Konvexitätsbegriffe

Es gibt die übliche Konvexität von Mengen oder Funktionen: Eine Menge A in einem reellen Vektorraum heißt konvex, wenn für alle $x, y \in A$ und alle $t \in [0,1]$ gilt, dass $t\,x + (1-t)\,y \in A$ ist. Ebenso definiert man die Konvexität von reellwertigen Funktionen f auf einer konvexen Menge A, dass für alle $x, y \in A$ und alle $t \in [0,1]$ die Ungleichung $f(t\,x + (1-t)\,y) \leq t\,f(x) + (1-t)\,f(y)$ gelten soll.

Diese Bedingungen kann man nun abschwächen oder verschärfen, und dazu den Vergleich mit der ursprünglichen Definition anstellen:

- Wir betrachten nur das <u>offene</u> Intervall $]0,1[$ (statt $[0,1]$).
- Wir betrachten nur <u>rationale</u> Werte $t \in [0,1]$.
- Wir betrachten nur <u>einen</u> Wert $t_0 \in]0,1[$, zum Beispiel $t_0 = \frac{1}{2}$.
- Wir betrachten an Stelle der Funktion f die obere oder untere Menge, also $\{(x,z) \in A \times \mathbb{R} \mid z > f(x)\}$ oder $\{(x,z) \in A \times \mathbb{R} \mid z < f(x)\}$.
- Wir verschärfen die Ungleichung für konvexe Funktionen zu $f(t\,x + (1-t)\,y) \leq t\,f(x) + (1-t)\,f(y) - c\,t\,(1-t)\,\|x-y\|^2$ für ein $c > 0$ (“starke Konvexität”).
- Wir ersetzen die Affinkombination $t\,f(x) + (1-t)\,f(y)$ auf der rechten Seite (also eine Gerade durch die Punkte $(x, f(x))$ und $y, f(y)))$ durch eine Funktion h aus einer genügend großen Familie $\mathcal{H}$ (welche auch durch die beiden Punkte $(x, f(x))$ und $(y, f(y))$ festgelegt ist) – Beckenbach-Konvexität.