

Einiges über Bruchrechnen in \mathbb{Q} und \mathbb{R}

A) Reflexionen

In der Schule haben wir gelernt, dass $\frac{2}{3}$ und $\frac{6\pi}{9\pi}$ 'gleich' sind weil

$$\frac{6\pi}{9\pi} = \frac{2 \cdot \cancel{3} \cdot \pi}{3 \cdot \cancel{3} \cdot \pi} = \frac{2}{3}$$

gilt. Aber wann gilt $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ für $a, c \in \mathbb{Z}$ und $b, d \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$? Hier können wir nichts kürzen! Betrachten wir noch einmal das vorherige Beispiel. Mit unserem Schulwissen könnten wir auch folgendes tun:

$$\frac{6\pi}{9\pi} = \frac{2}{3} \Leftrightarrow \frac{6 \cdot \pi \cdot \cancel{3 \cdot 3 \cdot \pi}}{\cancel{9 \cdot \pi}} = \frac{2 \cdot \cancel{3} \cdot 3 \cdot \pi}{\cancel{3}} \Leftrightarrow 6 \cdot \pi = 2 \cdot 3 \cdot \pi \Leftrightarrow 6\pi = 6 \cdot \pi.$$

In ersten Schritt haben wir auf beiden Seiten im Zähler mit derselben Zahl multipliziert, sodass (i) die Gleichheit (oder Ungleichheit) nicht verändert wurde und (ii) beide Nenner vollständig gekürzt werden können. Im zweiten Schritt haben wir alles vereinfacht, sodass die Gleichheit offensichtlich geworden ist. Wir sehen, dass $\frac{a}{b}$ und $\frac{c}{d} := \frac{af}{bf}$ für ein $f \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ im obigen Sinn 'gleich' sind, weil

$$\frac{c}{d} := \frac{af}{bf} = \frac{a}{b} \quad \text{oder gleichbedeutend} \quad \frac{c}{d} := \frac{af}{bf} = \frac{a}{b} \Leftrightarrow cb - ad = afb - abf = 0$$

gilt. Die Methode mit dem Kürzen ist einfacher in der Praxis, aber die zweite äquivalente Methode (mit dem Erweitern und Umformen) führt zu einer einfacheren Definition von Gleichheit von Brüchen. (Im Folgenden bezeichnet \mathbb{Z} die Menge der ganzen Zahlen.)

Definition und Satz 1 Sind x und y zwei rationale Zahlen, dann gibt es $a, c \in \mathbb{Z}$ und $b, d \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, sodass $x = \frac{a}{b}$ und $y = \frac{c}{d}$ gilt. Die Gleichheit von x und y sind wie folgt definiert:

$$x = y \quad \Leftrightarrow \quad \frac{a}{b} = \frac{c}{d} \quad \Leftrightarrow \quad ad = cb \quad \text{oder gleichbedeutend} \quad ad - cb = 0.$$

Weiters, wird $\frac{A}{B}$ aus $\frac{a}{b}$ durch Kürzen erhalten, d.h. gilt $\frac{a}{b} = \frac{Af}{Bf}$ für ein $f \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, so folgt $\frac{a}{b} = \frac{A}{B}$. Und umgekehrt, wird $\frac{a}{b}$ aus $\frac{A}{B}$ durch Erweitern erhalten, d.h. gilt $\frac{a}{b} = \frac{Af}{Bf}$ für ein $f \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, so folgt $\frac{a}{b} = \frac{A}{B}$. In Worten, das Kürzen und das Erweitern sind mit der Gleichheitsdefinition verträglich.

Beispiel 1 Zeige, dass die Zahlen $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{4}}$ und $\frac{2}{\sqrt{8}}$ gleich sind. Die Behauptung folgt aus

$$\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{4}} = \frac{2}{\sqrt{8}} \Leftrightarrow \sqrt{2} \sqrt{8} = 2 \sqrt{4} \Leftrightarrow \sqrt{2 \cdot 8} = \sqrt{4 \cdot 4} \Leftrightarrow \sqrt{16} = \sqrt{16}.$$

