  $(4x^4)' = 4 \cdot 4 \cdot x^3 = 16 \cdot x^3 \neq 4x^3$ . Es stimmt ein Faktor nicht! Um den richtigen Faktor zu bestimmen rechnen wir:

$$(4bx^4)' = 4 \cdot b \cdot 4 \cdot x^3 = 16 \cdot b \cdot x^3 \stackrel{!}{=} 4x^3 \quad \text{also} \quad b = 1/4$$

und damit muss gelten:

$$\int 4x^3 dx = 4 \cdot \frac{x^4}{4}.$$

Überlegen Sie sich dies gut! Es ist eigentlich ganz einfach, wenn ihre Konzentrations- und Rechenfähigkeit gut sind.

Also für welche Zahlen  $a$  bzw.  $b$  gilt

$$a \cdot 2 = 1 \quad \text{bzw.} \quad 16 \cdot b \cdot x^3 \stackrel{!}{=} 4x^3 \quad \text{natürlich} \quad a = \frac{1}{2} \quad \text{bzw.} \quad b = \frac{1}{4}.$$

Bei einer mündlichen Prüfung ist das Problem den Faktor  $b$  richtig zu bestimmen schon aufgetreten. Und dann zeigte sich, dass die Aufgabe  $a \cdot 2 = 1$  auch schon schwer ist. Sie mögen schwierige

Aufgabe rechnen können, aber leider (zumindest bei einer mündlichen Prüfung) können einfache Dinge (die aber sehr nützlich sind) zum Problem werden. Üben, üben, und das 'Knüpfen von Zusammenhängen', wie in diesem Abschnitt.

Noch einmal etwas sehr ähnliches.

**Beispiel 2** Es seien  $a$  und  $b$  gegebene reelle Zahlen, wobei  $a \neq 0$ . Lösen Sie die Gleichung

$$2ax = 2ab \quad \text{in} \quad \mathbb{R}.$$

**Lösung.** Da  $a$  nicht Null ist, existiert  $\frac{1}{a}$  und wir können auf beiden Seiten mit  $\frac{1}{a}$  multiplizieren:

$$2xa = 2ab \quad \Leftrightarrow \quad 2x = 2b \quad \Leftrightarrow \quad x = b.$$

□

Und wo kommt dies nun vor? Beim Lösen einer Gleichung erhalten wir zum Beispiel die Gleichung:

$$2y \log(2) = 7 \log(2) \quad \text{in} \quad \mathbb{R}.$$

Da  $\log(2)$  nicht Null sein kann (!), existiert  $\frac{1}{\log(2)}$  und wir können auf beiden Seiten mit  $\frac{1}{\log(2)}$  multiplizieren:

$$2y \log(2) = 7 \log(2) \quad \Leftrightarrow \quad 2y = 7 \quad \Leftrightarrow \quad y = \frac{7}{2} = 3.5.$$

An so einem einfachen Problem kann eine Aufgabe scheitern. Leider tritt dies sehr häufig auf ohne, dass sich die Studenten dessen bewusst sind!

Also für welche Zahlen  $x$  bzw.  $y$  gilt

$$2ax = 2ab \quad \text{bzw.} \quad 2y \log(2) = 7 \log(2) \quad \text{natürlich} \quad x = b \quad \text{bzw.} \quad y = \frac{7}{2}.$$

□

**Bemerkung 1** Wir erinnern an folgende Rechenregeln. Für reelle Zahlen  $a, r, s$  gilt:

$$a^r \cdot a^s = a^{r+s} \quad , \text{aber} \quad a^r + a^s \neq a^{r+s}$$

und

$$(a^r)^s = a^{r \cdot s} \quad , \text{aber} \quad a^r + a^s \neq a^{r \cdot s}.$$

Nicht auswendig lernen sondern verinnerlichen Sie sich die Regeln. Mit zum Beispiel:

$$a \cdot a^3 = a \cdot (a \cdot a \cdot a) = a^4 \quad \text{und} \quad a^2 + a^2 = 2a^2 \neq a^4$$

sowie

$$(a^2)^3 = (a \cdot a) \cdot (a \cdot a) \cdot (a \cdot a) = a^6 = a^{2 \cdot 3}.$$

**Beispiel 3** Berechne folgende Zahlen

$$e^0, \quad e^1, \quad \ln(0), \quad \ln(1) \quad \text{und} \quad \ln(e).$$

**Lösung.** Es gilt

$$e^0 = 1, \quad e^1 = e, \quad \ln(0) \text{ existiert nicht,} \quad \ln(1) = 0 \quad \text{und} \quad \ln(e) = 1,$$

aber warum?

1)  $e^0 = 1$ , weil  $a^0 := 1$  für alle  $a \neq 0$  (Definition). Aber warum muss diese Definition so sein? Nun nach den üblichen Rechenregeln folgt

$$a^0 = a^{1-1} = a^1 \cdot a^{-1} = \frac{a}{a} = 1, \quad \text{wobei } a \neq 0 \text{ sein muss.}$$

2)  $e^1 := e$ , weil  $a^1 := a$ . Wieder eine Definition. Nach den üblichen Rechenregeln folgt

$$a \cdot a = a^2 = a^{1+1} = a^1 \cdot a^1 \quad \text{also} \quad a = a^1.$$

3) Wir erinnern an folgendes:

$$\ln(a) \quad \text{ist jene Zahl für die gilt} \quad e^{\ln(a)} = a.$$

Falls  $\ln(0)$  existiert, dann folgt  $e^{\ln(0)} = 0$ , aber  $e^x > 0$  für jedes reelle  $x$ . Dieser Widerspruch zeigt, dass  $\ln(0)$  nicht existiert.

