

SATZ DES PYTHAGORAS
EIN FUNDAMENTALER SATZ DER EUKLIDISCHEN
GEOMETRIE

Diplomarbeit in der Studienrichtung
Lehramtsstudium Mathematik-Biologie und Umweltkunde

zur Erlangung des akademischen Grades
Magistra der Naturwissenschaften

eingereicht an der

**Fakultät für Mathematik, Informatik und Physik
der Universität Innsbruck**

von

SARA TIRLER

Betreuer der Diplomarbeit:
Univ.-Prof. Dr. Tim Netzer
Institut für Mathematik

Innsbruck, 15.03.2019

„Es ist nicht das Wissen, sondern das Lernen, es ist nicht das Besitzen, sondern das Erwerben, es ist nicht das Dasein, sondern das Hinkommen, was den großen Genuss gewährt.“

Carl Friedrich Gauß (1777-1855)

Eidesstattliche Erklärung

Ich erkläre hiermit an Eides statt durch meine eigenhändige Unterschrift, dass ich die vorliegende Arbeit selbstständig verfasst und keine anderen die angegebenen Quellen und Hilfsmittel verwendet habe. Alle Stellen, die wörtlich oder inhaltlich den angegebenen Quellen entnommen wurden, sind als solche kenntlich gemacht.

Die vorliegende Arbeit wurde bisher in gleicher oder ähnlicher Form noch nicht als Magister-/Master-/Diplomarbeit/Dissertation eingereicht.

Datum

Unterschrift

Danksagung

An dieser Stelle möchte ich mich bei meinem Betreuer, Herrn Univ.-Prof. Dr. Tim Netzer, für seine Hilfe bedanken. Seine Unterstützung trug maßgeblich am Gelingen der Arbeit bei und durch seine freundliche Art wurde das Verfassen dieser Diplomarbeit zu einer angenehmen Aufgabe. Ein besonderer Dank gilt auch meinem Sohn, meiner Familie und meinen Freunden, die mir während der gesamten Studienzeit in Phasen der Erleichterung, der Freude, der Enttäuschung, der Angst und des Drucks viel Geduld und Verständnis entgegenbrachten.

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	3
2	Geschichtlicher Hintergrund	5
2.1	Die Griechen	5
2.2	Entstehung des Lehrsatzes	7
2.3	Pythagoras von Samos	10
3	Der pythagoreische Lehrsatz	13
3.1	Der Satz des Pythagoras	14
3.2	Beweise	14
4	Die pythagoreischen Zahlentripel	23
4.1	Herleitung und Erzeugung der pythagoreischen Zahlentripel	23
5	Anwendungsbereich des Satzes	30
5.1	Längen im rechtwinkligen Dreieck	30
5.2	Anwendung in Körpern	37
5.3	Irrationalität	37
5.4	Der große Fermatsche Satz	40
5.5	Euklidische Abstand	42
5.6	Trigonometrische Pythagoras	42
5.7	Betrag einer komplexen Zahl	44
5.8	Skalarprodukt	46
6	Verallgemeinerungen vom Satz des Pythagoras	49
6.1	Der Kosinussatz	49
6.2	Flächengleichheit ähnlicher Figuren	50
6.3	Satz von de Gua	52

7	Einführungsmöglichkeiten in den Unterricht	54
7.1	Verankerung im Lehrplan	54
7.2	Schulbuchanalyse	56
7.3	Experimentelle Zugänge	62
7.4	Erforschung der Einführungsmethoden	69
8	Exkurs: GeoGebra	71
8.1	Konstruktionsschritte	71
9	Unterrichtskonzept	77
9.1	Unterrichtsentwurf für die Einführung vom Satz des Pythagoras und dessen erste Anwendung	77
10	Konklusion	86
11	Anhang	87

1 Einleitung

"Wer die Geometrie begreift, vermag in dieser Welt alles zu verstehen" [Galileo Galilei]. Der Satz des Pythagoras ist wohl der bekannteste und meistgenutzte Satz in der Mathematik. Er stellt somit einen der wichtigsten Sätze der euklidischen Geometrie dar. Sein Meister, Pythagoras von Samos, ist legendär und sein Anwendungsbereich vielfältig. In fast jedem Teilgebiet der Mathematik tritt der pythagoreische Lehrsatz direkt oder indirekt auf.

