1 Zeichnen von Graphen einfacher Funktionen

Im Folgenden behandeln wir wie die Graph von einfachen Funktionen dargestellt werden. In anderen Worten, wie man eine Skizze von einer Funktion macht. Wir behandeln dabei nur Funktionen die $D \subseteq \mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$ abbilden.

Ziel. Kennenlernen, verstehen und skizzieren von

- linearen Funktionen,
- affinen Funktionen,
- quadratischen Funktionen,
- Polynomfunktionen und
- rationalen Funktionen.

Als auch die Berechnung von einfachen Grenzwerten, einschließlich Polen von Funktionen. Die Definition und Berechnung von Asymptoten und Extremstellen (Maxima Minima, Wendepunkte oder Sattelpunkte) werden hier nicht im Detail behandelt. (Siehe zum Beispiel Wiki oder ein gutes Schulbuch. Eine Formelsammlung von Lothar Papula gibt es in der Studienbibliothek zum kostenlosen Download.)

1.1 Lineare Funktionen

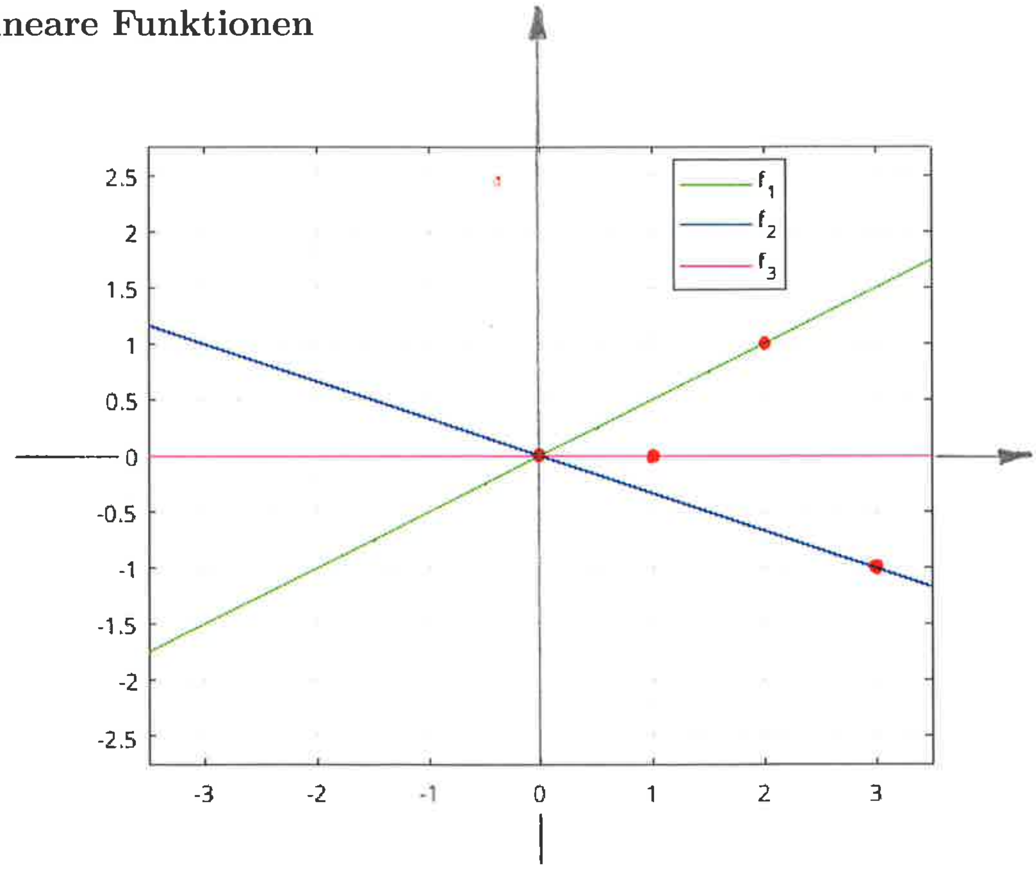

Figure 1: Die Graphen von drei linearen Funktionen.

Eine lineare Funktion is definiert durch

$$f(x) := a\,x \quad \text{für} \quad x \in \mathbb{R} \qquad\qquad \text{wobei } a \in \mathbb{R} \text{ gegeben ist.}$$

Dafür schreibt man auch kürzer $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto a\,x$. Die Graphen der drei Funktionen definiert durch

$$f_1(x) := \frac{x}{2}\,, \qquad f_2(x) := -\frac{1}{4}\,x \qquad \text{und} \qquad f_3(x) := 0$$

sind in Abbildung 1 dargestellt.

