1 Das Einfachste über Folgen und Reihen

Wir werden nun den Begriff der Folge definieren, diskutieren und einige Beispiele besprechen. Weiters geben wir einige Aufgaben an die Sie selbst rechnen sollen und vergewissern Sie sich immer, dass alles korrekt ist. Wenn Sie beim Test am Anfang einen Rechen- oder Verständnisfehler machen, dann ist der Rest falsch. Das passiert leider sehr häufig!

Es ist nicht schwierig, aber Sie müssen sich erst daran gewöhnen und ihr neuronales Netzwerk (für Folgen) im Hirn aufbauen.

1.1 Anschauliche Definition und einfache Beispiele

Anschaulich ist ein Folge von Zahlen (in der Mathematik) das was wir umgangssprachlich als 'Folge von Zahlen' bezeichnen also zum Beispiel:

$$1, \quad 3, \quad 5, \quad 7, \quad 9, \quad 11, \quad \ldots$$

was die Folge der ungeraden Zahlen ist. Wir können auch folgendes schreiben:

$$a_0, \quad a_1, \quad a_2, \quad a_3, \quad a_4, \quad a_5, \quad \ldots \qquad \text{wobei} \qquad a_{n+1} := a_n + 2 \text{ mit } a_0 := 1 \text{ gilt.}$$

Genau genommen schreibt man eine Folge g als unendliches 'Tupel', also

$$g := (1, 3, 5, 7, 9, \ldots) \qquad \text{oder noch besser} \qquad g := (2\,n+1)_{n\in\mathbb{N}}\,,$$

wobei $\mathbb{N}$ die Menge der natürlichen Zahlen bezeichnet, also $\{0,\ 1,\ 2,\ 3,\ \ldots\}$. $2\,n+1$ wird auch als g_n geschrieben, wenn g der Name der Folge ist. Also $g_0 = 1$, $g_1 = 3$, $g_2 = 5$, usw. Wir sehen, dass die beiden Folgen

$$g := (2\,n+1)_{n\in\mathbb{N}} \qquad \text{und} \qquad f := (a_n)_{n\in\mathbb{N}}\,,$$

gleich sind also

$$g_n := 2\,n+1 = a_n \qquad \text{für alle natürlichen } n\,.$$

Man schreibt dann einfach $f = g$. Wie sie schon gesehen haben schreibt man für eine Folgen mit Namen h gerne

$$h := (h_n)_{n\in\mathbb{N}} = (h_0, h_1, h_2, h_3, h_4, \ldots)\,.$$

Hier ist h der Name oder die Bezeichnung der Folge und h_k ist das $k-$te Folgenglied.

Die Folge der geraden Zahlen ist gegeben durch

$$0, \quad 2, \quad 4, \quad 6, \quad 8, \quad \ldots \qquad \text{oder genauer} \qquad (2\,n)_{n\in\mathbb{N}}\,.$$

Nun ein etwas komplzierteres Beispiel. Berechne die Folge der Zahlen ψ die durch

$$\psi_{n+1} := \psi_n + n + 1 \qquad \text{mit} \qquad \psi_0 := 0$$

definiert wird. Für $n = 0$ folgt $\psi_1 = \psi_0 + 0 + 1 = 0 + 0 + 1 = 1$, für $n = 1$ folgt $\psi_2 = \psi_1 + 1 + 1 = 1 + 1 + 1 = 3$, für $n = 2$ folgt $\psi_3 = \psi_2 + 1 + 1 = 3 + 2 + 1 = 6$ und für $n = 3$ folgt $\psi_4 = \psi_3 + 3 + 1 = 6 + 3 + 1 = 10$. Schauen Sie sich dies genau an und rechnen dieses Beispiel selbst durch. Mehrfach! Man kann zeigen, das folgendes gilt:

$$\psi_{n+1} = \frac{1}{2}\,(n+2)\,(n+1)\,.$$

Jetzt können Sie die ψ_n auf zwei unterschidliche Arten ausrechnen und so ihre Rechnung kontrollieren. Am besten schreiben Sie sich folgende drei Aufgaben in ein Heft und lösen Sie Sie mit Bleistift immer wieder.