Diese Arbeit richtet sich an all jene, welche mehr über den Satz des Pythagoras in Erwägung bringen möchten und an alle angehende Lehrpersonen, die den pythagoreischen Lehrsatz nicht nur laut Lehrplan zu unterrichten vermögen, sondern die Schüler und Schülerinnen mit interessanten Hintergrundinformationen und Geschichten begeistern möchten. Ziel der Arbeit ist es also den Satz des Pythagoras auf geeigneter Weise übersichtlich aufzuarbeiten. Manchmal wird man gewisse Dinge, Menschen oder Sachverhalte erst begreifen, wenn man deren Geschichte kennt. Wie auch schon Thomas Carlyle schrieb: *"Die Geschichte der Welt ist nichts als die Biographie großer Männer"*.

Im ersten Teil der Arbeit erhält man daher einen kurzen Einblick in die Denkweisen alter Griechen und der Entstehungsgeschichte des pythagoreischen Lehrsatzes. Dem geschichtlichen Hintergrund folgt eine Kurzbiographie zum Ergründer, *Pythagoras von Samos*, selbst. Der Hauptteil beschäftigt sich mit dem mathematischen Kontext des Satzes von Pythagoras. Mit Hilfe des Buches [Scheid and Schwarz, 2009] werden Definition und ausgewählte Beweise übersichtlich aufgearbeitet. Des Weiteren bietet der Hauptteil einen Ausflug in die pythagoreischen Zahlentripel, welche eine Weiterführung des pythagoreischen Lehrsatzes darstellen. Im letzten Teil kommt der schulische Aspekt der Arbeit zur Geltung. Verschiedene direkte Anwendungsbereiche des pythagoreischen Lehrsatzes werden durch Beispiele und Bilder illustriert. Zudem werden im Kapitel 6 ausgewählte Verallgemeinerungen des Satzes geboten, um ein vertiefendes Verständnis anzustreben.

Im Anschluss liefert die Arbeit eine Ausarbeitung diverser Einführungsmöglichkeiten des pythagoreischen Lehrsatzes in den Unterricht. Im Rahmen dessen wurde anhand der ausgewählten Bücher [Salzger et al., 2016] und [Beer et al., 2014] eine Schulbuchanalyse durchgeführt. Für Abwechslung sorgen zwei ausgewählte experimentelle Zugänge. Anschließend

wurden die ausgewählten Methoden durch literaturgestützte Beiträge auf ihre Tauglichkeit für den Unterricht erörtert.

Bevor wir zum Ende kommen bietet die vorliegende Arbeit einen Ausflug in die digitalen Medien. Im Zuge dessen wurde mit Hilfe der Geometrie-Software *GeoGebra* eine Konstruktionsbeschreibung für die Nachprüfung der, im pythagoreischen Lehrsatzes geltenden Gesetzmäßigkeiten, gegeben. Die Arbeit wird durch ein Unterrichtskonzept, in Hinblick auf die Einführung vom Satz des Pythagoras und dessen erste Anwendung, abgerundet.

Für die Gliederung der jeweiligen Kapitel wurde zum Teil die freie Enzyklopädie *Wikipedia* herangezogen, wobei keinerlei Informationen aus dieser geschöpft wurden. Zur graphischen Aufarbeitung der Kapitel kam wiederum die Geometrie-Software *GeoGebra* und die Grafiksoftware *Microsoft Paint* zur Verwendung.

2 Geschichtlicher Hintergrund

Das nachstehende Kapitel dient dazu, den Lesern einen geschichtlichen Überblick zu bieten, um die Nachvollziehbarkeit der Entstehung vom Satz des Pythagoras zu gewährleisten.

Zur Aufbereitung des geschichtlichen Überblicks wurden die Informationen aus [Sturm, 1917], [Hofmann, 1963], [Mankiewicz, 2000] und [Riedweg, 2002] entnommen.