Info 1. Eine Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ nennt man *linear*, wenn $f(\alpha\,x + \beta y) = \alpha\,f(x) + \beta\,f(y)$ für alle α, β, x, $y \in \mathbb{R}$ gilt. (Überlegen Sie sich als Übung, dass f_1, f_2 und f_3 tatsächlich linear sind.)

Info 2. Um den Graphen einer linearen Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ zu zeichnen benötigt man nur zwei Punkte. (Bei f_1 kann man z.B. die Punkte $(0, 0)$ und $(2, 1)$ nehmen.)

1.2 Affine Funktionen

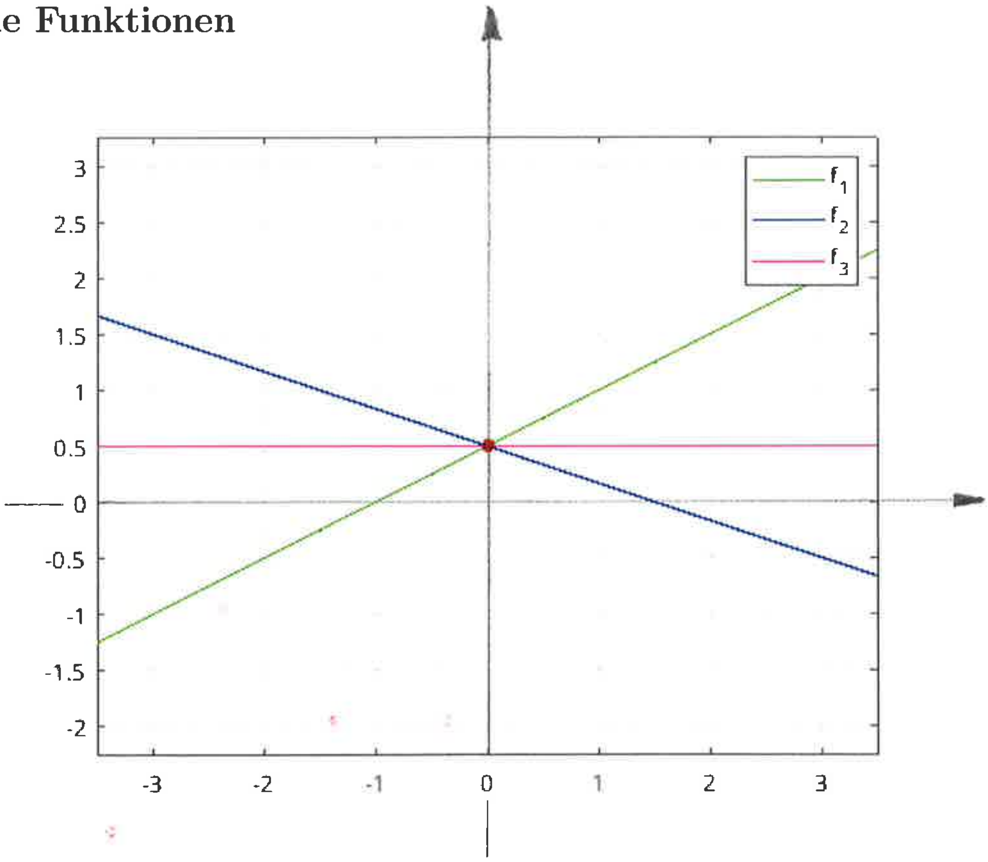

Figure 2: Die Graphen von drei affinen Funktionen.

Eine affine Funktion is definiert durch

$$f(x) := a\,x + b \quad \text{für} \quad x \in \mathbb{R} \qquad\qquad \text{wobei } a, b \in \mathbb{R} \text{ gegeben sind.}$$

Dafür schreibt man auch kürzer $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto a\,x + b$. Eine Funktion f is affine, genau dann, wenn die Funktion $g := f - f(0)$ linear ist (also $g(x) = f(x) - f(0)$). Die Graphen der drei Funktionen definiert durch

$$f_1(x) := \frac{x}{2} + 0.5\,, \qquad f_2(x) := -\frac{1}{4}\,x - 0.5 \qquad \text{und} \qquad f_3(x) := 0.5$$

sind in Abbildung 2 dargestellt.

Info 3. Ist $b = 0$, dann ist f auch eine lineare Funktion. (In der Schule und 'Techniker' nennen oft affine Funktionen einfach linear!)

Info 4. Der Graph der affinen Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto a\,x + b$ geht durch den Punkt $(0, b)$ (warum?). Ist $b = 0$ (f linear), so geht er durch den *Nullpunkt* $(0, 0)$.