Aufgaben 1 *Berechne die Folge definiert durch* $a_{n+1} := a_n + n + 1$ *mit dem Anfangswert* $a_0 := 0$ *für die natürlichen Zahlen von* $n = 0$ *bis* $n = 10$.

Aufgaben 2 *Berechne die Folge definiert durch* $a_{n+1} := \frac{1}{2}\,(n+2)\,(n+1)$ *für die natürlichen Zahlen von* $n = 0$ *bis* $n = 10$.

Eine Folge ist eigentlich eine Funktion der Form $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, $n \mapsto a_n$. Es gilt also $f(n) = a_n$. Damit gibt es noch folgendes Rechenbeispiel zum Üben!

Aufgaben 3 *Eine Folge* $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ *sei durch die Vorschrift* $f(n+1) := f(n) + n + 1$ *mit* $f(0) = 0$ *für* $n \in \mathbb{N}$ *gegeben. Berechne die Folgenglieder* $f(1)$, $f(2)$ *bis* $f(10)$.

Im obigen Zusammenhang spricht man auch von *Rekursion.* Genauer, die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist *rekursive* definiert und f nennt man eine *rekursive Funktion.* Die jeweiligen *Rekursionen* lauten:

$$a_{n+1} := a_n + n + 1 \qquad \text{mit} \qquad a_0 := 0$$

bzw.

$$f(n+1) := f(n) + n + 1 \qquad \text{mit} \qquad f(0) = 0\,.$$

Besteht eine Folge nur aus endlich vielen Zahlen, dann nennt man sie eine *endliche Folge.* Ein Beispiel einer endlichen Folge ist

$$(5, 7, 9, 11, 13) \qquad \text{also die Folge der ungeraden Zahlen von 5 bis 13}$$

bzw.

$$(2\,n + 3)_{n\in M} \qquad \text{mit} \qquad M := \{1, 2, 3, 4, 5\}\,.$$

Dies entspricht auch der Funktion

$$f : \{1, 2, 3, 4, 5\} \to \mathbb{R},\ x \mapsto 2\,x + 3\,.$$

Bei den obigen Beispielen nennt man $\mathbb{N}$ bzw. $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ die *Indexmenge* der Folge.
Im Folgenden sei nun

$$N := \{1, 2, 3, 4, \ldots\} \qquad \text{also die Menge aller natürlichen Zahlen ohne die Zahl 0.}$$

Folgen können nicht nur $\mathbb{N}$ und $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ als Indexmengen haben sondern auch N. Wir behandeln nun solche Beispiele.

Beispiel 1 *Berechne die ersten* 10 *Folgenglieder der Folge definiert durch*

$$a_n := 2 + 4 + \ldots + 2\,n \qquad \textit{für} \qquad n \in N\,.$$

Für $n = 1$, $n = 2$, *n=3 und* $n = 4$ *folgt*

$$a_1 = 2, \qquad a_2 = 2 + 4 = 6, \qquad a_3 = 2 + 4 + 6 = 12 \quad \textit{und} \quad a_4 = 2 + 4 + 6 + 8 = 20\,.$$

Weiters folgt

$$a_5 = 2 + 4 + 6 + 8 + 10 = 30, \qquad a_6 = 2 + 4 + 6 + 8 + 10 + 12 = 42$$

$$a_7 = 2 + 4 + 6 + 8 + 10 + 12 + 14 = 56, \qquad a_8 = 2 + 4 + 6 + 8 + 10 + 12 + 14 + 16 = 72$$

$$a_9 = 2{+}4{+}6{+}8{+}10{+}12{+}14{+}16{+}18 = 90, \quad \textit{und} \quad a_{10} = 2{+}4{+}6{+}8{+}10{+}12{+}14{+}16{+}18{+}20 = 110\,.$$

Seit der Antike ist ein geometrischer Beweis bekannt, der folgende Formel impliziert:

$$a_n = 2 + 4 + \ldots + 2\,n = n\,(n+1)$$

was sie zur Probe verwenden können. In der Tat folgt damit :

$$a_1 = 2, \qquad a_2 = 6, \qquad a_3 = 12, \qquad a_4 = 20, \qquad a_5 = 30$$

$$a_6 = 42, \qquad a_7 = 56, \qquad a_8 = 72, \qquad a_9 = 90, \qquad a_{10} = 110\,.$$