2.1 Die Griechen

Die Griechen bezeichneten die Ägypter als ihre Lehrmeister in der Geometrie und rühmten den Babyloniern ein bedeutendes arithmetisches Grundwissen nach. Tatsächlich besaßen die Bewohner Mesopotamiens schon vor langer Zeit die Kenntnisse der arithmetischen und geometrischen Reihen. Sie verkündeten die Besonderheit und geheimnisvolle Kraft gewisser Zahlen und Verhältnisse – eine Lehre, der wir auch beim Satz des Pythagoras wieder begegnen. Die bedeutenden, aber wenig geordneten und nur auf praktische Zwecke gerichteten Werke der Ägypter wurden von den Griechen übernommen. Thales, Pythagoras, Plato u. a. brachten das mathematischen Wissen aus dem Land der Pharaonen in die Heimat. Rasch erkannten diese Männer die eigentliche Bedeutung der Mathematik und den wissenschaftlichen Charakter der Mathematik und stellten somit das Gebäude der antiken Geometrie auf die Beine. Kaum ein anderes Menschenwerk kann jener Gedankenstrenge gleichgesetzt werden. Im Mittelpunkt der gesamten Entwicklung der griechischen Mathematik stand Euklid (um 300 v. Chr.). Sein Hauptwerk, die „Elemente“ stellt einen Abschluss der älteren Mathematik dar und bildet den Brückenschlag zwischen antiker und moderner Wissenschaft. Vor allem waren drei Persönlichkeiten maßgebend an der Entwicklung der voreuklidischen Zeit beteiligt; Pythagoras, Plato und Eudoxus.

Nach Berichten war es Thales von Milet (um 640-548 v. Chr.), der als Erster das geometrische Wissen aus Ägypten nach Griechenland brachte. Im Allgemeinen konnte man feststellen, dass er und seine Nachfolger die Werke der ägyptischen Mathematiker vertieften und erweiterten.

Zu einer richtigen Wissenschaft wurde die Mathematik jedoch erst durch Pythagoras (um 580-501 v. Chr.), welcher nach einem längeren Aufenthalt in Ägypten seine berühmte Schule im unteritalienischen Kroton gründete. Bei dieser Schule handelte es sich eher um ein Geheimbund oder Orden als um eine Schule, in dem das Wissen nur an die wenigen eingeweihten Mitglieder weitergab. In ihr wurden die allgemeinen Grundsätze und der ideale Charakter der Mathematik festgelegt. Zudem wurde eines der logischen Elemente, die Führung eines Beweises, eingeführt. Die Mitglieder dieses pythagoreischen Bundes wurden unter anderem Pythagoreer genannt und folgten einem strengen Moral- und Verhaltenskodex. Als Erkennungszeichen des Geheimbundes stand das Pentagramm (Abbildung 2.1) [Scheid and Schwarz, 2009, S.31].

Ihre Wissenschaft gründete nicht, wie es bei den ionischen Naturphilosophen gängig war, in der Materie, sondern in der Form das Wesen der Dinge zu suchen. Folglich glaubten sie, dass Erkenntnis und Wissen ausschließlich auf der Grundlage von Zahlen gewonnen werden können. Eine besondere Bedeutung schrieben sie der Zahl Zehn zu, die sogenannte *Tetraktys*, welche gleich der Summe $1 + 2 + 3 + 4$ ist. Aus diesen Zahlen ließen sich die Dimensionen des Kosmos herleiten. Die Eins entspricht einem Punkt ohne Ausdehnung; zwei Punkte lassen sich zu einer eindimensionalen Linie verbinden; die Verbindung aus drei Punkten bildet ein zweidimensionales Dreieck; und vier Punkte nehmen die Gestalt eines dreidimensionalen Tetraeders an. Deshalb nannten sie die Welt auch Kosmos, das Geordnete, und die Zahl, das Wesen der Dinge. Die Zahlenbeziehungen der physischen Welt mussten nach ihrer Ansicht auch in der moralischen Welt gelten, sofern dort Ordnung und Harmonie herrschten. Ihre Zahlenlehre erhielt dadurch einen mystischen Beigeschmack und zeigte Anknüpfungspunkte an die Lehre der Babylonier.

Anfang des 5. Jhd. wurden in Großgriechenland die Mitglieder des pythagoreischen Bundes, aufgrund von politischen Unruhen, verbannt. In Folge dessen gelangten, die bisher geheimgehaltenen Entdeckungen der Pythagoreer, an die Öffentlichkeit. Der Hauptsitz der Wissenschaft wurde nun nach Athen verlegt. Durch Eudoxus, Theodorus, den Lehrer Platos, und einem Freund von Plato wurde eine Verbindung der pythagoreischen Schule sowohl zur Akademie Platos als auch zur mathematischen Schule des Eudoxus hergestellt.