1.3 Quadratische Funktionen

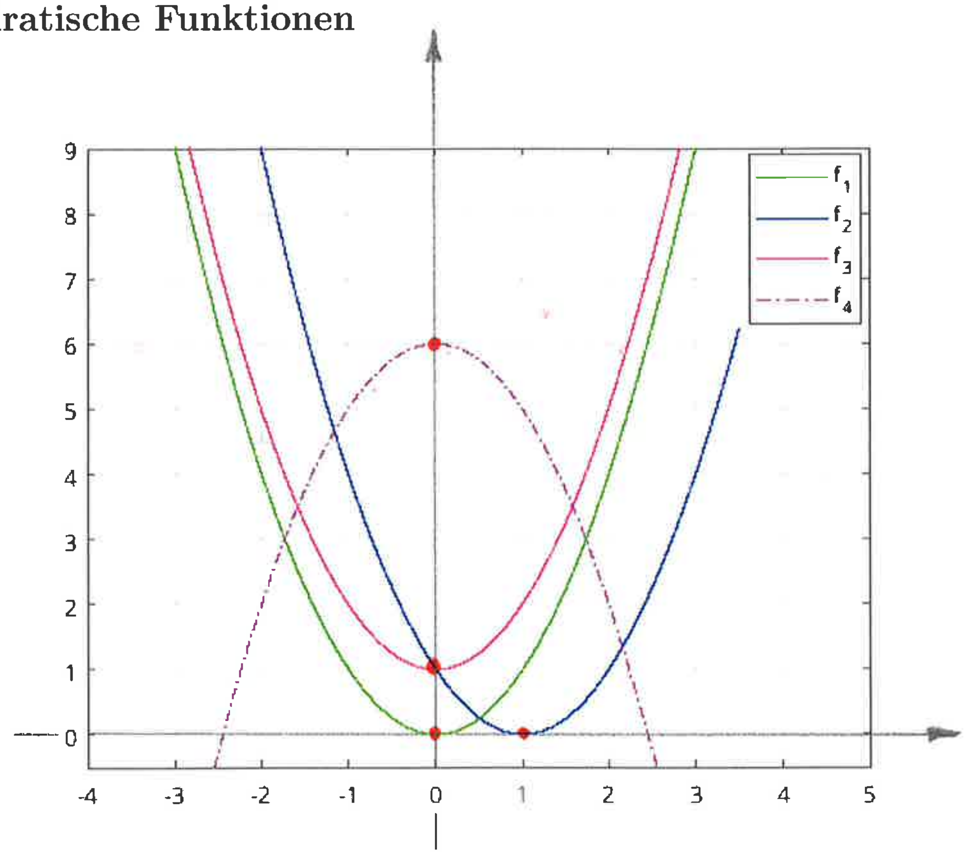

Figure 3: Die Graphen von vier quadratischen Funktionen.

Eine quadratische Funktion is definiert durch

$$f(x) := a\,x^2 + b\,x + c \quad \text{für} \quad x \in \mathbb{R} \qquad \text{wobei } a,\, b,\, c \in \mathbb{R} \text{ mit } a \neq 0 \text{ gegeben sind.}$$

Dafür schreibt man auch kürzer $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto a\,x^2 + b\,x + c$. Die Graphen der vier Funktionen definiert durch

$$f_1(x) := x^2\,, \qquad f_2(z) := (x-1)^2 = x^2 - 2\,x + 1\,, \qquad f_3(x) := x^2 + 1 \qquad \text{und} \qquad f_4(x) := -x^2 + 6$$

sind in Abbildung 3 dargestellt.

Info 5. Eine quadratische Funktion $f(x) := a\,x^2 + b\,x + c$ ist nach oben offen falls $a > 0$ ist und nach unten offen, falls $a < 0$ ist. (Wir haben $f'(x) = 2\,a\,x + b$ und $f''(x) = 2\,a$. $f'(y) = 2\,a\,y + b = 0$ mit $f''(y) = 2\,a$ impliziert ein Maximum bei $y = -\frac{b}{2\,a}$ falls $a > 0$ und ein Minimum bei y falls $a > 0$.

Info 6. Bei einer quadratischen Funktion $f(x) := a\,(x-b)^2 + c$ nennt den Punkt (b,c) den *Scheitel(punkt)*. Diese Form kann man immer erreichen in dem man *quadratisch ergänzt.*[1] (Was zeichnet den Scheitelpunkt aus? Hinweis: $f'(y) = 2\,a\,(y-b) = 0$ impliziert $y = b$ und $f(y) = c$. Wegen $f''(y) = 2\,a \neq 0$ ist damit der Scheitel ein ... oder ...)