4) Es gilt

$$\ln(1) \quad \text{ist jene Zahl für die gilt} \quad e^{\ln(1)} = 1$$

und damit folgt  $\ln(1) = 0$  ( $e^0 = 1$ ).

5) Es gilt

$$\ln(e) \quad \text{ist jene Zahl für die gilt} \quad e^{\ln(e)} = e$$

und damit folgt  $\ln(e) = 1$  ( $e^1 = e$ ).  $\square$

Und wo kommt dies vor? Beim Lösen von Gleichungen kommen die obigen Definitionen bzw. Identitäten immer wieder vor. Nur all zu oft werden viele Fehler gemacht, weil den Studenten alles durcheinander kommt. Wo muss die Null sein oder der Einser sein oder muss es gar  $-1$  sein. Auswendiglernen hilft nicht, man muss es verstehen und damit arbeiten (working knowledge). Es ist wie beim Autofahren. Am Anfang muss man auf Alles achten und es ist einem zu viel, aber später hat man die Routine und die Erfahrung, dann macht man vieles automatisch ohne darüber nachzudenken und man kann sich auf das Wesentliche konzentrieren.

**Aufgaben 1** Es sei  $a$  eine positive reelle Zahl. Zeige, dass  $\ln(-a)$  nicht existiert.  $\square$

**Bemerkung 2** Wir erinnern an folgendes: Für alle positive reellen Zahlen  $a$  gilt:

$$\sqrt{a} = \sqrt[2]{a} = a^{\frac{1}{2}} \quad \text{und} \quad [\sqrt[2]{a}]^2 = a.$$

Es gibt ja noch  $\sqrt[3]{a}$ ,  $\sqrt[4]{a}$  usw.

**Beispiel 4** Löse folgende Gleichungen:

$$x^2 = 2, \quad \sqrt{x} = 2, \quad x^2 = -2 \quad \text{und} \quad \sqrt{x} = -2.$$

**Lösung.** Es gilt

$$x \in \{\sqrt{2}, -\sqrt{2}\}, \quad x = 4, \quad x \in \emptyset \quad \text{und} \quad x = 4.$$

Hier bezeichnet  $\emptyset$  die leere Menge.

1) Welche Zahl oder Zahlen mit sich selbst multipliziert ergibt 2, natürlich  $\sqrt{2}$  und  $-\sqrt{2}$ . In der Tat ist  $\sqrt{2}$  als die positive Lösung von  $x^2 = 2$  definiert.  $-\sqrt{2}$  ist die negative Lösung und mehr Lösungen gibt es nicht.

2) Beachte, dass  $\sqrt{x}$  nur für positive  $x$  definiert ist. Quadrieren beider Seiten liefert die äquivalente Gleichung  $x = 4$  ( $= 2^2 > 0$ ), die die Lösung schon angibt. Mehr Lösungen gibt es nicht. Es gibt nur eine Lösung, die positiv ist!

3)  $x^2$  ist im reellen immer  $\geq 0$ , da aber die linke Seite der Gleichung negative (nämlich  $-2$ ) ist, gibt es keine Lösung.

4) Beachte, dass  $\sqrt{x}$  nur für positive  $x$  definiert ist. Quadrieren beider Seiten liefert die äquivalente Gleichung  $x = 4$  ( $= (-2)^2 > 0$ ), die die Lösung schon angibt. Mehr Lösungen gibt es nicht. Es gibt nur eine Lösung, die positiv ist!

**Bemerkung 3** Es sei  $a > 0$ . Warum darf man die Gleichung  $\sqrt{x} = a$  quadrieren? Offenbar gilt Folgendes:

$$\sqrt{x} \cdot \sqrt{x} = a \cdot \sqrt{x} \quad \text{und} \quad \sqrt{x} \cdot a = a \cdot a,$$

d.h. wir haben die Gleichung einmal mit  $\sqrt{x}$  und einmal mit  $a$  multipliziert. Dies dürfen wir tun. Vergleichen beider Gleichungen ergibt sofort:

$$\sqrt{x} \cdot \sqrt{x} = a \cdot \sqrt{x} = a \cdot a \quad \text{also} \quad x = a^2.$$

Was würde passieren, wenn wir  $\sqrt{x} = -a$  hätten mit  $a > 0$ ? Dann folgt

$$\sqrt{x} \cdot \sqrt{x} = (-a) \cdot \sqrt{x} \quad \text{und} \quad \sqrt{x} \cdot (-a) = (-a) \cdot (-a),$$

also

$$x = \sqrt{x} \cdot \sqrt{x} = (-a) \cdot (-a) = a^2 \quad \text{FALSCH!}$$

Dieses Ergebnis WÄRE RICHTIG, wenn  $\sqrt{x}$  EXISTIEREN WÜRDEN, dem ist aber nicht so!

**Aufgaben 2** Löse folgende Gleichungen:

$$x^3 = -8, \quad \sqrt[3]{x} = -8, \quad x^3 = 8 \quad \text{und} \quad \sqrt[3]{x} = 8.$$

Hinweis: (Wieder solch eine einfache aber nützliche Identität.)

$$(-1)(-1)(-1) = (-1)^3 = -1 \quad \text{also ...}$$