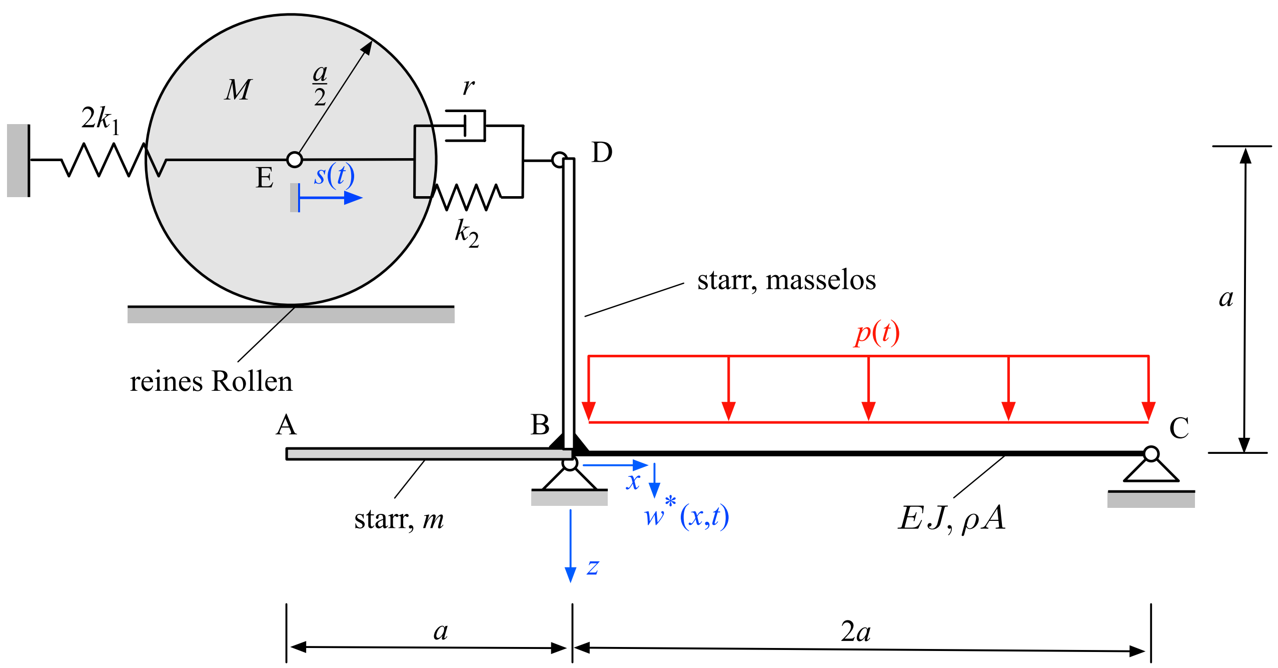
1. Beispiel (10 Punkte)

Gegeben:
Ebenes schwingungsfähiges System lt. Skizze, welches sich in der dargestellten Lage im statischen Gleichgewicht befindet:

- Starrer Stab AB: Länge a, Masse m
- Starrer, masseloser Stab BD: Länge a
- Starre, homogene Kreisscheibe: Radius $a/2$, Masse M
- Linear elastischer Biegestab BC: Länge $2a$, Biegesteifigkeit EJ, Masse pro Längeneinheit ρA
- Geschwindigkeitsproportionaler Dämpfer: Dämpferkonstante r
- Linear elastische Federn: Federsteifigkeiten $2k_1$ und k_2
- Gleichlast: $p(t)$

Gesucht:
1. Anzahl der Freiheitsgrade des Ersatzsystems bei Verwendung des folgenden *Ritz*schen Ansatzes für die Durchbiegung w des Biegeträgers
   $w^*(x,t) = q(t)\sin\frac{\pi x}{2a}$ für $-a \le x \le 2a$
2. Kinetische Energie, potentielle Energie und generalisierte Kräfte des diskretisierten Ersatzsystems für kleine Schwingungen um die statische Gleichgewichtslage
3. Bewegungsgleichung(en) des Ersatzsystems in *Lagrange*scher Form für kleine Schwingungen um die statische Gleichgewichtslage
4. Horizontale Verschiebung des Punktes D zufolge der statischen Belastung $p = p_s$ und $k_1 = k_2 = k$



Lösung zum 1. Beispiel

1. Anzahl der Freiheitsgrade

2 FHG; LK: $q(t)$ ... Durchbiegung w^* des Biegeträgers an der Stelle $x = a$

$s(t)$ ... Schwerpunktverschiebung Kreisscheibe

2. Kinetische Energie, potentielle Energie, generalisierte Kräfte

$$T = \frac{1}{2}\left[\dot{q}^2\left(\rho A a + \frac{m}{12}\pi^2\right) + \frac{3M}{2}\dot{s}^2\right]$$

$$V = \frac{1}{2}\left[q^2\left(\frac{EJ\pi^4}{16a^3} + \frac{\pi^2}{4}k_2\right) + s^2\left(2k_1 + k_2\right) - \pi k_2 s q\right] - pq\frac{4a}{\pi}$$

$$Q_q = -r\left(\dot{q}\frac{\pi^2}{4} - \frac{\pi}{2}\dot{s}\right)$$

$$Q_s = r\left(\dot{q}\frac{\pi}{2} - \dot{s}\right)$$

3. Bewegungsgleichungen

$$\begin{bmatrix} \rho A a + \frac{m}{12}\pi^2 & 0 \\ 0 & \frac{3M}{2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{q} \\ \ddot{s} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{r\pi^2}{4} & -\frac{r\pi}{2} \\ -\frac{r\pi}{2} & r \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{q} \\ \dot{s} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{EJ\pi^4}{16a^3} + \frac{\pi^2}{4}k_2 & -\pi k_2 \\ -\pi k_2 & 2k_1 + k_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} q \\ s \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} p\frac{4a}{\pi} \\ 0 \end{Bmatrix}$$

