

1 Die komplexen Zahlen und wie man mit ihnen rechnet

Dieser Abschnitt behandelt alles was Sie über die komplexen Zahlen für die Mathematik 2 Studienberechtigungsprüfung in Innsbruck wissen müssen.

1.1 Die Menge der komplexen Zahlen

Wir erinnern daran, dass \mathbb{R} die Menge der reellen Zahlen, \mathbb{N} die Menge der natürlichen Zahlen (einschließlich 0) und \mathbb{Z} die Menge der ganzen Zahlen bezeichnen. Die Menge der *komplexen Zahlen* \mathbb{C} wurde historisch definiert durch

$$\mathbb{C} := \{x + iy \mid x, y \in \mathbb{R}\},$$

wobei i ein 'Symbol' sein soll. Diese Definition hat ihre Schwächen und deshalb vergessen wir sie vorerst einmal.

1.1.1 Vorbereitung: Was ist ein Paar?

Das Paar der Zahlen 3 und 4 wird mathematisch als $(3, 4)$ geschrieben. Dabei kommt es auf die Reihenfolge an! Die Paare $(3, 4)$ und $(4, 3)$ sind nicht gleich. Die Menge aller Paare, der Zahlen aus der Menge M , wird als $M \times M$ geschrieben und die Gleichheit von Paaren (aus $M \times M$) ist definiert durch

$$(a, b) = (c, d) \quad :\Leftrightarrow \quad a = c \quad \text{und} \quad b = d.$$

In (a, b) nennt man a die erste Komponente und b die zweite Komponente.

Für was benötigt man Paare? Mit Paaren kann man zum Beispiel Punkte (oder Vektoren) in der Ebene beschreiben. (Wir setzen voraus, dass Sie diese Beschreibung schon kennen.) Mathematisch kann man alle Punkte der Ebene mit $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ beschreiben.

Beispiel 1 (Punkt in der Ebene (Version 1)) Gegeben ist der Punkt $P = (1, \sqrt{3})$ in der Ebene. 1) Bestimme den Abstand des Punktes P vom Punkt $O = (0, 0)$. 2) Berechne den Winkel α zwischen dem Vektor $P - O$ (also P minus O) und der horizontalen Achse die durch O geht. 3) Wie rechnet man einen Winkel α im Gradmaß um in einen Winkel im Bogenmaß, und umgekehrt. Verwenden Sie für 2) folgende nützliche Tabelle:¹

$$\begin{array}{cccc} \cos(30^\circ) = \frac{1}{2}\sqrt{3}, & \cos(45^\circ) = \frac{1}{2}\sqrt{2}, & \cos(60^\circ) = \frac{1}{2} & \cos(120^\circ) = -\frac{1}{2} \\ \sin(30^\circ) = \frac{1}{2}, & \sin(45^\circ) = \frac{1}{2}\sqrt{2}, & \sin(60^\circ) = \frac{1}{2}\sqrt{3}, & \sin(120^\circ) = \frac{1}{2}\sqrt{3} \end{array}$$

Lösung. Vgl. Abb. 1.

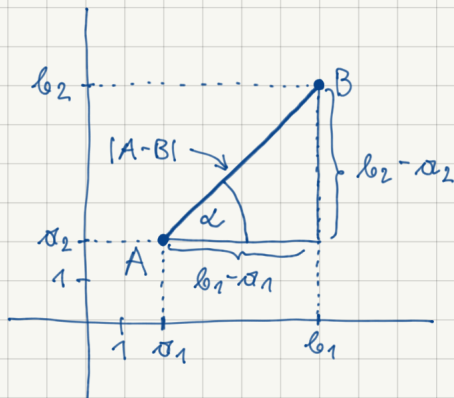
1) Der Abstand von zwei Punkten $A := (a_1, a_2)$ und $B := (b_1, b_2)$ ist definiert durch

$$|A - B| = \sqrt{(a_1 - b_1)^2 + (a_2 - b_2)^2}$$

und diese Zahl entspricht der Länge der Strecke zwischen den beiden Punkten. Damit folgt

$$|P - O| = |(1, \sqrt{3})| = \sqrt{1^2 + (\sqrt{3})^2} = \sqrt{1 + 3} = 2.$$

¹Diese Identitäten werden beim Test angegeben.



ABSTAND DER PUNKTE A UND B:

$$|A-B| = |B-A| = \sqrt{(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2}$$

ES GILT FÜR WINKEL α :

$$\tan(\alpha) = \frac{b_2 - a_2}{b_1 - a_1}$$

$$\sin(\alpha) = \frac{b_2 - a_2}{|A-B|}, \quad \cos(\alpha) = \frac{b_1 - a_1}{|A-B|}$$

Figure 1: Graphische Darstellung des Abstandes zweier Punkte $A = (a_1, a_2)$ und $B = (b_1, b_2)$.

2) Mit Hilfe einer einfachen Skizze sehen wir, dass der Tangens des (spitzen) Winkels α gegeben ist durch

$$\tan(\alpha) = \frac{\sqrt{3}}{1} = \frac{\sqrt{3}/2}{1/2} = \frac{\sin(60^\circ)}{\cos(60^\circ)} = \tan(60^\circ) \quad \text{also folgt} \quad \alpha = \arctan(\sqrt{3}) \equiv 60^\circ.$$

3) Wir wiederholen, dass ein Winkel im Gradmaß der Länge des Bogens am Einheitskreis entspricht, der dem Winkel gegenüberliegt. Also entsprechen 360° der Bogenlänge 2π und damit entspricht 1° der Bogenlänge $\frac{2\pi}{360^\circ}$. Damit folgt:

$$\alpha(\text{in rad}) = \alpha(\text{in Grad}) \frac{2\pi}{360^\circ}$$

oder äquivalent

$$\alpha(\text{in rad}) = \alpha(\text{in Grad}) \frac{\pi}{180^\circ}.$$

Beachten Sie, dass sich die Grade wegekürzen müssen! Die Einheit des Bogenmasses ist rad; Sie ist dimensionslos. Umformen ergibt:

$$\alpha(\text{in Grad}) = \alpha(\text{in rad}) \frac{180^\circ}{\pi}.$$

□

Für ein Paar (a, b) kann man auch $a + ib$ schreiben, wobei i ein Symbol (keine reelle Zahl) ist. Wir definieren dann,

$$a + ib = c + id \quad :\Leftrightarrow \quad a = c \quad \text{und} \quad b = d.$$

Insbesondere gilt: $x + iy = 0 + i0$ genau dann wenn $x = 0$ und $y = 0$ gilt. Für die Punkte P und O aus dem vorhergehenden Beispiel gilt dann

$$P = (1, \sqrt{3}) = 1 + i\sqrt{3} \quad \text{und} \quad O = (0, 0) = 0 + i0.$$

Beachte: Wenn i eine reelle Zahl wäre, dann wäre ib eine reelle Zahl und damit wäre auch $a + ib$ eine reelle Zahl. Und dann könnte $a + ib$ kein Punkt bzw. Paar sein.

1.1.2 Moderne Version der Menge der komplexen Zahlen \mathbb{C}

Die Menge der *komplexen Zahlen* \mathbb{C} ist definiert als die Menge $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ also

$$\mathbb{C} := \mathbb{R} \times \mathbb{R} := \{(x, y) \mid x, y \in \mathbb{R}\} \quad (1)$$

und jedes ihrer Elemente kann als Punkt in der Ebene dargestellt werden.

Wir können 1 mit $(1, 0)$ und i mit $(0, 1)$ identifizieren. Dann folgt (mit den üblichen Rechenregeln von Paaren²):

$$a + ib = a \cdot 1 + b \cdot i \stackrel{!}{=} a(1, 0) + b(0, 1) = (a, 0) + (0, b) = (a, b),$$

d.h. wir können das a in $a + ib$ als erste Komponente eines Paares und das b in $a + ib$ als zweite Komponente eines Paares ansehen. Also ist die obige Definition äquivalent zu

$$\mathbb{C} := \{x + iy \mid x, y \in \mathbb{R}\}. \quad (2)$$

Vgl. Abb. 2.

