Beispiel (20 Punkte)

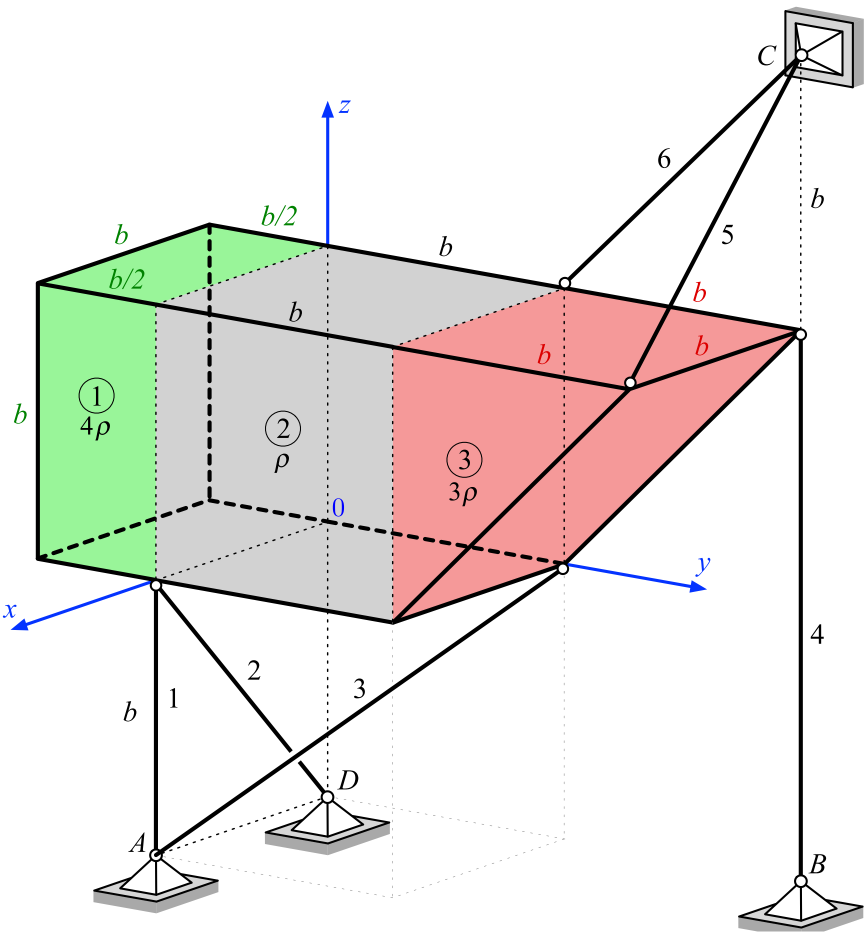
Gegeben:

Statisch bestimmt gelagertes System lt. Skizze (Längenmaß: b), bestehend aus

- einem gewichtsbehafteten, inhomogenen Körper, der sich aus einem Quader (Bereich 1 mit der Dichte 4ρ), einem Würfel (Bereich 2 mit der Dichte ρ) und einem dreiseitigen, gleichschenkligen, rechtwinkligen Prisma (Bereich 3 mit der Dichte 3ρ) zusammensetzt, sowie
- sechs starren masselosen Pendelstützen.

Gesucht:

1. Überprüfung der statischen Bestimmtheit der Lagerung
2. Gewichtskräfte $\vec{G}_1$ (Quader, „1“), $\vec{G}_2$ (Würfel, „2“) und $\vec{G}_3$ (dreiseitiges Prisma, „3“) sowie die Lage ihrer Angriffspunkte $\vec{r}_1$, $\vec{r}_2$ und $\vec{r}_3$ bezüglich 0
3. Gewichtskraft $\vec{G}$ des Gesamtsystems sowie die Lage des Angriffspunktes $\vec{r}_G$ bezüglich 0
4. Reduktion von $\vec{G}$ in den Punkt 0
5. Aufstellen der Gleichgewichtsbedingungen zur Ermittlung der Stabkräfte in den Pendelstützen
6. Stabkräfte $\vec{S}_1$ bis $\vec{S}_6$
7. Auflagerreaktion in C



Lösungen zum Beispiel

1. Überprüfung der statischen Bestimmtheit der Lagerung

$$f = 6n_1 + 5n_2 - r - \nu = 0 \quad \text{mit:} \quad n_1 = 1\;,\; n_2 = 6\;,\; r = 12 \;\text{und}\; \nu = 24$$