Und zum Beispiel auch

$$a_{100} = 10100, \qquad a_{973} = 947702 \qquad \textit{und} \qquad a_{1000} = 1001000\,.$$

Aufgaben 4 *Berechne die ersten* 5 *Folgenglieder der Folge definiert durch*

$$b_n := 1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2 \qquad \textit{für} \qquad n \in N\,.$$

Zur Probe verwende die Formel

$$b_n = \frac{1}{6}\,n\,(n+1)\,(2\,n+1) \qquad \textit{für} \qquad n \in N\,.$$

Aufgaben 5 *Berechne die ersten* 5 *Folgenglieder der Folge definiert durch*

$$c_n := 1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + n^3 \qquad \textit{für} \qquad n \in N\,.$$

Zur Probe verwende die Formel

$$c_n = \frac{1}{4}\,n^2\,(n+1)^2 \qquad \textit{für} \qquad n \in N\,.$$

Aufgaben 6 *Berechne die ersten* 5 *Folgenglieder der Folge definiert durch*

$$d_n := 1 + 3 + 5 + \ldots + 2\,n - 1 \qquad \textit{für} \qquad n \in N\,.$$

Zur Probe verwende die Formel

$$d_n = n^2 \qquad \textit{für} \qquad n \in N\,.$$

Aufgaben 7 *Berechne die ersten* 5 *Folgenglieder der Folge definiert durch*

$$e_n := 1^2 + 3^2 + 5^2 + \ldots + (2\,n-1)^2 \qquad \textit{für} \qquad n \in N\,.$$

Zur Probe verwende die Formel

$$e_n = \frac{1}{3}\,n\,(2\,n-1)\,(2\,n+1) \qquad \textit{für} \qquad n \in N\,.$$

1.2 Reihen

Einige Folgen vom vorherigen Abschnitt nennt man Reihen. Wenn eine Folge wie

$$1, \quad 2, \quad 3, \quad 4, \quad \ldots \quad , n, \quad \ldots$$

gegeben ist, dann nennt man die Folge der *Partialsummen*

$$\alpha := (1, \quad 1+2, \quad 1+2+3, \quad 1+2+3+4, \quad \ldots \quad , 1+2+3+\ldots+n, \quad \ldots)$$

eine *Reihe*. Hier ist $1+2+3$ die Partialsumme von $(1,2,3)$ und $1+2+3+\ldots+n$ die Partialsumme von $(1,2,3,\ldots,n)$. Später zeigen wir, dass folgendes gilt

$$\alpha = (1, \quad 3, \quad 6, \quad 10, \quad \ldots \quad , \frac{n\,(n+1)}{2}, \quad \ldots)\,,$$

weil $1+2+3+\ldots+n = \frac{1}{2}\,n\,(n+1)$ gilt.

Es seien a, d, $q \in \mathbb{R}$ mit d, $q \neq 0$. Die zwei bekanntesten (endlichen) Reihen sind die *arithmetische Reihe*

$$(a,\ a+d,\ a+2\,d,\ a+3\,d,\ \ldots,\ a+(n-1)\,d)$$

und die *geometrische Reihe*

$$(1,\ 1+q,\ 1+q+q^2,\ \ldots,\ 1+q+q^2,\ \ldots,\ q^{n-1}) \qquad (\text{Beachte: } q^0 = 1 \text{ falls } q \neq 0 \text{ und } q^1 = q.\ )\,.$$

Die $k-te$ Partialsumme dieser Reihen ist gegeben durch

$$a+(k-1)\,d \qquad \text{bzw.} \qquad 1+q+q^2,\ \ldots,\ q^{k-1}\,.$$

Ein Beispiel für eine arithmetische Reihe erhalten wir für $a=2$, $d=3$ und $n=10$, nämlich

$$(2,\ 2+3\cdot 1,\ 2+3\cdot 2,\ 2+3\cdot 3,\ldots,\ 2+3\cdot 9) \qquad \text{also} \qquad (2,\ 5,\ 8,\ 11,\ \ldots,\ 29)\,.$$

