Prüfung aus MECHANIK 3
1. Teil (Rechenbeispiele)
09.04.2021

Familienname:
Vorname:
Kenn- und Matr.Nr.:

1. Beispiel (10 Punkte)

Gegeben:
Ebenes schwingungsfähiges System lt. Skizze, welches sich in der dargestellten Lage im statischen Gleichgewicht befindet:

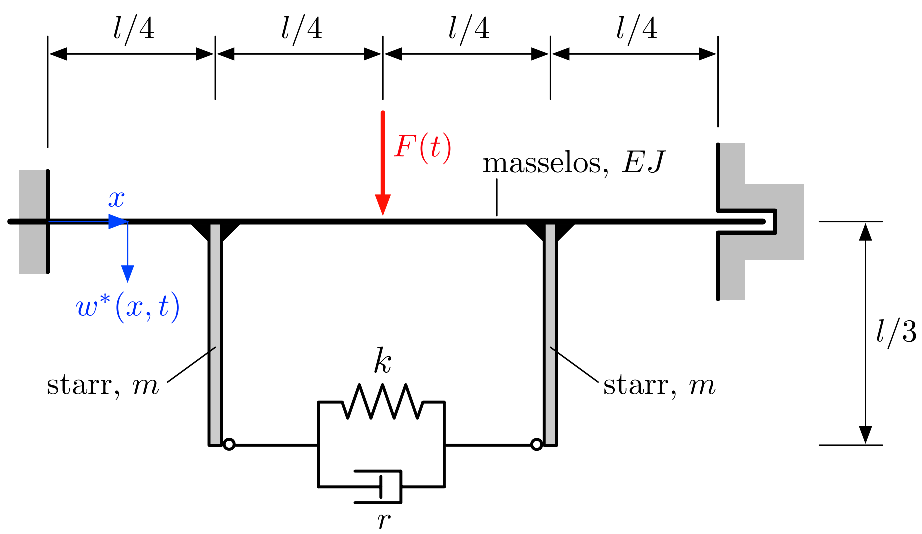
- Zwei starre Stäbe: Länge $l/3$, Masse m
- Linear elastischer, masseloser Biegestab: Länge l, Biegesteifigkeit EJ
- Geschwindigkeitsproportionaler Dämpfer: Dämpferkonstante r
- Linear elastische Feder: Federsteifigkeit k
- Einzelkraft $F(t)$

Gesucht:

1. Anzahl der Freiheitsgrade und mechanische Deutung der Lagekoordinate(n) des Ersatzsystems bei Verwendung des folgenden *Ritz*schen Ansatzes für die Durchbiegung w des Biegeträgers

   $$w^*(x,t) = \varphi(x)q(t) \quad \text{mit} \quad \varphi(x) = 16\left(\frac{x}{l}\right)^2\left(1-\frac{x}{l}\right)^2 \quad \text{für} \quad 0 \le x \le l$$

2. a) Kinetische Energie
   b) Potentielle Energie
   c) Generalisierte Kräfte
   des diskretisierten Ersatzsystems für kleine Schwingungen
3. Bewegungsgleichung(en) des Ersatzsystems in *Lagrange*scher Form für kleine Schwingungen um die statische Gleichgewichtslage
4. Maximale Dämpferkraft zufolge einer harmonischen Kraftanregung $F(t) = F_0 \sin(\nu t)$ im eingeschwungenen Zustand für $\frac{\nu}{\omega} = \frac{9}{10}$ und $\zeta = \frac{1}{9}$



Lösung zum 1. Beispiel

1. Anzahl der Freiheitsgrade und mechanische Deutung der Lagekoordinate(n)

1 FHG; LK: $q(t)$ ... Durchbiegung w^* des Biegeträgers an der Stelle $x = l/2$

2.a Kinetische Energie

$$T = \frac{1}{2}\frac{499}{384}m\dot{q}^2$$

2.b Potentielle Energie

$$U = \frac{1}{2}\left(4k + \frac{1024\,EJ}{5\,l^3}\right)q^2$$

$$W = -Fq$$

2.c Generalisierte Kräfte

$$Q = -4r\dot{q}$$

3. Bewegungsgleichung

$$\frac{499}{384}m\,\ddot{q} + 4\,r\dot{q} + \left(4k + \frac{1024\,EJ}{5\,l^3}\right)q = F(t)$$