2. Gewichtskräfte der Quader und Lage ihrer Angriffspunkte

$$\vec{G}_1 = -2\rho g b^3\,\vec{e}_z \quad , \quad \vec{r}_{g1} = \begin{Bmatrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} \end{Bmatrix} b \qquad , \qquad \vec{G}_2 = -\rho g b^3\,\vec{e}_z \quad , \quad \vec{r}_{g2} = \begin{Bmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{Bmatrix} a$$

$$\vec{G}_3 = -\frac{3}{2}\rho g b^3\,\vec{e}_z \quad , \quad \vec{r}_{g3} = \begin{Bmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{4}{3} \\ \frac{2}{3} \end{Bmatrix} b$$

3. Gewichtskraft des Gesamtsystems und Lage des Angriffspunktes

$$\vec{G} = -\underbrace{\frac{9}{2}\rho g b^3}_{G}\,\vec{e}_z \quad , \quad \vec{r}_g = \begin{Bmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{4}{9} \\ \frac{5}{9} \end{Bmatrix} b$$

4. Reduktion der Gesamtbelastung in den Punkt 0

$$\vec{R} = -G\,\vec{e}_z \quad , \quad \vec{M}^{(0)} = \begin{Bmatrix} -\frac{4}{9} \\ \frac{1}{2} \\ 0 \end{Bmatrix} G b$$

5. Aufstellen der Gleichgewichtsbedingungen

$$\begin{aligned}
\text{(I)}\quad & 0 = -\tfrac{1}{\sqrt{2}}S_2 + \tfrac{1}{\sqrt{3}}S_3 - \tfrac{1}{\sqrt{2}}S_5 \\
\text{(II)}\quad & 0 = -\tfrac{1}{\sqrt{3}}S_3 + \tfrac{1}{\sqrt{2}}S_6 \\
\text{(III)}\quad & 0 = -S_1 - \tfrac{1}{\sqrt{2}}S_2 - \tfrac{1}{\sqrt{3}}S_3 - S_4 + \tfrac{1}{\sqrt{2}}S_5 + \tfrac{1}{\sqrt{2}}S_6 - G \\
\text{(IV)}\quad & 0 = -\tfrac{1}{\sqrt{3}}S_3 b - 2S_4 b + \sqrt{2}S_5 b - \tfrac{4}{9}G b
\end{aligned}$$

$$\text{(V)}\quad 0 = S_1 b + \tfrac{1}{\sqrt{2}} S_2 b - \sqrt{2} S_5 b + \tfrac{1}{2} G b$$
$$\text{(VI)}\quad 0 = -\tfrac{1}{\sqrt{3}} S_3 b + \sqrt{2} S_5 b$$

	X_i	Y_i	Z_i	x_i	y_i	z_i	M_{ix}	M_{iy}	M_{iz}
$\vec{G}$	0	0	$-G$	$\frac{1}{2}b$	$\frac{4}{9}b$	$\frac{5}{9}b$	$-\frac{4}{9}Gb$	$\frac{1}{2}Gb$	0
$\vec{S}_1$	0	0	$-S_1$	b	0	0	0	$S_1 b$	0
$\vec{S}_2$	$-\frac{S_2}{\sqrt{2}}$	0	$-\frac{S_2}{\sqrt{2}}$	b	0	0	0	$\frac{S_2}{\sqrt{2}}b$	0
$\vec{S}_3$	$\frac{S_3}{\sqrt{3}}$	$-\frac{S_3}{\sqrt{3}}$	$-\frac{S_3}{\sqrt{3}}$	0	b	0	$-\frac{S_3}{\sqrt{3}}b$	0	$-\frac{S_3}{\sqrt{3}}b$
$\vec{S}_4$	0	0	$-S_4$	0	$2b$	b	$-2S_4 b$	0	0
$\vec{S}_5$	$-\frac{S_5}{\sqrt{2}}$	0	$\frac{S_5}{\sqrt{2}}$	b	$2b$	b	$\sqrt{2}S_5 b$	$-\sqrt{2}S_5 b$	$\sqrt{2}S_5 b$
$\vec{S}_6$	0	$\frac{S_6}{\sqrt{2}}$	$\frac{S_6}{\sqrt{2}}$	0	b	b	0	0	0

6. Stabkräfte

$$\vec{S}_1 = \frac{7}{9}G\,\vec{e}_z \qquad \vec{S}_2 = \frac{5}{18}G\,(\vec{e}_x + \vec{e}_z) \qquad \vec{S}_3 = \frac{5}{9}G\,(-\vec{e}_x + \vec{e}_y + \vec{e}_z)$$
$$\vec{S}_4 = \frac{2}{9}G\,\vec{e}_z \qquad \vec{S}_5 = \frac{5}{18}G\,(\vec{e}_x - \vec{e}_z) \qquad \vec{S}_6 = \frac{5}{9}G\,(-\vec{e}_y - \vec{e}_z)$$

7. Auflagerreaktion

$$\vec{C} = \begin{Bmatrix} \frac{5}{18} \\ -\frac{5}{9} \\ -\frac{5}{6} \end{Bmatrix} G$$