Bemerkung 1 *Ursprünglich verwendete man die Schreibweise $a+ib$ für komplexe Zahlen und später auch (a, b) . Warum kann man sagen, dass die zweite Definition (2) nicht so gut wie die erste Definition (1) ist? Nun $a + ib$ beinhaltet i mal b (ein Produkt) und a plus ib (eine Summe). Wir wollen lediglich eine Menge definieren und benötigen schon ein Produkt und eine Addition, eigenartig. Und was soll das Symbol i sein? Das ist ja ein völliges durcheinander. Da muss doch etwas faul sein, oder?*

Anfangs (als man den Zusammenhang mit Paaren noch nicht erkannt hatte) war man sich nicht sicher ob i bzw. $a + ib$ wirklich existieren. Dies wird wohl auch der Grund dafür gewesen sein, dass man i als imaginäre Einheit und ib (b reel) als imaginäre Zahl bezeichnet hat. Da aber die Paare $(0, 1)$ und (a, b) existieren wissen wir, dass die komplexen Zahlen existieren (insbesondere i und $a + ib$). \square

Nach der letzten Bemerkung sollte ihnen das auftauchen des speziellen Symbols i nicht mehr komisch vorkommen, es ist ja äquivalent zu dem Paar $(0, 1)$. Ab jetzt verwenden wir nur mehr die historische schreibweise $a + ib$ für komplexe Zahlen mit reellen a und b .

1.2 Das Rechnen mit den komplexen Zahlen

Das Addieren und Multiplizieren von zwei komplexen Zahlen ist definiert durch

$$(a + ib) + (c + id) := (a + c) + i(b + d)$$

²Addition und Vielfaches von Paaren: $(a_1, a_2) + (b_1, b_2) := (a_1 + b_1, a_2 + b_2)$ und $b(a_1, a_2) = (b \cdot a_1, b \cdot a_2)$.

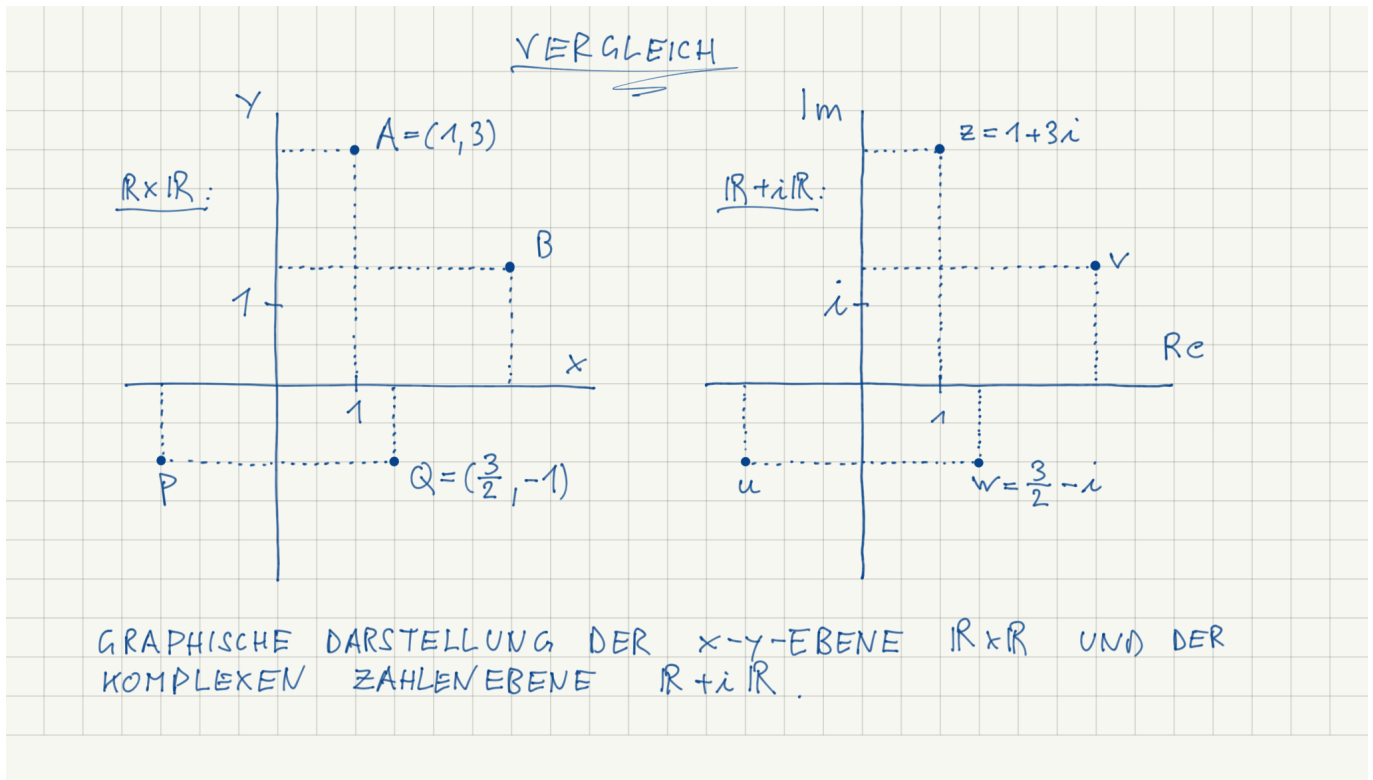


Figure 2: Vergleich der graphischen Darstellungen der $x - y$ -Ebene $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ und der *historischen* komplexen Zahlenebene $\mathbb{R} + i\mathbb{R}$.

und

$$(a + ib) \cdot (c + id) := (a \cdot c - b \cdot d) + i(b \cdot c + a \cdot d).$$

Warum so eine komische bzw. komplexe Multiplikation? Das klären wir später.

Überlegen Sie sich, folgendes

$$(a + i0) + (c + i0) := (a + c) + i(0 + 0) \equiv a + c$$

und

$$(a + i0) \cdot (c + i0) := (a \cdot c - 0 \cdot 0) + i(0 \cdot c + a \cdot 0) \equiv a \cdot c$$

gelten, wobei a und c reelle Zahlen sind. Wir sehen also, dass die reellen Zahlen eine Teilmenge der komplexen Zahlen sind. Genauer, falls a eine reelle Zahl ist, dann dürfen wir $a + i0$ mit a identifizieren, und umgekehrt.

Beispiel 2 Gegeben sind die Zahlen $z = 3 - 4i$ und $w := 2i + 5$. Berechne $2z + 3w$, $z \cdot w$, z^2 .

Lösung. 1) $2z + 3w = 6 - 8i + 6i + 15 = 21 - 2i$.

2) $z \cdot w = (3 - 4i)(5 + 2i) = (3 \cdot 5 - (-4) \cdot 2) + i(3 \cdot 2 + (-4) \cdot 5) = (15 + 8) + i(6 - 20) = 23 - 14i$.

3) $z^2 = (3 - 4i)(3 - 4i) = (3^2 - (-4)^2) + i(3 \cdot (-4) + (-4) \cdot 3) = (9 - 16) + i(-12 - 12) = -7 - i24$.

□

Beispiel 3 Geben Sie die Punkte in der Ebene an, welche den komplexen Zahlen $z = 3 - 4i$, $w := 2i + 5$, $2z + 3w$, $z \cdot w$, z^2 , $3 + i0$ und $0 + i3$ entsprechen.

Lösung. a) Die erste Komponente von $z = 3 - 4i$ ist 3 und die Zweite ist -4 , also entspricht diese komplexe Zahl dem Punkt $(3, -4)$.

b) Die erste Komponente von $w = 2i + 5$ ist 5 und die Zweite ist 2, also entspricht diese komplexe Zahl dem Punkt $(5, -2)$.

c) Wegen

$$2z + 3w = 21 - 2i, \quad z \cdot w = 23 - 14i \quad \text{und} \quad z^2 = -7 - i24$$

folgt

$$2z + 3w \equiv (21, -2), \quad z \cdot w \equiv (23, -14) \quad \text{und} \quad z^2 \equiv (-7, -24).$$

d) Die reelle Zahl 3 ist eigentlich kein Punkt in der Ebene, aber wenn wir Sie als komplexe Zahl $3 + i0$ auffassen, dann entspricht Sie dem Punkt $(3, 0)$ in der Ebene.

e) Die imaginäre Zahl $i3$ aufgefasst als komplexe Zahl $0 + i3$ entspricht dem Punkt $(0, 3)$ in der Ebene. \square

1.3 Die Rechenregeln

Die Menge der komplexen Zahlen zusammen mit ihrer Addition und Multiplikation bilden eine (algebraische) Struktur; man nennt Sie *Körper* (vgl. reellen Zahlen). Es gilt

$$(C1) \quad a + b = b + a \quad (a, b \text{ sind komplexe Zahlen!})$$

$$(C2) \quad (a + b) + c = a + (b + c)$$

(C3) Es gibt $z \in \mathbb{C}$, sodass $x + z = x = z + x$ für jedes $x \in \mathbb{C}$. Diese Zahl z wird mit 0 (Null) bezeichnet. (Man kann auch $0 + i0$ schreiben. Man kann zeigen: $i0 = 0$.)