4. Maximale Dämpferkraft

$$F_{d,\max} = \frac{200}{\sqrt{761}}r\nu\frac{F_0}{k}$$

2. Beispiel (10 Punkte)

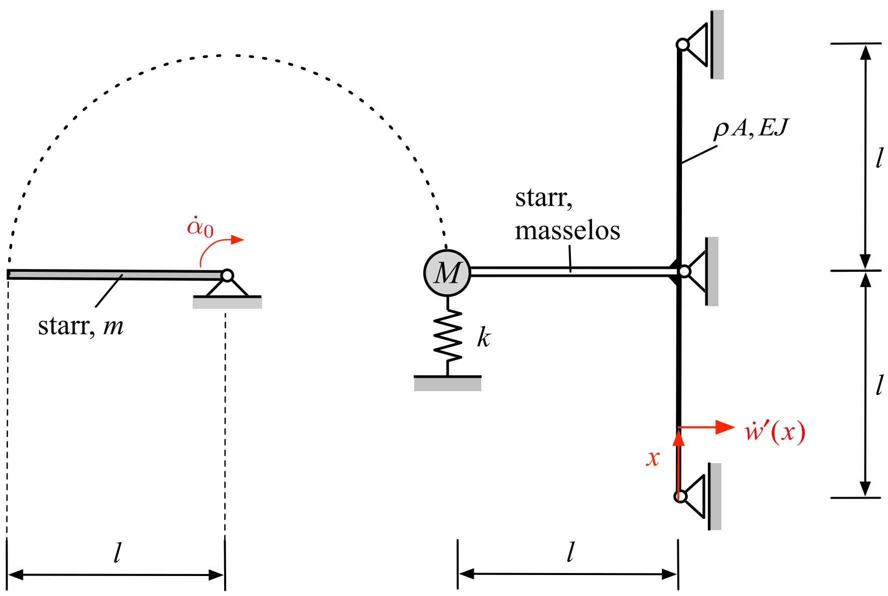
Gegeben:

Ein ebenes schwingungsfähiges System lt. Skizze, das sich in gezeichneter Lage in entspannter Federlage befindet, wird durch den Aufprall eines Pendels (Länge l, Masse m) zu Schwingungen angeregt.

- Linear elastischer Biegestab: Länge $2l$, Masse pro Längeneinheit ρA, Biegesteifigkeit EJ
- Starrer masseloser Stab, Länge l
- Punktmasse M
- Linear elastische Feder, Federsteifigkeit k
- Anfangsgeschwindigkeit des Pendels zum Zeitpunkt $t = 0$: $\dot{\alpha}_0$

Gesucht:

1. Bedingung für $\dot{\alpha}_0$, dass es zum Stoß kommt
2. Aufprallgeschwindigkeit $\dot{\alpha}$ des Pendels unmittelbar vor dem Stoß
3. Geschwindigkeiten $\dot{q}'$ und $\dot{\alpha}'$ unmittelbar nach einem vollkommen elastischen Stoß mittels *Lagrange*scher Stoßgleichungen unter Annahme folgender Geschwindigkeitsverteilung im Biegestab:
$$\dot{w}'(x) = \dot{q}'\varphi(x),\ \varphi(x) = \sin\frac{\pi x}{l},\ 0 \leq x \leq 2l$$
4. Maximale Federkraft der linear elastischen Feder des gestoßenen Systems in der Nachfolgebewegung des Stoßes unter Annahme des folgenden Verformungsansatzes für den Biegestab:
$$w^*(x,t) = q(t)\varphi(x)$$



Lösung zum 2. Beispiel

1. Bedingung für die Anfangsgeschwindigkeit, dass es zum Stoß kommt

$$\dot{\alpha}_{0,min} = \sqrt{\frac{3g}{l}}, \quad \dot{\alpha}_0 > \dot{\alpha}_{0,min}$$

2. Geschwindigkeit des Pendels unmittelbar vor dem Stoß

$$\dot{\alpha} = \dot{\alpha_0}$$

3. Geschwindigkeiten nach einem vollkommen elastischen Stoß

$$\dot{q}' = \frac{2m\pi l}{m\pi^2 + 3m^*}\dot{\alpha}; \qquad \dot{\alpha}' = \frac{m\pi^2 - 3m^*}{m\pi^2 + 3m^*}\dot{\alpha}$$

$$\text{mit } m^* = M\pi^2 + \rho A l$$

4. Maximale Federkraft

$$F_{k,max} = k q_u \pi$$

$$\text{mit } q_u = \frac{Mg\pi \pm \sqrt{(Mg\pi)^2 + \left[\frac{EJ\pi^4}{l^3} + k\pi^2\right]\dot{q}'^2 m^*}}{\frac{EJ\pi^4}{l^3} + k\pi^2}$$