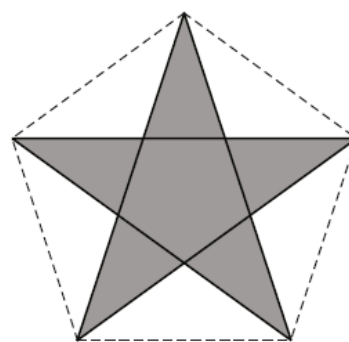


Abbildung 2.1: Pentagramm
(Druidenfuß)
[Scheid and Schwarz, 2009, S.31]

Die Forschungsweise der Pythagoreer wurde von vielen bekannten Mathematikern bewundert und nochmals aufgegriffen. Die Pythagoreer galten als Begründer der Zahlentheorie, erbrachten aber auch in vielen anderen Gebieten der Mathematik, wie der Arithmetik oder der Lehre von den Proportionen, große Fortschritte. Die Fortschritte auf dem algebraischen Gebiet sorgten für die größte Bewunderung. Die algebraischen Leistungen standen in unmittelbarem Zusammenhang mit ihrer Geometrie, in welcher der Lehrsatz, benannt nach dem Meister höchstpersönlich, im Mittelpunkt stand.

2.2 Entstehung des Lehrsatzes

Der Satz des Pythagoras ist wahrscheinlich der berühmteste Lehrsatz für Berechnungen in der Geometrie. Er wurde nach Pythagoras von Samos benannt. Die Anfänge des pythagoreischen Lehrsatzes gründeten in der Bemerkung am rechtwinkligen Dreieck mit den Seiten 3, 4, und 5. Die Erkenntnis, dass $3^2 + 4^2 = 5^2$ gilt, wurde schrittweise auf andere rechtwinkligen Dreiecken ausgedehnt.

Die Rechtwinkligkeit des Dreiecks mit den Seitenlängen 3, 4, 5 war eine alte Erfahrungssache und findet man daher bereits in der Antike, mehr als tausend Jahre vor Pythagoras. Nicht nur jenes Paradebeispiel eines rechtwinkligen Dreiecks mit den Seitenlängen 3, 4 und 5, war den Menschen in alter Zeit bekannt, sondern noch weitere Zahlentripel, die sogenannten „pythagoreische Tripel“, welche die Gleichung $x^2 + y^2 = z^2$ erfüllen.

Zu den am häufigsten analysierten Artefakte zur Mathematikgeschichte zählt die babylonische Tafel „Plimpton 322“ (Abbildung 2.2).

Dabei handelt es sich um eine unvollständige Tafel, welche vier Zahlenspalten zu je fünfzehn Zeilen verzeichnet. Man nimmt an, dass es sich um eine Rechentafel mit pythagoreischen Tripeln handelt. Somit wird bestätigt, dass die Babylonier bereits zwischen 1800 und 1650 v. Chr. den Lehrsatz des Pythagoras angewandt haben.

Die mathematischen Überlegungen der vedischen Periode in Indien sind in den *Sulbasutras* (Schurregeln) aufgezeichnet. Mit *sulba* bezeichnet man das Seil, mit welchem man Altäre vermessen hat. Ein Altar musste, nach damaligen Regeln, so gebaut werden, dass bestimmte Flächen ein Vielfaches der Fläche eines anderen, nach demselben Muster angefertigten Altars, darstellten. Dies erforderte eine hohe Genauigkeit und deshalb griffen die Inder bei der Planung und Durchführung auf geometrischen, anstelle von numerischen Methoden, zurück. Im Rahmen dessen brachte Baudhajana (ca. 700 v. Chr.) eine erste Annäherung an den pythagoreischen Lehrsatz hervor: „Das Seil, das über die Diagonale eines Quadrats gelegt wird, bringt eine Fläche hervor, die doppelt so groß ist wie die des ursprünglichen