(C3) Für jedes $x \in \mathbb{C}$ gibt es ein $y \in \mathbb{C}$, sodass $x + y = 0 = y + x$. Diese Zahl y wird mit $-x$ (minus x) bezeichnet.

Für die multiplikative Verknüpfung $\cdot : \mathbb{C} \times \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ gilt:

$$(C4) \quad a \cdot b = b \cdot a$$

$$(C5) \quad (a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$$

(C6) Es gibt $z \in \mathbb{C}$, sodass $x \cdot z = x = z \cdot x$ für jedes $x \in \mathbb{C}$. Diese Zahl z wird mit 1 (Eins) bezeichnet.

(C7) Für jedes $x \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ gibt es ein $y \in \mathbb{C}$, sodass $x \cdot y = 1 = y \cdot x$. Diese Zahl y wird mit x^{-1} bzw. $\frac{1}{x}$ (Kehrwert von x) bezeichnet. (Man kann auch $1 + i0$ schreiben.)

Beide Verknüpfungen erfüllen in Kombination:

$$(C8) \quad (a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c \text{ für alle } a, b, c \in \mathbb{Q}.$$

Sie müssen nicht wissen, dass die komplexen Zahlen einen Körper bilden, aber mit den komplexen Zahlen korrekt rechnen können.

Beispiel 4 Wie bei den reellen Zahlen gilt also:

$$((1 + i3) + i4) + (i + 2 + i5) = 1 + i3 + i4 + i + 2 + i5 = 3 + i13 = 13i + 3,$$

$$(2 \cdot 4) \cdot i \cdot \left(3 \cdot \left(i \cdot \frac{2+4}{i} \right) \right) = 2 \cdot 4 \cdot i \cdot 3 \cdot i \cdot \frac{2+4}{i} = 144i$$

und

$$(5i - 2) + (-i5 + 2) = i0 + 0 = 0.$$

Eigentlich gilt $0_{\mathbb{C}} = 0_{\mathbb{R}} + i0_{\mathbb{R}}$, aber man schreibt immer 0 für beide Nullen. Und noch ein letztes Beispiel:

$$(7 + i12) \cdot (1 + i0) = (7 + i12) \cdot 1 = 7 + i12;$$

also $1_{\mathbb{C}} = 1_{\mathbb{R}} + i0_{\mathbb{R}}$. Natürlich schreibt man einfach immer nur 1. \square

Bemerkung 2 Gibt es einen "wesentlichen Unterschied" zwischen den reellen Zahlen \mathbb{R} (mit ihrer Struktur) und den komplexen Zahlen \mathbb{C} (mit ihrer Struktur). Ja! Auf den reellen Zahlen können wir eine Ordnung definieren, es gilt zum Beispiel

$$-1 < 0 < 1,$$

aber es gibt keine Ordnung auf den komplexen Zahlen. Zum Beispiel kann keines der beiden folgenden Möglichkeiten richtig sein

$$i > 0 \quad \text{oder} \quad i < 0$$

und damit kann es keine Ordnung auf \mathbb{C} geben. (Für eine sinnvolle Ordnung gilt $0 < a < b$ impliziert $0 < a^2 < b^2$ und dies kann es auf \mathbb{C} nicht geben.) \square

Sehr viele Rechenregeln, welche für die reellen Zahlen gelten, gelten auch für die komplexen Zahlen. Wir werden diese Regeln nicht alle hier aufschreiben und besprechen. Dies müssen Sie selbst machen; zum Beispiel mit Hilfe einer Formelsammlung. (Eine Formelsammlung ist beim Test nicht erlaubt.) Ein häufigsten Fehler ist das verwenden von völlig falschen Regeln. Dieses Problem müssen Sie in den Griff bekommen, indem Sie nur Regel aus einer Formelsammlung, Buch oder dieser Unterlagen verwenden; und zwar richtig verwenden!

Ein weiterer häufiger Fehler ist schlampig (und zu klein) zu schreiben wie, ein (undeutlich geschriebenes) Minus wird als Mal gelesen oder eine Zahl wird mit einer anderen Zahl oder einem Buchstaben verwechselt.

Folgender Satz wird für Beispiel 6 benötigt.

Satz 1 Es seien a, b reelle oder komplexe Zahlen, dann gelten folgende Rechenregeln:

$$a^n a^m = a^{n+m} \quad \text{und} \quad a^{n \cdot m} = (a^n)^m \quad \text{für alle} \quad n, m \in \mathbb{Z}.$$

Weiters gilt $a^0 = 1$, falls $a \neq 0$. (In speziellen Fällen kann die Definition $0^0 := 1$ sehr nützlich sein, es gibt aber Beispiele wo dies nicht korrekt ist. Vorsicht!)

Beispiel 5 Zeige, dass gilt:

$$i^2 = -1, \quad i^3 = -i \quad \text{und} \quad \frac{1}{i} = -i.$$

Lösung. 1) Wegen der Multiplikationsregel von komplexen Zahlen und $i \cdot 0 = 0$ folgt

$$i^2 = (0 + i) \cdot (0 + i) = (0 \cdot 0 - 1 \cdot 1) + i(0 \cdot 1 + 1 \cdot 0) = -1 + i0 = -1.$$

2) Es gilt: $i^3 = i^2 \cdot i = (-1) \cdot i = -i$.

3) Wir erweitern den Bruch $\frac{1}{i}$ ohne seinen Wert zu ändern (beachte $i^2 = -1$):

$$\frac{1}{i} = \frac{1 \cdot i}{i \cdot i} = \frac{i}{-1} = -i.$$

\square

Beispiel 6 Zeige, dass gilt:

$$i^7 = -i \quad \text{und} \quad i^8 = +1.$$

Lösung. 1) Wegen $7 = 2 + 2 + 2 + 1$ und der ersten Rechenregel in Satz 1 folgt

$$i^7 = i^{2+2+2+1} = i^2 i^2 i^2 i = (-1)(-1)(-1)i = -i.$$

2) Wegen $8 = 2 + 2 + 2 + 2$ und der ersten Rechenregel in Satz 1 gilt

$$i^8 = i^{2+2+2+2} = i^2 i^2 i^2 i^2 = (-1)(-1)(-1)(-1) = +1.$$

Oder wegen $8 = 2 \cdot 4$ und der zweiten Rechenregel in Satz 1 folgt

$$i^8 = i^{2 \cdot 4} = (i^2)^4 = (-1)^4 = +1.$$

□

Aufgabe 1 Zeige, dass gilt:

$$i^{-2} = -1, \quad i^{-3} = i, \quad \frac{1}{i^2} = -1 \quad \text{und} \quad \frac{1}{i^7} = i.$$

□

1.4 Einige wichtige Begriffe und Beispiele

Zuerst definieren wir die wichtigsten Begriffe und dann rechnen wir Beispiele in denen diese Begriffe vorkommen.

Definition 1 Es sei z eine beliebige komplexe Zahl, d.h. $z = a + ib$ mit reelle Zahlen a, b .

a) Der Realteil und der Imaginärteil von z sind definiert durch

$$\operatorname{Re}(z) := a \quad \text{und} \quad \operatorname{Im}(z) := b.$$

b) Eine Zahl der Form $z = ib$ mit reellem b nennt man imaginäre Zahl.

c) Die konjugiert komplexe Zahl von z ist definiert durch

$$\bar{z} := \operatorname{Re}(z) - i \operatorname{Im}(z) = a - ib.$$

d) Der Betrag der komplexen Zahl z ist definiert durch

$$|z| := \sqrt{[\operatorname{Re}(z)]^2 + [\operatorname{Im}(z)]^2} = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

Damit gilt: $|z|^2 = a^2 + b^2$.

Die (euklidische) Länge des Paares/Vektors (a, b) ist definiert durch

$$|(a, b)| := \sqrt{a^2 + b^2} \quad \text{und deshalb folgt} \quad |(a, b)| = |a + ib|.$$

Beispiel 7 (Punkt in der Ebene (Version 2)) Gegeben ist die komplexe Zahl $z = 1 + \sqrt{3}i$. Bestimme den Abstand der Zahl z von der Zahl $0 + 0i$, d.h. den Betrag von z . Und berechne den Winkel α und die positive Zahl R , sodass die 'Polardarstellung'

$$1 + \sqrt{3}i = R(\cos(\alpha) + i \sin(\alpha))$$

gilt. (Später wird diese Darstellung genauer besprochen.)