Ein alternativer Beweis ist:

$$\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{4}} = \frac{2}{\sqrt{8}} \Leftrightarrow \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2 \cdot 2}} = \frac{\sqrt{4}}{\sqrt{4 \cdot 2}} \Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Locker formuliert besteht die Menge der rationalen Zahlen, die wir mit \mathbb{Q} bezeichnen, aus allen Objekte $\frac{a}{b}$ mit $a \in \mathbb{Z}$ und $b \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$. Übrigens benötigen wir noch eine Definition:

$$\frac{a}{1} := a \quad \text{für} \quad a \in \mathbb{Z} \quad \text{sodass} \quad \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$$

gilt. Die Menge ist aber eigentlich erst die halbe Miete. Wir benötigen noch die Definition der Addition und der Multiplikation. (Die Subtraktion und die Division ergeben sich dann automatisch wegen $x + (-x) = 0$ und $x \cdot x^{-1} = 1$.)

Definition 1 Es seien $x = \frac{a}{b}$ und $y = \frac{c}{d}$ zwei rationale Zahlen mit $a, c \in \mathbb{Z}$ und $b, d \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$. Dann sind die Addition und die Multiplikation auf \mathbb{Q} wie folgt definiert:

$$\frac{a}{b} +_{\mathbb{Q}} \frac{c}{d} := \frac{ad + cb}{bd} \quad \text{und} \quad \frac{a}{b} \cdot_{\mathbb{Q}} \frac{c}{d} := \frac{ac}{bd}.$$

Wenn nicht unbedingt erforderlich schreibt man kurz $+$ und \cdot statt $+_{\mathbb{Q}}$ und $\cdot_{\mathbb{Q}}$.

Betrachte folgende rationale Zahlen:

$$p := \frac{1}{2}, \quad \frac{2}{4}, \quad \frac{\pi}{2\pi} \quad \text{und} \quad \frac{-100}{-200}.$$

Alle diese Zahlen sind gleich oder besser sie sind alle Repräsentanten ein und derselben Zahl (man sagt auch sie sind äquivalent). Betrachte auch noch die Zahlen

$$q := \frac{3}{4}, \quad \frac{6}{8}, \quad \frac{3\pi}{4\pi} \quad \text{und} \quad \frac{30}{40},$$

welche alle äquivalent zu q sind. Damit das Rechnen mit diesen rationalen Zahlen sinnvoll ist muss offensichtlich folgendes gelten:

$$p +_{\mathbb{Q}} q = \frac{1}{2} + \frac{3}{4} = \frac{2}{4} + \frac{6}{8} = \frac{\pi}{2\pi} + \frac{3\pi}{4\pi} = \frac{-100}{-200} + \frac{30}{40}$$

und

$$p \cdot_{\mathbb{Q}} q = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} = \frac{2}{4} \cdot \frac{6}{8} = \frac{\pi}{2\pi} \cdot \frac{3\pi}{4\pi} = \frac{-100}{-200} \cdot \frac{30}{40}.$$

In der Tat kann man beweisen, dass dies gilt.

Nach der obigen Definition gilt:

$$\frac{a}{1} + \frac{b}{1} := \frac{a \cdot 1 + b \cdot 1}{1 \cdot 1} = \frac{a + b}{1} \quad \text{und} \quad \frac{a}{1} \cdot \frac{b}{1} := \frac{a \cdot b}{1 \cdot 1} = \frac{a \cdot b}{1}$$

wie es sein sollte. Weiters folgt:

$$\left(\frac{a}{b} + \frac{c}{d}\right) \frac{e}{f} := \left(\frac{ad + cb}{bd}\right) \frac{e}{f} = \frac{ade + cbe}{bdf} = \frac{ade}{bdf} + \frac{cbe}{bdf} = \frac{ae}{bf} + \frac{ce}{df}$$

also das *Distributiv Gesetz*.

Satz 1 Gilt für rationale Zahlen $x_1 = x_2$ und $y_1 = y_2 \neq 0$, so folgt

$$x_1 + y_1 = x_2 + y_2, \quad -x_1 = -x_2, \quad x_1 \cdot y_1 = x_2 \cdot y_2 \quad \text{und} \quad y_1^{-1} = y_2^{-1}.$$

Weiters gilt für $a, b \in \mathbb{Z}$ mit $b \neq 0$: $-\frac{a}{b} = \frac{-a}{b} = \frac{a}{-b}$, $\left(\frac{a}{b}\right)^{-1} = \frac{b}{a}$ usw.¹

Bemerkung 1 Beim Rechnen mit Brüchen arbeiten wir eigentlich mit Repräsentanten von rationalen Zahlen und verwenden geschicktes Erweitern und Kürzen. Dabei ist es egal welche der äquivalenten Repräsentanten wir verwenden. Man sagt dass alle Operationen (Addition, Multiplikation, Erweitern und Kürzen) mit der Äquivalenzrelation \sim verträglich sind, wobei $\frac{a}{b} \sim \frac{c}{d}$ genau dann gilt, wenn $ad = cb$ gilt. Üblicherweise schreibt man $=$ statt \sim .