1.4 Polynomfunktionen

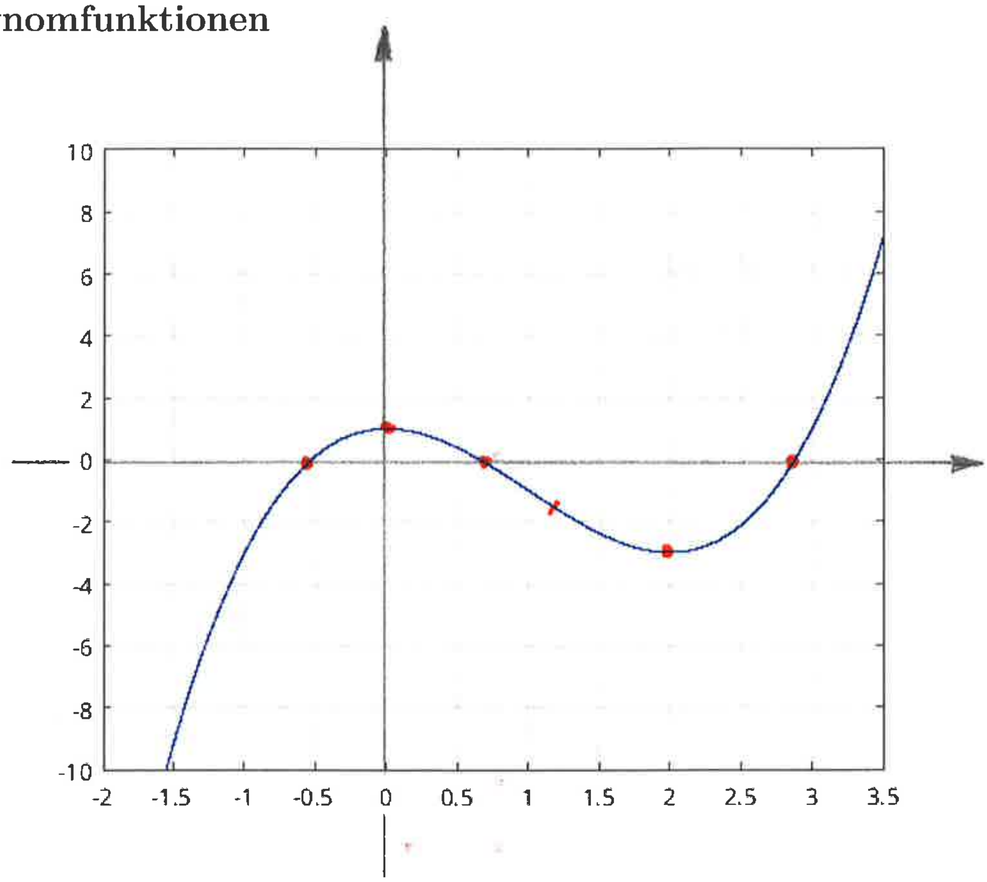

Figure 4: Der Graph einer Polynomfunktion (vom Grad 3).

Eine (reelle) Polynomfunktion (kurz Polynom) is definiert durch

$$f(x) := a_0 + a_1\,x + a_2\,x^2 + \cdots + a_n\,x^n \quad \text{für} \quad x \in \mathbb{R} \qquad \text{wobei } a_j \in \mathbb{R} \text{ mit } a_n \neq 0 \text{ gegeben sind.}$$

Dafür schreibt man auch kürzer $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \sum_{j=0}^{n} a_j\,x^j$. Der Graph der Polyfunktion definiert durch

$$f_1(x) := x^3 - 3\,x^2 + 1$$

ist in Abbildung 4 dargestellt.

Info 7. Lineare, affine und quadratische Funktionen sind die einfachsten Polynomfunktionen. Die einfachste ist die Nullfunktion, welche durch $g(x) := 0$ für $x \in \mathbb{R}$ definiert ist.

Info 8. Man nennt die Zahl n den Grad der Polynomfunktion. Eine (reelle) Polynomfunktion vom Grad n hat maximal n reelle Nullstellen (und genau n komplexe Nullstellen).

[1] Die Lösungsmenge einer quadratische Gleichung kann immer durch quadratische Ergänzung bestimmt werden.

Info 9. Da eine (reelle) Polynomfunktion nur endlich viele Nullstellen haben kann, ist es nicht möglich, das eine Polynomfunktion auf einem Intervall ($\neq$ leere Menge) überall konstant ist. (Dies gilt auch für rationale Funktionen wie zum Beispiel $\frac{x^3}{x^4-4x}$.)