Lösung. Machen Sie sich eine gute Skizze die z , α , $|z|$, $\cos(\alpha)$ und $\sin(\alpha)$ beinhaltet! Der Betrag von z ergibt sich als

$$|z| = \sqrt{1^2 + (\sqrt{3})^2} = \sqrt{1+3} = 2.$$

Weiters gilt

$$2 = |1 + \sqrt{3}i| = |R| |\cos(\alpha) + i \sin(\alpha)| = |R| \left(\sqrt{[\cos(\alpha)]^2 + [\sin(\alpha)]^2} \right) = |R| \cdot 1 = |R|.$$

Wegen der Bedingung $R > 0$ folgt $R = |R| = 2$. Mit Hilfe einer einfachen Skizze sehen wir, dass

$$\cos(\alpha) = \frac{\operatorname{Re}(z)}{R} = \frac{1}{2} \quad \text{und} \quad \sin(\alpha) = \frac{\operatorname{Im}(z)}{R} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

gilt. Deshalb ist der Tangens des (spitzen) Winkels α gegeben durch (vgl. Bsp 1)

$$\tan(\alpha) = \frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)} = \frac{\sqrt{3}/2}{1/2} = \sqrt{3} \quad \text{also folgt} \quad \alpha = \arctan(\sqrt{3}) \equiv 60^\circ.$$

□

Beispiel 8 Bestimme den Real- und den Imaginärteil von

$$z_1 = \sqrt{2} - i\pi, \quad z_2 = \frac{3}{i^3}, \quad z_3 = \frac{3}{4i^2} \quad \text{und} \quad z_4 = (i4 + 7)^2.$$

Hinweis: Es gilt: $i^2 = -1$ (vgl. Beispiel 5).

Lösung. 1) Wegen $z_1 = \sqrt{2} - i\pi = \sqrt{2} + i(-\pi)$ folgt $\operatorname{Re}(z_1) = \sqrt{2}$ und $\operatorname{Im}(z_1) = -\pi$.

2) Geschicktes Erweitern wie aus einem der obigen Beispiele ergibt:

$$z_2 = \frac{3}{i^3} = \frac{3 \cdot i}{i^3 \cdot i} = \frac{3i}{i^2 \cdot i^2} = \frac{3i}{(-1) \cdot (-1)} = 3i = 0 + i3$$

also $\operatorname{Re}(z_2) = 0$ und $\operatorname{Im}(z_2) = 3$. (Man kann natürlich auch Oben und Unten mit \bar{i}^3 ergänzen, aber mit i ist es einfacher.)

3) Wegen $i^2 = -1$ folgt $z_3 = \frac{3}{4i^2} = \frac{3}{4 \cdot (-1)} = -\frac{3}{4} = -\frac{3}{4} + i0$ also $\operatorname{Re}(z_3) = -\frac{3}{4}$ und $\operatorname{Im}(z_3) = 0$.

4) Wegen

$$(7 + i4) \cdot (7 + i4) = (7 \cdot 7 - 4 \cdot 4) + i(7 \cdot 4 + 4 \cdot 7) = (49 - 16) + i(28 + 28) = 33 + i56$$

folgt $\operatorname{Re}(z_4) = 33$ und $\operatorname{Im}(z_4) = 56$. □

Beispiel 9 Bestimme die konjugiert komplexen Zahlen von

$$z_1 = \sqrt{2} - i\pi, \quad z_2 = \frac{3}{i^3}, \quad z_3 = \frac{3}{4i^2} \quad \text{und} \quad z_4 = (i4 + 7)^2.$$

Lösung. Offensichtlich gilt $\bar{z}_1 = \sqrt{2} + i\pi$. Aus dem vorhergehenden Beispiel wissen wir

$$z_2 = 0 + i3, \quad z_3 = -\frac{3}{4} + i0 \quad \text{und} \quad z_4 = 33 + i56$$

und damit folgt

$$\bar{z}_2 = 0 - i3 = -3i, \quad \bar{z}_3 = -\frac{3}{4} - i0 = -\frac{3}{4} \quad \text{und} \quad \bar{z}_4 = 33 - i56.$$

Wir sehen, dass 1) die konjugiert komplexe Zahl einer reellen Zahl a wieder die reelle Zahl a selbst ist und 2) die konjugiert komplexe Zahl einer imaginären Zahl ib die negative imaginäre Zahl $-ib$ ist. □

Beispiel 10 Bestimme den Betrag der Zahlen $z_1 := 3 + 4i$ und $z_2 := 3 - 4i (= \bar{z}_2)$. Weiters zeigen Sie, dass $|z| = |\bar{z}|$ gilt.

Lösung. Nach der Definition des Betrages folgt

$$|z_1| = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{9 + 16} = \sqrt{25} = 5$$

und

$$|z_2| = \sqrt{3^2 + (-4)^2} = \sqrt{9 + 16} = \sqrt{25} = 5.$$

Ganz allgemein gilt für $z = a + ib$ mit reellen a und b :

$$|\bar{z}| = |a - bi| = \sqrt{a^2 + (-b)^2} = \sqrt{a^2 + b^2} = |z|.$$

□

Beispiel 11 Gegeben sind die Zahlen $z = 3 - 4i$ und $w := 2i + 5$. Berechne $|w|$, $z \cdot \bar{z}$, $\frac{z}{w}$ und $\frac{w}{z}$.

Lösung. 1) $|w| = \sqrt{5^2 + 2^2} = \sqrt{25 + 4} = \sqrt{29}$.

2) $z \cdot \bar{z} = (3 - 4i)(3 + 4i) = (3^2 - (-4) \cdot 4) + i(3 \cdot 4 + (-4) \cdot 3) = 9 + 16 = 25$.

3) Wir erweitern den Bruch (im Zähler und Nenner) mit \bar{w} , d.h. $\frac{z}{w} = \frac{z \cdot \bar{w}}{w \cdot \bar{w}}$. Wegen³

$$\frac{z}{w} = \frac{(3 - 4i)(5 - 2i)}{(5 + 2i)(5 - 2i)} = \frac{((3 \cdot 5 - (-4)(-2)) + i(3(-2) + (-4)5))}{(5^2 - 2(-2)) + i0} = \frac{(15 - 8) + i(-6 - 20)}{25 + 4}$$

folgt

$$\frac{z}{w} = \frac{7 - i26}{29} = \frac{7}{29} - i \frac{26}{29}.$$

Analog folgt

$$\frac{w}{z} = \frac{w \cdot \bar{w}}{z \cdot \bar{z}} = \frac{7 + 26i}{25} = \frac{7}{25} + i \frac{26}{25}.$$

Machen Sie die Probe: (Beim Test ist kein Taschenrechner erlaubt!):

$$\frac{z}{w} \frac{w}{z} = \left(\frac{7}{29} - i \frac{26}{29} \right) \left(\frac{7}{25} + i \frac{26}{25} \right) = \frac{(7 - i26)(7 + 26i)}{29 \cdot 25} = \dots = \frac{725}{725} = 1.$$

□

Beispiel 12 Es sei $z = a + ib$ mit reellen a, b und $\mathbf{b} \neq \mathbf{0}$. Zeige: $z \cdot \bar{z} = |z|^2$ und $z^2 \neq |z|^2$.

Lösung. 1) $z \cdot \bar{z} = (a + bi)(a - bi) = (a \cdot a - b \cdot (-b)) + i(a \cdot (-b) + b \cdot a) = a^2 + b^2 = |z|^2$. (Merken Sie sich diese Rechnung und natürlich dass, dies immer eine reelle Zahl ≥ 0 ist.)

2) $z^2 = (a + ib)(a + ib) = (a^2 - b^2) + i(a \cdot b + b \cdot a) = (a^2 - b^2) + i2ab$. Falls $\mathbf{b} \neq \mathbf{0}$ dann folgt

$$z^2 = (a^2 - b^2) + i2ab \neq a^2 + b^2 = |z|^2$$

also $z^2 \neq |z|^2$. Falls Sie es nicht sehen: Die linke Seite enthält immer einen imaginären Anteil und die rechte Seite ist immer reell. □

Tip 1 Wenn Sie mit Gleichungen oder Identitäten (=Formeln) arbeiten sollten Sie sich immer überlegen ob die linke und die rechte Seite wirklich gleich sein können, oder ob es einen offensichtlichen Fehler gibt. Dies kann ihnen viele Probleme ersparen! Weiter können Sie natürlich etwas nützlicher erkennen, dass ihnen die weitere Rechnung verkürzt bzw. vereinfacht. Beachten Sie aber, nicht immer lässt sich etwas vereinfachen.