4. Horizontale Verschiebung des Punktes D zufolge der statischen Belastung

$$u_D = \frac{\pi}{2}\underbrace{p_s\frac{4a}{\pi}\frac{1}{\frac{EJ\pi^4}{16a^3} - \frac{\pi^2}{12}k}}_{q_{\mathrm{stat}}}$$

2. Beispiel (10 Punkte)

Gegeben:

Vorgestauchte linear elastische Feder auf der eine Punktmasse aufliegt, welche zum Anfangszeitpunkt ($t = 0$) losgelassen wird.

Die Punktmasse trifft auf das ebene schwingungsfähige System lt. Skizze, welches sich in der gezeichneten Lage im statischen Gleichgewicht befindet:

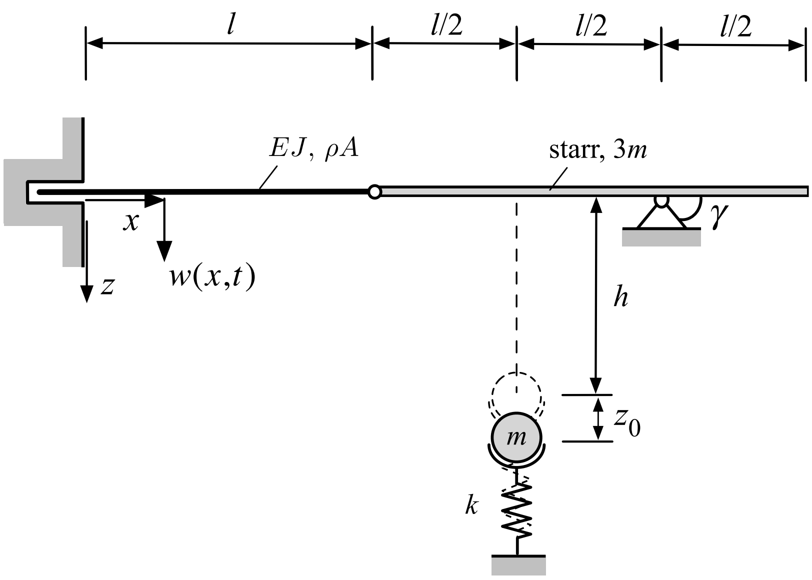
- Linear elastischer Biegeträger: Länge l, Masse pro Längeneinheit ρA, Biegesteifigkeit EJ
- Starrer, homogener Stab: Länge $3l/2$, Masse $3m$
- Linear elastische Drehfeder: Federsteifigkeit γ
- Punktmasse m
- Linear elastische Feder: Federsteifigkeit k
- Vorstauchung der linear elastischen Feder: z_0

Gesucht:

1. Minimale Federsteifigkeit k_{min}, sodass es gerade noch zu einer Berührung kommt.
2. Geschwindigkeit v der Punktmasse m unmittelbar vor dem Stoß für $k > k_{min}$.
3. Geschwindigkeiten v' und $\dot{q}'$ unmittelbar nach dem vollkommen elastischen Stoß mittels *Lagrange*scher Stoßgleichungen unter Annahme folgender Geschwindigkeitsverteilung im Biegestab:

$$\dot{w}'(x) = \dot{q}'\varphi(x), \quad \varphi(x) = \left(\frac{x}{l}\right)^2, \quad 0 \leq x \leq l$$

4. Maximales Moment in der Drehfeder bei der Nachfolgebewegung nach dem Stoß unter Verwendung des Verformungsansatzes für die Durchbiegung des elastischen Balkens: $w^*(x,t) = q(t)\,\varphi(x)$



Lösung zum 2. Beispiel

1. Minimale Federsteifigkeit

$$k_{min} = \frac{2mg(h+z_0)}{z_0^2}$$

2. Geschwindigkeit der Punktmasse unmittelbar vor dem Stoß

$$v = \sqrt{\frac{k}{m}z_0^2 - 2g(h+z_0)}$$

3. Geschwindigkeiten unmittelbar nach einem vollkommen elastischen Stoß

$$\dot{q}' = \frac{m}{2m^*}\left(\frac{\frac{m}{4} - m^*}{\frac{m}{4} + m^*} - 1\right)v; \quad v' = \frac{\frac{m}{4} - m^*}{\frac{m}{4} + m^*}v$$

$$\text{mit } m^* = \frac{3m}{4} + \frac{\rho A l}{5}$$

4. Maximales Moment in der Drehfeder

$$M_{max} = \gamma \frac{q_u}{l}$$

$$\text{mit } q_u = \pm \dot{q}' l \sqrt{\frac{m^*}{\gamma + \frac{4EJ}{l}}}$$