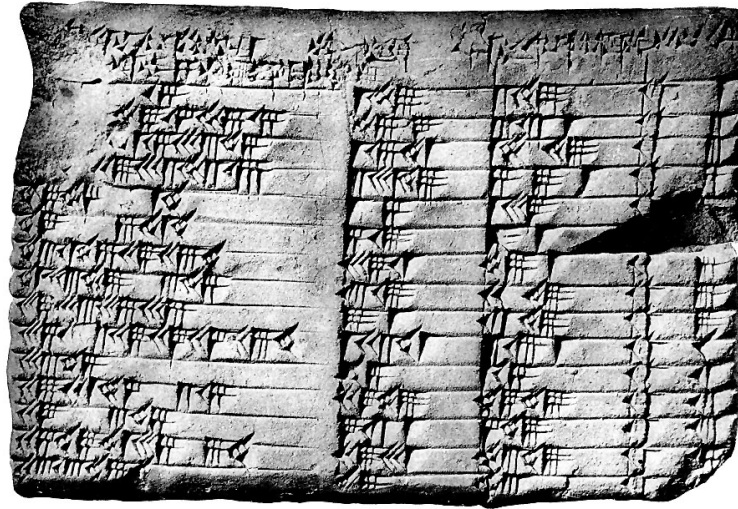


Abbildung 2.2: Plimpton 322 (babylonische Tafel)
<https://at37.wordpress.com> (aufgerufen am 12.12.2018)

Quadrats“ [Mankiewicz, 2000, S.23]. Eine allgemeiner gehaltene Definition war bei Katya-yana aufzufinden: „Das Seil der Diagonalen eines Rechtecks erschafft eine Fläche, die der Summe der Flächen entspricht, die von der vertikalen und der horizontalen Seite erzeugt werden“ [Mankiewicz, 2000, S.23]. Die Inder konnten die Quadratwurzeln relativ genau berechnen, aber für die damalige, aus religiösen Gründen geforderte absolute Genauigkeit, reichte es nicht aus. Deshalb wurden die Beweise der Sätze nicht geführt, sondern nur anhand mehrerer praktischen Beispielen beschrieben.

Die Chinesen beschäftigten sich ca. 500 v. Chr. hauptsächlich mit Fragen der Astronomie. Aber auch bei ihnen kamen die Eigenschaften von rechtwinkligen Dreiecken zur Diskussion. Der pythagoreische Lehrsatz wurde unter der Bezeichnung *gougu* formuliert und dessen Gültigkeit geometrisch demonstriert (Abbildung 2.3).

Die dafür verwendete Methode nennt sich „Rechtecke aufhäufen“. Die Zeichnung aus Abbildung 2.3 stellt diese Methode für das kleinste pythagoreische Tripel dar. Der Lehrsatz, geschrieben als $gou^2 + gu^2 = xian^2$, spielte also auch in der chinesischen Mathematik bereits eine wichtige Rolle. Er stellte die Grundlage für die Berechnung von Quadratwurzeln und die Lösung von Quadratgleichungen dar.

Wie gerade angeführt, war der Lehrsatz bereits lange vor Pythagoras Lebzeiten bekannt. Es wird behauptet, dass Pythagoras den Lehrsatz von den Ägyptern übernommen habe. Die *Harpedonapten* (Seilknüpfer) bei den alten Ägyptern machten nämlich vom Lehrsatz Gebrauch um die Richtungen bei ihren Bauten festzulegen. Im Zuge dessen wurde ein Seil der Länge 12 durch Knoten in 3, 4 und 5 Teile geteilt. Wurde dann die Seite 3 zwischen

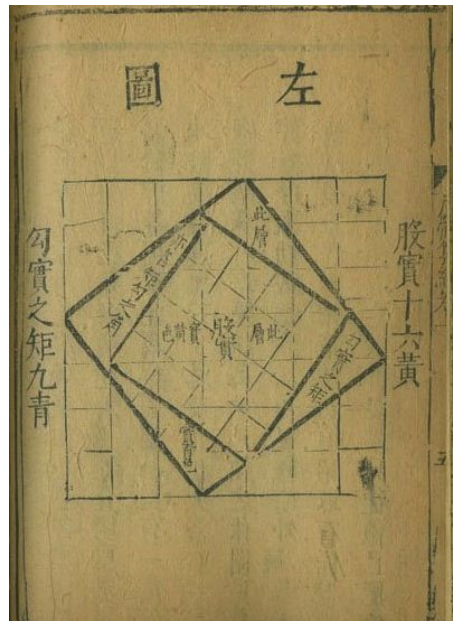


Abbildung 2.3: Zhoubi suanjing (Chinesischer Beweis für den Satz des Pythagoras)
<https://www.pinterest.com>(aufgerufen am 12.12.2018)

zwei Blöcken eingespannt, so gab die Seite 4 die gewünschte Senkrechte (Abbildung 2.4). Dadurch konnte man bequem rechte Winkel abstecken.