³Merken Sie sich diesen Trick!

Hilfsatz 1 Für jede komplexe Zahl z gilt:

$$z \cdot \bar{z} = |z|^2 = [\operatorname{Re}(z)]^2 + [\operatorname{Im}(z)]^2.$$

Beispiel 13 Berechne von $z := \frac{1}{3-4i}$ den Real-, Imaginärteil und den Betrag.

Lösung. Wir müssen den Bruch geeignet umformen. Mit Hilfe der Identität $z \cdot \bar{z} = |z|^2$ (aus Hilfsatz 1) folgt

$$z = \frac{1}{3-4i} = \frac{3+4i}{(3-4i)(3+4i)} = \frac{3+4i}{9+16} = \frac{3}{25} + i \frac{4}{25}.$$

Damit ergibt sich $(\operatorname{Re})(z) = \frac{3}{25}$ und $(\operatorname{Im})(z) = \frac{4}{25}$. Weiters folgt

$$|z| = \sqrt{[(\operatorname{Re})(z)]^2 + [(\operatorname{Im})(z)]^2} = \sqrt{\frac{9}{25^2} + \frac{16}{25^2}} = \sqrt{\frac{25}{25^2}} = \sqrt{\frac{1}{25}} = \frac{1}{5}.$$

□

Aufgabe 2 Bestimme die Real- und Imaginärteile der Zahlen

$$-9 - 6i, \quad \sqrt{2}i, \quad \frac{i^3}{2} \quad \text{und} \quad \frac{13}{i}.$$

Weiters bestimme ihre konjugiert komplexe Zahlen und ihren Betrag. □

Aufgabe 3 Es sei z eine beliebige komplexe Zahl, d.h. $z = a + ib$ mit reelle Zahlen a, b . Zeige:

$$z + \bar{z} = 2 \operatorname{Re}(z) = 2a, \quad z - \bar{z} = i 2 \operatorname{Im}(z) = 2bi \quad \text{und} \quad z \cdot \bar{z} = a^2 + b^2 = |z|^2.$$

Insbesondere gilt: $|z| = \sqrt{z \cdot \bar{z}}$. Wenn es ihnen hilft können Sie dies Aufgabe zuerst mit konkreten Zahlen lösen. □

1.5 Die Polardarstellung von komplexen Zahlen

Wie vorher erklärt, kann man eine komplexe Zahl $z = a + ib$ (a, b reell) auch als Punkt bzw. Paar $P = (a, b)$ ansehen. Sehen Sie sich nun Fig. 3 genau an. Wir sehen aus Fig. 3, dass folgendes gilt

$$a = R \cos(\alpha), \quad b = R \sin(\alpha) \quad R = |(a, b)| = \sqrt{a^2 + b^2} \quad \text{und} \quad \tan(\alpha) = \frac{b}{a}. \quad (3)$$

Und damit gilt auch die *Polardarstellung* von z :

$$z = a + ib = R \cos(\alpha) + i R \sin(\alpha) = R (\cos(\alpha) + i \sin(\alpha)).$$

Ist α ein spitzer Winkel (d.h. α liegt zwischen 0° und 90°) so gibt es immer genau einen Winkel α mit $\tan(\alpha) = \frac{b}{a}$. Dies ist dann $\alpha = \arctan(\frac{b}{a})$. Falls α nicht spitz ist, aber es ein spitzes β mit zum Beispiel

$$\alpha = \pi + \beta \quad \text{und} \quad \tan(\beta) = \frac{b}{a}$$

gibt, dann folgt $\alpha = \pi + \arctan(\frac{b}{a})$. "So etwas in der Art" gibt es immer.

Aufgabe 4 Sehen Sie sich die graphischen Darstellung in Fig. 3 genau an und verinnerlichen Sie sich ihren Sinn. Machen Sie sich selbst einige Skizzen. □

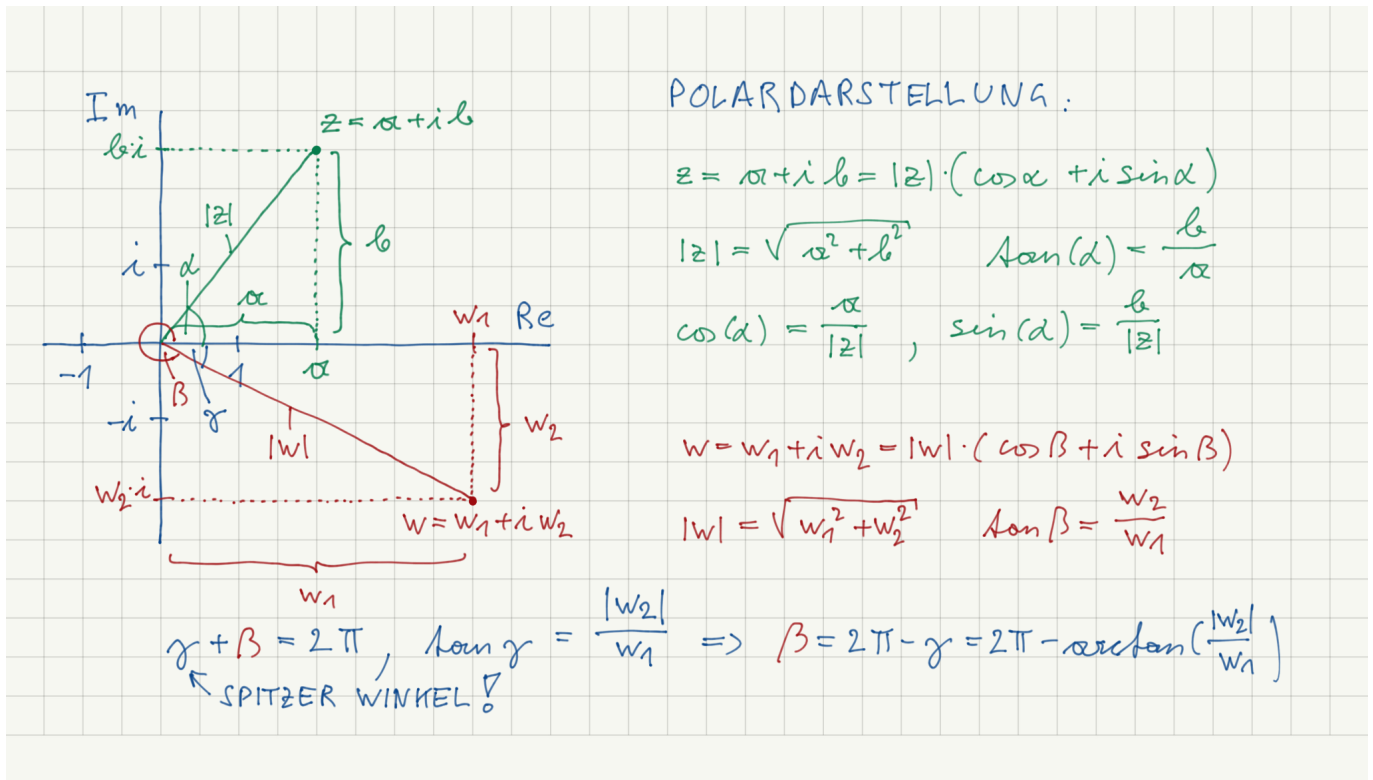


Figure 3: Polardarstellung für zwei komplexe Zahlen.

Aufgabe 5 Zeige, dass

$$(\cos(\alpha) + i \sin(\alpha))^2 = \cos(2\alpha) + i \sin(2\alpha)$$

für jedes reelle v gilt. Verwenden Sie dazu die Trigonometrischen Identitäten

$$\cos(2v) = \cos^2(v) - \sin^2(v) \quad \text{und} \quad \sin(2v) = 2 \sin(v) \cos(v).$$

(Es ist interessant, dass die 'Struktur' dieser beiden Identitäten völlig verschieden ist.) \square

Beispiel 14 Es sei z eine beliebige komplexe Zahl. Berechne mit Hilfe der Polardarstellung die Zahlen $|z|$, $|z|^2$ und z^2 . Verwende dazu die Identität⁴

$$(\cos(\alpha) + i \sin(\alpha))^2 = \cos(2\alpha) + i \sin(2\alpha)$$

aus Aufgabe 5.