Info 10. Für eine (reelle) Polynomfunktion f gilt immer

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty \text{ oder } -\infty \qquad \text{und} \qquad \lim_{x\to-\infty} f(x) = \infty \text{ oder } -\infty\,.$$

Beispiel 1 *Gegeben ist* $g(x) := 4-(x-3)^2$. *Berechne den Grenzwert* $\lim_{x\to-\infty} g(x)$. *Wegen*

$$g(x) := 4-(x-3)^2 = 4-(x^2-6\,x+9) = -x^2+6\,x-5$$

folgt

$$\lim_{x\to-\infty} g(x) = \lim_{x\to-\infty} (-x^2+6\,x-5) \stackrel{!}{=} \lim_{x\to-\infty} -x^2 = -\infty\,.$$

Hier haben wir verwendet, dass $|6\,x|$ *und* $|-5|$ *kleiner sind als* $|x^2|$ *für* $x\to-\infty$. *(Zum Beispiel,*

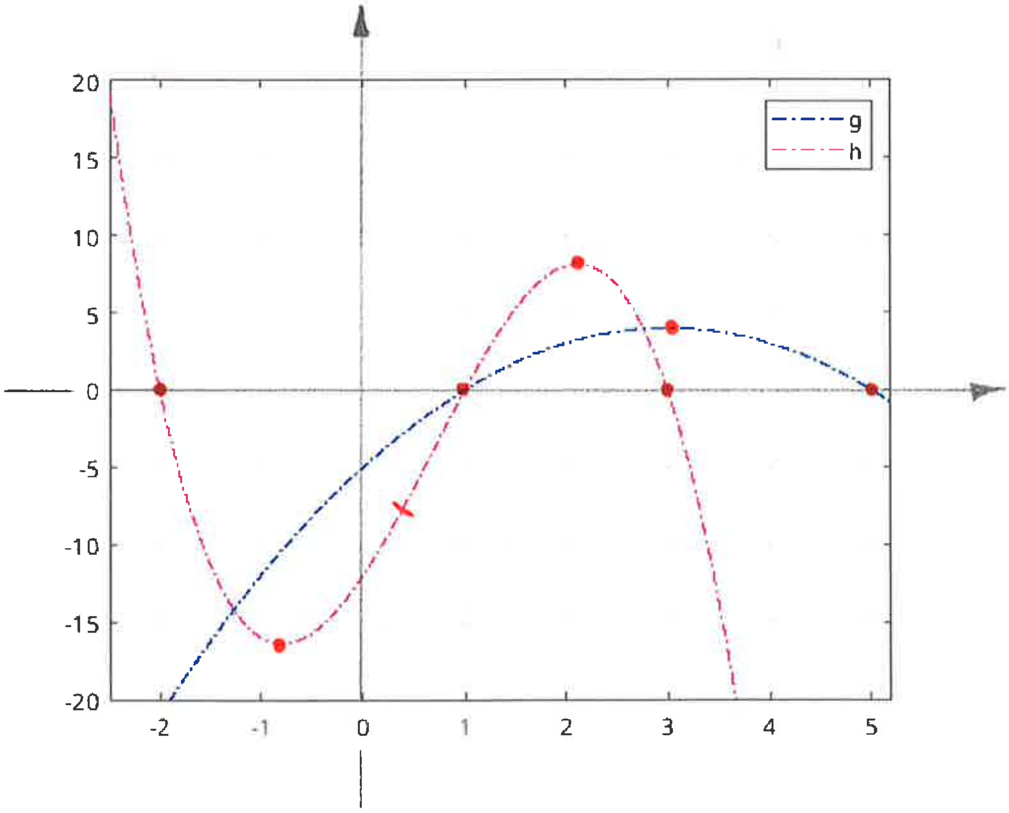

Figure 5: Die Graphen der Funktionen g und h aus den Beispielen 1 und 2.

$|6\,x| < |x\,x|$ *falls* $x>6$ *und* $|-5| < |x^2|$ *falls* $x>3$.*) Analog folgt*

$$\lim_{x\to\infty} g(x) = \lim_{x\to\infty} (-x^2+6\,x-5) \stackrel{!}{=} \lim_{x\to\infty} -x^2 = -\infty\,.$$

Wegen

$$0 = f(x) = 4-(x-3)^2 \quad\Rightarrow\quad (x-3)^2 = 4 \quad\Rightarrow\quad x-3 = \pm 2 \quad\Rightarrow\quad x = 3\pm 2$$

liegen die Nullstellen liegen bei $x_1 = 5$ *und* $x_2 = 1$. *Für dieses Beispiel haben wir*

$$g(x) = -(x-5)\,(x-1) \qquad\equiv\qquad a\,(x-x_1)\,(x-x_2)\,.$$

Beachten Sie, dass a *nicht immer* 1 *oder* -1 *ist! Der Graph von* g *ist in Abbildung 5 dargestellt.*