Und ein Beispiel für eine geometische Reihe erhalten wir für $q=\frac{1}{2}$ und $n=10$, nämlich

$$\left(1,\ 1+\frac{1}{2},\ 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4},\ \ldots,\ 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{2^{n-1}}\right) \qquad \text{also} \qquad \left(1,\ \frac{3}{2},\ \frac{7}{4},\ \frac{15}{8},\ \ldots,\ \frac{1023}{512}\right)\,.$$

Wie man zu der Zahl $\frac{1023}{512}$ kommt zeigen wir später.

Beispiel 2 *Zeige, dass*

$$1+2+3+\ldots+n = \frac{n\,(n+1)}{2}$$

gilt. Angeblich soll C. F. Gauß in der Volkschule folgende Lösung entdeckt haben.

$$s := 1+2+3+\ldots+(n-2)+(n-1)+n$$

plus

$$s = n+(n-1)+(n-2)+\ldots+3+2+1$$

ist gleich

$$2\,s = (n+1)+(n+1)+\ldots+(n+1)+(n+1)+(n+1)\,,$$

wobei $(n+1)$ *auf der rechten Seite* $n-$*mal vor kommt. Also gilt* $2\,s = (n+1)\,n$ *und somit folgt*

$$1 + 2 + 3 + \cdots + (n+1) + n =: s = \frac{(n+1)\,n}{2}$$

Für den Fall $n = 100$ *den Gauss angeblich ausrechnen sollte folgt*

$$1+2+3+4+5+6+7+8+9+10+11+12+13+\cdots+98+99+100 = \frac{101 \cdot 100}{2} = 5050$$

mit Hilfe einer einfachen Division $100/2 = 50$ *und der Multiplikation* $101 \cdot 50 = 5050$*. Also sehr viel schneller als alle Zahlen der Reihe nach zu addieren.*

Beispiel 3 *Zeige, dass*

$$1 + q + q^2 + \ldots + q^{n-1} = \frac{1-q^n}{1-q} \qquad \textit{für} \qquad q \neq 0\,.$$

Von

$$s := 1 + q + q^2 + \ldots + q^{n-2} + q^{n-1}$$

subtrahieren *wir*

$$s \cdot q := q + q^2 + q^3 + \ldots + q^{n-1} + q^n$$

und erhalten

$$s - s \cdot q = 1 - q^n \qquad \textit{also} \qquad (1-q)\,s = 1 - q^n\,.$$

Daraus folgt aber sofort die Behauptung

$$1 + q + q^2 + \ldots + q^{n-1} =: s = \frac{1-q^n}{1-q}\,.$$

Nun was haben wir in diesem Abschnitt ausgelassen? Die Definition der Konvergenz (und Divergenz) von Folgen wie zum Beispiel

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0, \qquad \lim_{n\to\infty} \frac{1252}{n^2} = 0, \qquad \lim_{n\to\infty} \frac{\pi}{\sqrt{n}} = 0 \qquad \text{oder} \qquad \lim_{n\to\infty} \frac{n-1}{n} = 1\,.$$

Oder wie ist eine Summe aus unendlich vielen Zahlen definiert, sodass man zeigen kann, dass

$$\lim_{n\to\infty} \left[1 + q + q^2 + \ldots + q^{n-1}\right] = \lim_{n\to\infty} \frac{1-q^n}{1-q} = \frac{1}{1-q} \qquad \text{falls} \qquad |q| < 1\,.$$

Ziel dieses Abschnittes ist, dass Sie einfache Folgen (und ihre Darstellungen) verstehen und ausrechnen können. Suchen Sie sich nette Beispiele zusammen, die Sie in ein Heft schreiben und des öfteren lösen ohne einen einzigen Fehler zu machen! Wenn Sie elektronischen Zugang zur Unibibliothek haben, können Sie sich die 'Mathematischen Formelsammlung' von Lothar Paula (und andere Bücher von ihm) als pdf-File runterladen. Dort finden Sie (unter anderem) mehr über Folgen und Reihen.