Lösung. 1) Mit Hilfe der Polardarstellung $z = R(\cos(\alpha) + i \sin(\alpha))$ und der Identität

$$\cos^2(v) + \sin^2(v) = 1 \quad \text{für alle reellen } v$$

folgt

$$|z| = \sqrt{[R \cos(\alpha)]^2 + [R \sin(\alpha)]^2} = \sqrt{R^2 [\cos^2(\alpha) + \sin^2(\alpha)]} = R.$$

2) Dann folgt sofort $|z|^2 = R^2$.

3) Mit Hilfe der Polardarstellung folgt

$$z^2 = z \cdot z = R^2 (\cos(\alpha) + i \sin(\alpha))^2 \stackrel{!}{=} R^2 [\cos(2\alpha) + i \sin(2\alpha)].$$

Damit hat sich der ursprüngliche Radius R zum Radius R^2 geändert und der ursprüngliche Winkel α hat sich verdoppelt. Machen Sie sich ein Bild davon. \square

⁴Achtung: Das diese Formel gilt ist nicht offensichtlich!

Aufgabe 6 Zeigen Sie mit Hilfe der Polardarstellung: $|z^2| \neq |z|^2$ (im Allgemeinen).

Bemerkung 3 Soll man komplexe Zahlen miteinander multiplizieren oder dividieren, so ist die Polardarstellung sehr oft sehr gut verwendbar, beim Addieren und Subtrahieren von komplexen Zahlen aber nicht. \square

Beispiel 15 Bestimme die Lösungsmenge der Gleichung $|z|^2 = 4$.

Lösung. Mit Hilfe der Polardarstellung $z = R(\cos(\alpha) + i \sin(\alpha))$ folgt

$$4 = |z|^2 = R^2,$$

d.h. für jeden Winkel α muss $R = 2$ gelten und jeder Winkel ist erlaubt! Damit ist die Lösungsmenge ein Kreis mit Mittelpunkt $(0,0)$ und Radius 2. In Zeichen,

$$\mathbb{L} = \{a + ib \in \mathbb{C} \mid a^2 + b^2 = 2^2\} = \{2(\cos(\alpha) + i \sin(\alpha)) \mid \alpha \in [0, 2\pi)\}.$$

\square

Beispiel 16 Geben Sie die Polardarstellungen von $z_1 := 2$, $z_2 := -5$, $z_3 := 3i$ und $z_4 := -7i$ an.

Lösung. Aus den graphischen Darstellungen dieser Zahlen folgt sofort:

- 1) $R_1 = 2$ und $\alpha_1 = 0$.
- 2) $R_2 = 5$ und $\alpha_2 = \pi$ ($\equiv 180^\circ$).
- 3) $R_3 = 3$ und $\alpha_3 = \frac{\pi}{2}$ ($\equiv 90^\circ$).
- 4) $R_4 = 7$ und $\alpha_4 = \frac{3\pi}{2}$ ($\equiv 270^\circ$). Daraus ergibt sich

$$z_1 = 2, \quad z_2 = 5 [\cos(\pi) + i \sin(\pi)], \quad z_3 = 3 \left[\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) \right]$$

und

$$z_4 = 7 \left[\cos\left(\frac{3\pi}{2}\right) + i \sin\left(\frac{3\pi}{2}\right) \right].$$

\square

Beispiel 17 Berechne die Polardarstellungen von $z_1 := 2 + 2i$ und $z_2 := \bar{z}_1$. Wie kann man sich \bar{z}_1 geometrisch veranschaulichen?

Lösung. Beachte: $z_2 := \bar{z}_1 = 2 - 2i$. Machen Sie sich eine Skizze.

- 1) $R_1 = \sqrt{2^2 + 2^2} = \sqrt{4 \cdot 2} = 2\sqrt{2}$ und $\tan(\alpha_1) = \frac{2}{2} = 1$, also $\alpha_1 = \frac{\pi}{4}$ (Eindeutigkeit des Winkels, weil er spitz ist). Damit lautet die Polardarstellung

$$z_1 = 2\sqrt{2} \left[\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) \right].$$

- 2) Und natürlich folgt sofort $z_2 = 2\sqrt{2} \left[\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) - i \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) \right]$. Machen wir es nun aber auch so wie bei 1). $R_2 = \sqrt{2^2 + (-2)^2} = \sqrt{4 \cdot 2} = 2\sqrt{2}$ und $\tan(\alpha_2) = \frac{-2}{2} = -1$. (Keine Eindeutigkeit des Winkels, weil er nicht spitz ist). Es gibt aber einen spitzen Winkel β , sodass gilt (Skizze!)

$$\alpha_2 + \beta = 2\pi \quad \text{mit} \quad \tan(\beta) = \frac{2}{2} = 1.$$

Damit folgt $\beta = \frac{\pi}{4}$ also $\alpha = 2\pi - \frac{\pi}{4} = \frac{7\pi}{4}$. Die Polardarstellung von z_2 ist somit gegeben durch

$$z_2 = 2\sqrt{2} \left[\cos\left(\frac{7\pi}{4}\right) + i \sin\left(\frac{7\pi}{4}\right) \right].$$

Wegen $\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \cos\left(\frac{7\pi}{4}\right)$ und $\sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = -\sin\left(\frac{7\pi}{4}\right)$ sind beide Polardarstellungen gleich. Überlegen Sie sich das in aller Ruhe.

Ist z eine komplexe Zahl, so ist \bar{z} das Spiegelbild von z , wobei bezüglich der reellen Achse (horizontale Achse) gespiegelt wird. \square

Aufgabe 7 Zeichnen Sie die Graphen der Kosinusfunktion und der Sinusfunktion und zeichnen Sie die Winkel $\frac{\pi}{4}$ und $\frac{7\pi}{4}$ ein. Was können Sie erkennen? \square

Aufgabe 8 Berechnen Sie die Polardarstellungen von $z_1 := -1 + \sqrt{3}i$ und machen Sie eine gute saubere Skizze von dieser Situation. \square

Aufgabe 9 Berechnen Sie die Polardarstellungen von $z_1 := -1 - \sqrt{3}i$ und machen Sie eine gute saubere Skizze von dieser Situation. \square

1.6 Die Eulerformel und ihre Anwendung

Neben dem Erkennen, dass komplexe Zahlen als Punkte in der Ebene angesehen werden können war die Entdeckung der *Eulersche Formel* ein wichtiger Schritt in der Mathematik (und auch für die zukünftige Elektronik). Die *Eulersche Formel* lautet⁵

$$e^{i\alpha} = (\cos(\alpha) + i \sin(\alpha)) \quad \text{für} \quad \alpha \in \mathbb{R}$$

und ermöglicht folgende kompakte Schreibweise

$$z = |z| (\cos(\alpha) + i \sin(\alpha)) = |z| e^{i\alpha},$$

wobei $z = a + ib$ für reelle Zahlen a, b und die Relationen (3) gelten. Ohne Beweis erwähnen wir

Satz 2 Es seien α, β und γ reelle Zahlen. Dann gilt

$$e^{i(\alpha+\beta)} = e^{i\alpha} \cdot e^{i\beta} \quad \text{und} \quad e^{i\alpha\gamma} = (e^{i\alpha})^\gamma.$$

Insbesondere gilt für jede natürliche Zahl n :

$$(\cos(\alpha) + i \sin(\alpha))^n = (\cos(n\alpha) + i \sin(n\alpha)).$$

Beispiel 18 Zeige:

$$e^{i0} = 1 \quad \text{Allgemeiner gilt:} \quad e^{i2\pi n} \text{ für jedes ganzes } n.$$

Lösung. Die Eulersche Formel ergibt $e^{i0} = \cos(0) + i \sin(0) = 1 + i0 = 1$. Und allgemeiner:

$$e^{i2\pi n} = \cos(2\pi n) + i \sin(2\pi n) = 1 + i0 = 1 \quad \text{für } n = 0, 1, 2, \dots$$

(Man kann zeigen, dass 1 nur durch diese Zahlen $e^{i2\pi n}$ ($n \in \mathbb{Z}$) beschrieben werden kann.) \square

Beispiel 19 Zeige:

$$|e^{i\alpha}| = 1 \quad \text{für jedes reelle } \alpha.$$

Insbesondere, aus $z = R e^{i\alpha}$ für reelle R, α mit $R > 0$, folgt $|z| = R$.