Aufgaben 1 *Zeichne den Graphen der Polynomfunktion* $h(x) := -2\,(x-3)\,(x+2)\,(x-1)$. *Bestimmen Sie zuerst die Nullstellen von* h *und die zwei Grenzwerte* $\lim_{x\to\infty} h(x)$, $\lim_{x\to-\infty} h(x)$. *Der Graph ist in Abbildung 5 dargestellt.*

Aufgaben 2 *Berechnen Sie die Maxima und Minima der Funktion* h *in Aufgabe 1. Gibt es einen Wendepunkt? Wenn ja wo liegt er?*

1.5 Rationale Funktionen

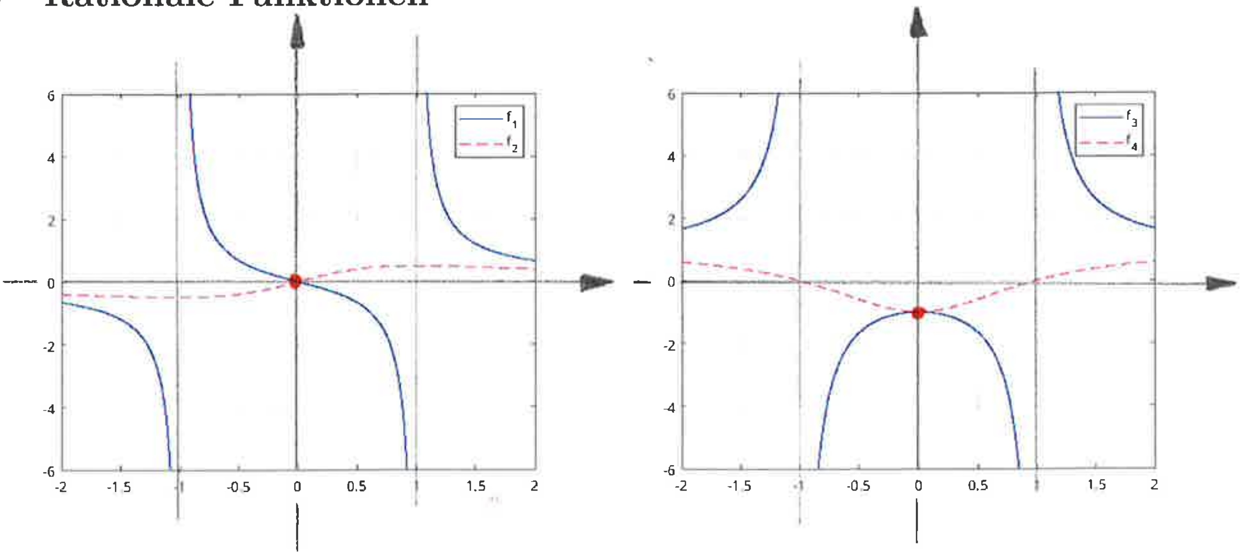

Figure 6: Die Graphen der rationalen Funktionen f_1, f_2, f_3 und f_4. f_1 und f_3 haben Pole bei $x=-1$ und $x=1$, während f_2 und f_4 beschränkt sind mit $\lim_{x\to\infty} f_2(x) = \lim_{x\to-\infty} f_2(x) = 0$ und $\lim_{x\to\infty} f_4(x) = \lim_{x\to-\infty} f_4(x) = 1$.

Eine rationale Funktion f is definiert als der Quotient $\frac{g}{h}$ von zwei Polynomfunktionen g und h, wobei h nicht die Nullfunktion ist. Dafür schreibt man auch kürzer $f : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \frac{\sum_{j=0}^m a_j\,x^j}{\sum_{j=0}^n b_j\,x^j}$, wobei D aus allen reellen Zahlen ohne die Nullstellen von $\sum_{j=0}^n b_j\,x^j$ besteht. Die Graphen der vier rationalen Funktionen definiert durch

$$f_1(x) := \frac{x}{x^2-1}\,, \qquad f_2(x) := \frac{x}{x^2+1}\,, \qquad f_3(x) := \frac{x^2+1}{x^2-1} \qquad \text{und} \qquad f_4(x) := \frac{x^2-1}{x^2+1}$$

sind in Abbildung 6 dargestellt. Beachte, dass f_1 und f_3 bei $x_1=-1$ und $x_2=1$ nicht definiert sind, dort befindet sich jeweils ein Pol. Also $D_1 = D_3 = \mathbb{R}\backslash\{-1,1\}$. Dies folgt aus

$$x^2-1=0 \quad\Leftrightarrow\quad x^2=1 \quad\Leftrightarrow\quad x_{1,2}=\pm 1.$$