¹Wir wiederholen nicht alles von der Schule.

B) Endlich Beispiele

So jetzt rechnen wir noch einige Beispiele. Ohne Beweis oder eine Erklärung erwähnen wir, dass $\frac{a}{b}$ mit $b \neq 0$ auch dann wohldefiniert ist bzw. Sinn macht, wenn $a, b \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ (oder $a, b \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$) gilt. Ab jetzt gilt für $\frac{a}{b}$ stets die Bedingung $b \neq 0$ und $a, b \in \mathbb{R}$. Ein Beispiel solch einer Zahl ist $\frac{\sqrt{2}}{\pi}$.

Beispiel 2 Berechne folgenden Bruch und vereinfache in so gut wie möglich

$$q := \frac{1}{\frac{2}{7} + \frac{7}{2}}.$$

Erweitern mit $2 \cdot 7$ (oben und unten!), ausmultiplizieren und addieren ergibt

$$q = \frac{1}{\frac{2}{7} + \frac{7}{2}} = \frac{2 \cdot 7}{\left(\frac{2}{7} + \frac{7}{2}\right) \cdot 2 \cdot 7} = \frac{14}{4 + 49} = \frac{14}{53}.$$

Jeder ausgeführte Schritt ändert nichts am Wert des Bruchs! Weil 53 nicht durch 2 und nicht durch 7 teilbar ist, kann das Ergebnis $\frac{14}{53}$ nicht mehr vereinfacht werden. Folgender Fehler wird gerne gemacht:

$$\frac{1}{\frac{2}{7} + \frac{7}{2}} \stackrel{\text{Ohh}}{=} \frac{7}{2} + \frac{2}{7} = \frac{7 \cdot 7}{2 \cdot 7} + \frac{2 \cdot 2}{7 \cdot 2} = \frac{49 + 4}{2 \cdot 7} = \frac{53}{14} \neq \frac{14}{53}.$$

Frage: Muss q größer als 1 oder kleiner als 1 sein? Wegen $\frac{7}{2} > 1$ und $\frac{2}{7} > 0$ folgt $\frac{2}{7} + \frac{7}{2} > 1$ und damit folgt $q = \left(\frac{2}{7} + \frac{7}{2}\right)^{-1} < 1$. Insbesondere kann $q = \frac{53}{14} > 1$ nicht richtig sein.

Beispiel 3 Vereinfache folgenden Bruch so gut wie möglich

$$\frac{1 + \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{8}}}{\frac{0.1}{\sqrt{\pi}} + \frac{\sqrt{\pi}}{10}}$$

und machen Sie die Probe. Wir verwenden hier 0.1 statt 0,1! Zuerst vereinfachen wir den Bruch und dann entfernen wir den Doppelbruch indem wir oben und unten mit der gleichen geeigneten Zahl multiplizieren, dabei ändert der Bruch seinen Wert nicht.

$$\frac{1 + \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{8}}}{\frac{0.1}{\sqrt{\pi}} + \frac{\sqrt{\pi}}{10}} \Leftrightarrow \frac{1 + \frac{1}{\sqrt{4}}}{\frac{1}{10\sqrt{\pi}} + \frac{\sqrt{\pi}}{10}} \Leftrightarrow \frac{1 + \frac{1}{\sqrt{4}}}{\frac{1}{10\sqrt{\pi}} + \frac{\sqrt{\pi}}{10}} \cdot \frac{\sqrt{4\pi} \cdot 10}{\sqrt{4\pi} \cdot 10} \Leftrightarrow \frac{\sqrt{4\pi} \cdot 10 + \sqrt{\pi} \cdot 10}{\sqrt{4} + \sqrt{4\pi^2}}$$