Lösung. Die Eulersche Formel ergibt

$$|e^{i\alpha}| = \sqrt{[\cos(\alpha)]^2 + [\sin(\alpha)]^2} = \sqrt{\cos^2(\alpha) + \sin^2(\alpha)} = 1.$$

Hier haben wir verwendet: $f^2(x) := [f(x)]^2$.

Aus der Eigenschaft der Betragsfunktion

$$|vw| = |v| |w| \quad \text{für komplexe Zahlen } v, w$$

folgt

$$|z| = |R e^{i\alpha}| = |R| \cdot |e^{i\alpha}| = |R| \cdot 1 = |R|.$$

\square

⁵Dies ist eine Identität, der Begriff Formel wird aber üblicherweise in der Schule und in den Ingenieurwissenschaften verwendet.

Definition und Satz 1 Die komplexe Exponentialfunktion ist definiert durch

$$e^{a+ib} := e^a e^{ib} \quad \text{für alle reellen Zahlen } a \text{ und } b.$$

Für alle komplexen Zahlen v, w und jede reelle Zahl γ gilt

$$e^{v+w} = e^v \cdot e^w \quad \text{und} \quad e^{v\gamma} = (e^v)^\gamma.$$

Jetzt rechnen wir Beispiel 16 noch einmal und zwar in Kurzschreibweise.

Beispiel 20 Geben Sie die Polardarstellungen von $z_1 := 2$, $z_2 := -5$, $z_3 := 3i$ und $z_4 := -7i$ an.

Lösung. Aus den graphischen Darstellungen dieser Zahlen folgt sofort:

- 1) $R_1 = 2$ und $\alpha_1 = 0$.
- 2) $R_2 = 5$ und $\alpha_2 = \pi$.
- 3) $R_3 = 3$ und $\alpha_3 = \frac{\pi}{2}$.
- 4) $R_4 = 7$ und $\alpha_4 = \frac{3\pi}{2}$ ($\equiv 270^\circ$). Daraus ergibt sich

$$z_1 = 2e^{i0} = 2, \quad z_2 = 5e^{i\pi}, \quad z_3 = 3e^{i\frac{\pi}{2}} \quad \text{und} \quad z_4 = 7e^{i\frac{3\pi}{2}}.$$

Sie können auch folgendes schreiben:

$$z_1 = 2 \exp(i0) = 2, \quad z_2 = 5 \exp(i\pi), \quad z_3 = 3 \exp\left(i\frac{\pi}{2}\right) \quad \text{und} \quad z_4 = 7 \exp\left(i\frac{3\pi}{2}\right).$$

□

Beispiel 21 Berechnen Sie das Produkt der zwei komplexen Zahlen $v := 3i$ und $w := -7i$.

Lösung. Von Beispiel 20 kennen wir die Polardarstellung der komplexen Zahlen v und w :

$$v = 3e^{i\frac{\pi}{2}} \quad \text{und} \quad w = 7e^{i\frac{3\pi}{2}}.$$

Damit folgt

$$v \cdot w = 3 \cdot e^{i\frac{\pi}{2}} \cdot 7 \cdot e^{i\frac{3\pi}{2}} = 3 \cdot 7 \cdot e^{i\frac{\pi}{2}} \cdot e^{i\frac{3\pi}{2}} = 21 e^{i\frac{4\pi}{2}} = 21 e^{i2\pi} = 21.$$

Hier haben wir die obigen Rechenregeln für Potenzen und $e^{i2\pi} = 1$ verwendet.

Probe: $3i \cdot (-7)i = -21i^2 = 21$. □

1.7 Warum benötigen wir die komplexen Zahlen mit ihrer Addition und Multiplikation?

Die Motivation für die Konstruktion der komplexen Zahlen (mit ihrer Struktur) gibt folgendes Beispiel.

Beispiel 22 ($z^2 = -1$ Version 1) Löse die Gleichung $z^2 = -1$ in \mathbb{C} . (Dies ist nicht die Gleichung $|z|^2 = -1$. Warum?)

Lösung. Falls es eine Lösung gibt, dann ist sie von der Form $z = a + ib$ für bestimmte a, b aus den reellen Zahlen. Einfaches Rechnen ergibt

$$(a \cdot a - b \cdot b) + i(b \cdot a + a \cdot b) = z^2 = -1 = -1 + i0$$

was aber äquivalent zu den beiden Gleichungen

$$1) a^2 - b^2 = -1 \quad \text{und} \quad 2) b \cdot a + a \cdot b = 0$$

ist. Aus 2), d.h. $2 \cdot a \cdot b = 0$ folgt $a = 0$ oder $b = 0$. (Das Produkt von Zahlen ist Null genau dann wenn mindestens einer der Faktoren Null ist.)

1. Fall $a = 0$: Aus der ersten Gleichung, also $a^2 - b^2 = -1$ mit $a = 0$ folgt $-b^2 = -1$. Also $b^2 = 1$ und somit folgt sofort $b = +1$ oder $b = -1$. Für diesen Fall gilt $z = i b$ mit $b \in \{+1, -1\}$ und damit lautet die Lösungsmenge

$$\mathbb{L}_{1.Fall} = \{+i, -i\}.$$

2. Fall $b = 0$. Dann folgt aus 1), dass $a^2 = -1$, wobei a eine reelle Zahl ist und damit gibt es keine Lösung. Dieser Fall liefert also

$$\mathbb{L}_{2.Fall} = \emptyset \quad (\text{leere Menge}).$$

Insgesamt erhalten wir

$$\mathbb{L} = \mathbb{L}_{1.Fall} \cup \mathbb{L}_{2.Fall} = \{+i, -i\}.$$

Oder äquivalent:

$$z^2 = -1 \quad \text{genau dann, wenn} \quad z = i \quad \text{oder} \quad z = -i.$$

Probe: $(\pm i)^2 = (\pm 1)^2 \cdot i^2 = 1 \cdot (-1) = -1$. Passt. Dies sind tatsächlich alle Lösungen!

Bemerkung 4 Aus dem vorherigen Beispiel folgt: Ist a eine positive reellen Zahl, dann hat die Gleichung $z^2 = -a^2$ die Lösungen $z = i a$ und $z = -i a$. Man kann natürlich auch $z = a i$ und $z = -a i$ schreiben. Es folgt aber auch: Ist a eine positive reellen Zahl, dann hat die Gleichung $z^2 = -a$ die Lösungen $z = \sqrt{a} i$ und $z = -\sqrt{a} i$. \square

Bemerkung 5 Das Addieren und Multiplizieren von Paaren (reeller Zahlen) ist definiert durch

$$(a, b) + (c, d) := (a + c, b + d) \quad \text{und} \quad (a, b) \cdot (c, d) := (a \cdot c - b \cdot d, b \cdot c + a \cdot d).$$

Beachte i ist äquivalent zum Paar $(0, 1)$ für das gilt:

$$(0, 1) \cdot (0, 1) = (-1, 0) \quad (\text{vgl. } i \cdot i = -1)$$

und dieses Paar existiert! Es ist nicht wirklich etwas imaginäres, es ist real! Das man die Multiplikation so definiert wie oben, das ist der "eigentliche Trick" (um $z^2 = -1$ in \mathbb{C} lösbar zu machen) und ist absolute legitim. Ja, das ist Mathematik ;-).

Aber, alles können wir nicht bekommen, wir haben keine Ordnung auf \mathbb{C} ! Auch das ist Mathematik. \square

Beispiel 23 ($z^2 = -1$ **Version 2**) Löse die Gleichung $z^2 = -1$ in \mathbb{C} .