Die Graphen der rationalen Funktionen f_1, f_2, f_3 und f_4 sind in Abbildung 6 dargestellt. f_1 hat Pole bei -1 und 1 und für f_2 haben wir folgende Grenzwerte $\lim_{x\to\infty} f_2(x) = 0$ und $\lim_{x\to-\infty} f_2(x) = 0$. In der Tat gilt zum Beispiel:

$$\lim_{x\to\infty} f_2(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{x}{x^2+1} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{\frac{x^2+1}{x}} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{x+\frac{1}{x}} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} = 0\,.$$

Weiters folgt:

$$\lim_{x\to\pm\infty} f_4(x) = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^2-1}{x^2+1} \overset{!}{=} \lim_{x\to\pm\infty} \frac{1-\frac{1}{x^2}}{1+\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{1}{1} = 1$$

und nun zur Beschränktheit von f_4:

$$|f_4(x)| = \left|\frac{x^2-1}{x^2+1}\right| = \frac{|1-\frac{1}{x^2}|}{|1+\frac{1}{x^2}|} \stackrel{!}{\leq} \frac{1}{|1+\frac{1}{x^2}|} \stackrel{!}{\leq} \frac{1}{1} = 1\,.$$

Vergessen Sie beispielsweise nicht den Grenzwert

$$\lim_{x\to -1, x>-1} f_1(x) = \lim_{x\to -1, x>-1} \frac{x}{x^2-1} \stackrel{!}{=} \lim_{x\to -1, x>-1} \frac{1}{x-\frac{1}{x}} \stackrel{!}{=} \lim_{y\to 0, y<0} \frac{1}{y} = \infty\,.$$

Schauen Sie sich als Aufgabe alle anderen Grenzwerte der Funktionen auch noch an!

Achtung. In den reellen Zahlen gilt folgendes: $\sqrt{1} = 1$ aber auch $\left(\pm\sqrt{1}\right)^2 = 1$. $\sqrt{a}$ ist immer die positive Wurzel von $a \geq 0$. **Deshalb sollte man niemals die Wurzel aus einer Gleichung ziehen**, denn es ist dann 'nur' die positive Wurzel. Besser ist es sich zu merken:

$$x^2 = a \quad \Leftrightarrow \quad x = \pm\sqrt{a} \qquad \text{sowie} \qquad x^3 = b \quad \Leftrightarrow \quad x = \sqrt{b} \stackrel{!}{=} \frac{b}{|b|}\sqrt{|b|}\,,$$

falls $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a \geq 0$. (Hier bedeutet $\frac{b}{|b|}$ nichts anderes als das Vorzeichen von b.) Ist b negativ, dann gilt $\sqrt{b} = -\sqrt{|b|}$. (Zum Beispiel: $\sqrt{-9} = -\sqrt{9} = -3$). Merken Sie sich auch noch

$$1^2 = 1\cdot 1 = 1\,, \qquad (-1)^2 = (-1)\,(-1) = 1 \qquad \text{sowie} \qquad (-1)^3 = (-1)\,(-1)\,(-1) = (-1)\,.$$

Aufgaben 3 *Geben Sie die Lösungsmengen der Gleichungen*

$$x^4 = +1\,, \qquad x^5 = +1\,, \qquad x^4 = -1\,, \qquad x^5 = -1 \qquad \text{und} \qquad \frac{1}{x^7} = -1$$

in den reellen Zahlen an. Machen Sie die Probe!

Aufgaben 4 *Berechnen Sie die Maxima und Minima der Funktion f_1 in Aufgabe 1. Gibt es einen Wendepunkt? Wenn ja wo liegt er?*

Aufgaben 5 *Berechnen Sie die Maxima und Minima der Funktion f_4 in Aufgabe 1. Gibt es einen Wendepunkt?*

Beispiel 2 *Führe eine Kurvendiskussion für die Funktion $f : D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiert durch $f(x) := x^2\,(x-1)$ durch. $D = ?$*
Lösung. *f ist eine Polynomfunktion und deshalb auf allen reellen Zahlen definiert, i.e. $D = \mathbb{R}$.*
Nullstellen: *$f(x) = x^2\,(x-1)$ impliziert $x_1 = 0$ und $x_2 = 1$.*
Beachte, dass $x_1 = 0$ eine doppelte Nullstelle ist!
Spezielle Grenzwerte: *$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty}(x^3 - x^2) \stackrel{!}{=} \lim_{x\to\infty} x^3 = \infty$ und $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty}(x^3 - x^2) \stackrel{!}{=} \lim_{x\to-\infty} x^3 = -\infty$.*
Maxima / Minima: *$f(x) = x^3 - x^2$ impliziert $f'(x) = 3\,x^2 - 2\,x = x\,(3\,x-2)$ und $f''(x) = 6\,x - 2$. Also liegen bei $y_1 := 0$ und $y_2 := \frac{2}{3}$ Extremstellen ($y\,(3\,y-2) = 0$). Wegen $f''(y_1) = -2 < 0$ liegt bei $y_1 = 0$ ein Maximum und wegen $f''(y_2) = 6\,\frac{2}{3} - 2 = 2 > 0$ liegt bei $y_2 := \frac{2}{3}$ ein Minimum.*
Wendepunkte: *Die Bedingung für einen Wendepunkt in z lautet*