Jetzt vereinfachen wir den Bruch:

$$\frac{\sqrt{4\pi} \cdot 10 + \sqrt{\pi} \cdot 10}{\sqrt{4} + \sqrt{4\pi^2}} \Leftrightarrow \frac{\sqrt{\pi} \cdot 10 \cdot (2 + 1)}{2(1 + \pi)} \Leftrightarrow \frac{\sqrt{\pi} \cdot 5 \cdot 3}{(1 + \pi)} \Leftrightarrow \frac{15 \cdot \sqrt{\pi}}{(1 + \pi)}.$$

In Summe erhalten wir:

$$\frac{1 + \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{8}}}{\frac{0.1}{\sqrt{\pi}} + \frac{\sqrt{\pi}}{10}} = \frac{15 \cdot \sqrt{\pi}}{(1 + \pi)}.$$

Nun zur Probe. Diese Gleichheit gilt genau dann, wenn

$$\left(1 + \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{8}}\right) \cdot (1 + \pi) = 15 \cdot \sqrt{\pi} \cdot \left(\frac{0.1}{\sqrt{\pi}} + \frac{\sqrt{\pi}}{10}\right)$$

gilt. Dies ist äquivalent zu

$$\left(1 + \frac{1}{2}\right) \cdot (1 + \pi) = 15 \cdot \left(\frac{1}{10} + \frac{\pi}{10}\right)$$

wobei wir $\sqrt{8} = 2\sqrt{2}$, $0.1 = \frac{1}{10}$ und $\sqrt{\pi} \cdot \sqrt{\pi} = \pi$ verwendet haben. Nun multiplizieren wir Links und Rechts mit 10 und erhalten

$$(10 + 5) \cdot (1 + \pi) = 15 \cdot (1 + \pi)$$

was eine wahre Aussage ist. Damit sind wir fertig.

Beispiel 4 *Begeben sind die Funktionen $f(x) := \frac{x + \frac{1}{x}}{x^2 + \frac{1}{x^2}}$ und $g(x) := \frac{1}{f(x)}$. Berechne die Grenzwerte von f und g für $x \rightarrow \infty$ und $x \rightarrow -\infty$. Wir formen den Bruch von f geeignet um und verwenden²*

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} x^n = (\pm)^n \infty \quad \text{und} \quad \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{1}{x^n} = 0 \quad \text{für} \quad n \in \mathbb{N}.$$

Es folgt:

$$f(x) = \frac{x + \frac{1}{x}}{x^2 + \frac{1}{x^2}} \cdot \frac{\frac{1}{x^2}}{\frac{1}{x^2}} = \frac{\frac{1}{x} + \frac{1}{x^3}}{1 + \frac{1}{x^4}} \xrightarrow{x \rightarrow \pm\infty} \frac{0 + 0}{1 + 0} = \frac{0}{1} = 0,$$

wobei die rote Variable x^2 für hinreichend großes x die größte Zahl ergibt. Alle anderen sind kleiner für positives x . Weiters erweiterten wir den Bruch so, dass aus x^2 die Zahl 1 wird und alle anderen Zahlen für wachsendes positives x gegen 0 konvergieren. Für die zweite Funktion gehen wir analog vor:

$$g(x) = \frac{x^2 + \frac{1}{x^2}}{x + \frac{1}{x}} \cdot \frac{\frac{1}{x^2}}{\frac{1}{x^2}} = \frac{1 + \frac{1}{x^4}}{\frac{1}{x} + \frac{1}{x^3}} \xrightarrow{x \rightarrow \pm\infty} \pm\infty \quad \text{salopp gesagt gilt: } \frac{1+0}{\pm(0+0)} = \pm\infty .$$

Diese Methode wird natürlich bei einer Kurvendiskussion benötigt.

Anstatt ein 'letztes' Beispiel vorzurechnen, gibt es ein typisches Testbeispiel für Sie selbst zum Rechnen.

Aufgaben 1 *Berechne und vereinfache folgenden Bruch soweit wie möglich:*

$$\frac{-\frac{7}{3} + \frac{6}{5} + \frac{9}{7}}{-\frac{8}{15} + \frac{8}{21} + \frac{8}{35}} \cdot \left(\frac{6}{4} - \frac{10}{28} - \frac{2}{14}\right).$$

Der Wert dieses Bruches ist 2.

²Anders als in der Schule sei die Menge der natürlichen Zahlen durch $\mathbb{N} := \{1, 2, 3, \dots\}$ gegeben.