Lösung. Falls es eine Lösung gibt, dann ist sie von der Form $z = R e^{i\varphi}$ für bestimmte reelle Zahlen $R > 0$ und φ . Einfaches Rechnen ergibt

$$R^2 e^{i2\varphi} = z^2 = -1 = 1 \cdot e^{i\pi}$$

was aber äquivalent zu den beiden Gleichungen

$$1) R^2 = 1 \quad \text{und} \quad 2) e^{i2\varphi} = e^{i\pi}$$

ist. Aus 1) mit $R > 0$ folgt sofort $R = 1$. Und aus 2) mit $e^{i2\pi n} = 1$ für $n \in \mathbb{Z}$ folgt

$$2\varphi = \pi + 2\pi n \quad \text{für} \quad n \in \mathbb{Z} \quad (\text{Vgl. Beispiel 18.}),$$

also

$$\varphi = \frac{\pi}{2} + \pi n \quad \text{für} \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Dies ergibt die Winkel $\frac{\pi}{2}$ und $\frac{3\pi}{2}$ (alle anderen sind äquivalent!). Damit folgt schließlich

$$\mathbb{L} = \{e^{i\pi/2}, e^{i3\pi/2}\} = \{+i, -i\}.$$

Probe: $e^{i\pi/2} \cdot e^{i\pi/2} = e^{i(\pi/2+\pi/2)} = e^{i\pi} = -1$ und

$$e^{i3\pi/2} \cdot e^{i3\pi/2} = e^{i(3\pi/2+3\pi/2)} = e^{i3\pi} = e^{i\pi} \cdot e^{i2\pi} = (-1) \cdot 1 = -1.$$

□

1.8 Ein weiteres Beispiel und einige Aufgaben

Ohne Beweis erwähnen wir den wichtigen Satz.

Satz 3 *Es sei m eine positive ganze Zahl und a eine reelle Zahl. Dann hat jede Gleichung der Form $z^m = a$ genau m Lösungen in den komplexen Zahlen.*

Beispiel 24 *Bestimme die Lösungsmenge der Gleichung*

$$z^4 = -81 \quad \text{in } \mathbb{C}.$$

Lösung. *Es existieren 4 Lösungen, welche die Form $z = R e^{i\varphi}$ haben mit bestimmten reellen Zahlen $R > 0$ und φ . Beachte: $3^4 = 81$. Einfaches Rechnen ergibt*

$$z^4 = R^4 e^{i4\varphi} \quad \text{und} \quad z^4 = -81 = 3^4 \cdot e^{i\pi} \quad \text{also} \quad R^4 e^{i4\varphi} = 3^4 \cdot e^{i\pi}.$$

Aber dies ist äquivalent zu den beiden Gleichungen

$$1) R^4 = 3^4 \quad \text{und} \quad 2) e^{i4\varphi} = e^{i\pi}.$$

Aus 1) mit $R > 0$ folgt sofort $R = 3$. Und aus 2) mit $e^{i2\pi n} = 1$ für $n \in \mathbb{Z}$ folgt

$$4\varphi = \pi + 2\pi n \quad \text{für} \quad n \in \mathbb{Z} \quad (\text{Vgl. Beispiel 18.}),$$

also

$$\varphi = \frac{\pi}{4} + \frac{n}{2}\pi = \frac{(1+2n)\pi}{4} \quad \text{für} \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Dies ergibt die Winkel $\varphi_0 := \frac{\pi}{4}$ ($n = 0$), $\varphi_1 := \frac{3\pi}{4}$ ($n = 1$), $\varphi_2 := \frac{5\pi}{4}$ ($n = 2$) und $\varphi_3 := \frac{7\pi}{4}$ ($n = 3$). Beachte, dass alle anderen Winkel 'äquivalent' sind, d.h. diese Winkel ergeben dieselben komplexen Lösungen wie die Winkel $\varphi_0, \dots, \varphi_3$. Damit folgen schließlich die 4 Lösungen:

$$z_0 = 3e^{i\pi/4}, \quad z_1 = 3e^{i3\pi/4}, \quad z_2 = 3e^{i5\pi/4} \quad \text{und} \quad z_3 = 3e^{i7\pi/4}$$

bzw. die Lösungsmenge

$$\mathbb{L} = \{3e^{i\pi/4}, 3e^{i3\pi/4}, 3e^{i5\pi/4}, 3e^{i7\pi/4}\}.$$

Vgl. Sie dazu Abb. 4 in der die Lösungen von $z^4 = -3$ in \mathbb{C} graphisch dargestellt sind. Machen Sie die Probe! Wir rechnen eine der vier Proben vor: Wegen

$$5\pi = \pi + 4\pi, \quad e^{i4\pi} = 1 \quad \text{und} \quad e^{i\pi} = -1$$

folgt

$$z_2^4 = (3e^{i5\pi/4})^4 = 3^4 e^{i4 \cdot 5\pi/4} = 81 e^{i5\pi} = 81 e^{i\pi} = -81.$$

□

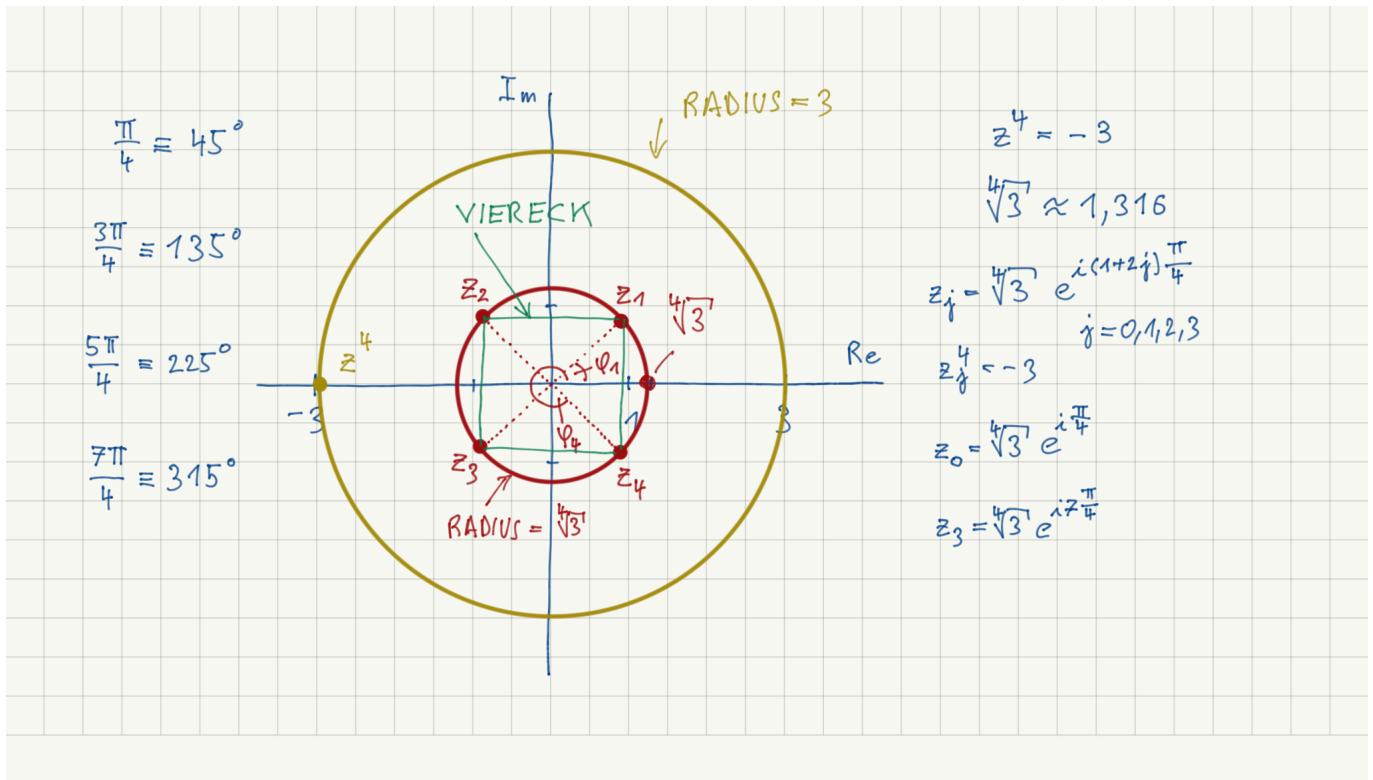


Figure 4: Graphische Darstellung der Lösungen der Gleichung $z^4 = -3$ in \mathbb{C} .

Bemerkung 6 Beachten Sie folgendes:

$$e^{i\alpha+i2\pi} = e^{i\alpha} \quad \text{aber} \quad e^{\alpha+2\pi} \neq e^\alpha \quad \text{falls } \alpha \text{ reell ist.}$$

Aufgabe 10 Bestimmen Sie die Lösungsmenge der Gleichung $z^4 = -256$ als auch von $z^4 = +256$ in \mathbb{C} . \square

Aufgabe 11 Bestimmen Sie die Lösungsmenge der Gleichung $z^5 = -1$ in \mathbb{C} . \square

Aufgabe 12 Bestimmen Sie die Lösungsmenge der Gleichung $z^3 = -125$ in \mathbb{C} . \square