$$f''(z) = 0 \qquad \text{und} \qquad f'''(z) \neq 0\,.$$

Aus $0 = f''(z) = 6\,z - 2$ folgt $z = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$. Wegen $f'''(x) = 6$ folgt $f'''(z) \neq 0$, i.e. bei $z = \frac{1}{3}$ liegt ein Wendepunkt. Beachte

$$x_1 = y_1 = 0 \quad < \quad z = \frac{1}{2} \quad < \quad y_2 = \frac{2}{3} \quad < \quad x_2 = 1\,.$$

Der Graph der Funktion f ist in Abbildung 7 dargestellt.

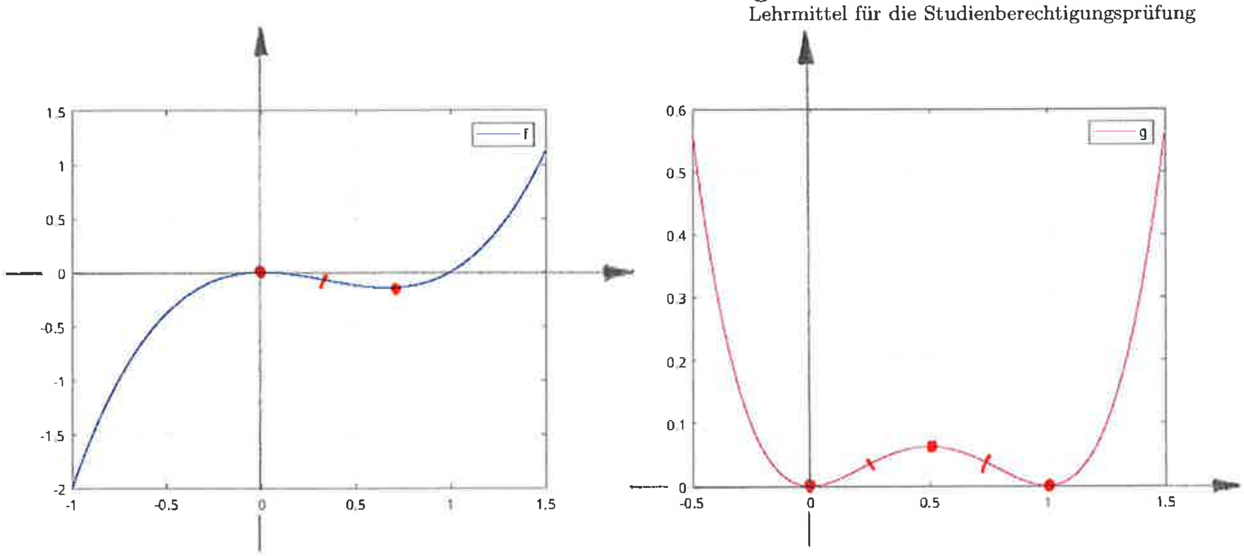

Figure 7: Die Graphen der Polynomfunktionen f (aus Beispiel 2) und g (aus Aufgabe 6).

Aufgaben 6 *Führe eine Kurvendiskussion für die Funktion* $g : D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *definiert durch* $g(x) := x^2\,(x-1)^2$ *durch.* $D =?$. *(Der Graph der Funktion* g *ist in Abbildung 6 dargestellt.)*

Zum Abschluss noch eine wichtige Bemerkung.

Bemerkung 1 *Funktionen sind* das Um und Auf *in der Wissenschaft. In der Naturwissenschaft sind Funktionen die Lösungen von Problemen (Gleichungen). Also nicht wie in der Schule, einfach nur eine reelle oder komplexe Zahl. Denken Sie zum Beispiel an den Wasserspiegel einer Region, die Schadstoffkonzentration, Temperaturverteilung oder Luftfeuchtigkeit in der Luft und die elektromagnetische Absorptionsfunktion im menschlichen Gewebe (welches eine Zyste oder einen Tumor darstellen kann). Oder an den zeitlichen Verlauf einer Aktie (oder sogar aller Aktien). Deshalb ist es wichtig zumindest ein grundsätzliches Verständnis von Funktionen und ihre Visualisierung zu haben.*