Das bemerkenswerteste an der Behandlung des Lehrsatzes war aber nicht seine vielfältigen Anwendungsbereiche sonder der Versuch der Griechen einen Beweis zu führen. Dazu aber mehr in dem Kapitel der Beweise.

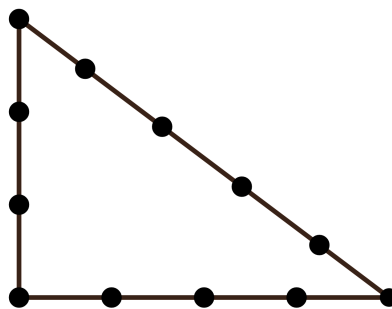


Abbildung 2.4: Seil durch Knoten in 12 gleich große Teile geteilt

2.3 Pythagoras von Samos



Abbildung 2.5: Pythagoras von Samos

<https://www.zitate.eu/author/pythagoras-von-samos> (aufgerufen am 19.12.2018)

Die Antwort auf die Frage wer dieser "Weise" aus Samos wirklich war, fällt aufgrund der problematischen Überlieferungen nicht leicht. Die einzigen zusammenhängenden Beschreibungen vom Leben und der Lehre Pythagoras konnten aus den Arbeiten verschiedener Autoren des 3. und 4. Jahrhunderts n. Chr. geschöpft werden. Die Überlieferungsproblematik gründet vor allem in der Tatsache, dass bereits im 4. Jahrhundert v. Chr. verschiedene Richtungen existierten, welche einen idealen, stilisierten Pythagoras erschufen und sich in mehreren Punkten widersprechen. Obwohl man genau durch diese Quellen eine authentische Vorstellung von der faszinierenden Persönlichkeit mit den Eigenschaften eines Gurus und Gelehrten gewinnen kann, sind Zeugnisse aus dieser Zeit mit Vorsicht zu genießen.

Eine weitere Problematik der Überlieferung wird mit der Soziologie der Schule selbst begründet. Nachdem Pythagoras um 530 v. Chr. seine Heimatinsel Samos verließ, betrachtete er eine geheime politisch-religiöse Kommunität als geeignete Organisationsform zur Vermittlung seiner *sophia* (Weisheit). In diesem Art Geheimbund, welcher aus heutiger Sicht Züge einer Sekte trug, wurde besonders auf die Schweigepflicht geachtet.

2.3.1 Kurzbiographie

Ein derart herausragender Mensch kann nur einen erstaunlichen Werdegang und somit keine gewöhnliche Biographie haben. Im Laufe der Zeit wurde dem Meister sogar eine göttliche Abstammung nachgesagt. Die Erzählungen über Pythagoras wurden seit je her mit christlichen Traditionen geschmückt. Man erzählt sich, dass Mnesarchos, Vater von Pythagoras, bei der Durchreise nach Syrien das Orakel von Delphi, eine Weissagungsstätte des antiken Griechenlands [Gilbert, 1872, S.2], im Hinblick auf seine weitere Fahrt nach Syrien befragte. Die Pythia kündigte ihm dabei an, dass seine Frau Parthenis (*Jungfräuliche*) in Erwartung eines Kindes wär, welches mit seiner Schönheit und Weisheit, die Menschen aller Zeiten überragen und von großem Nutzen sein werde. Infolgedessen taufte Mnesarchos seine Frau in Pythaïs um. Eine Legende besagt, dass Apollon Parthenis beigewohnt habe und die Schwangerschaft über die Prophetin verkünden liesse. Auf diese Geschichte geht auch die Namensherkunft Pythagoras zurück: "Pyth-agoras", weil er die Wahrheit wie die Pythier sagte. Gleichzeitig wird der Name seiner Mutter eingebettet. Dies soll nur ein Beispiel von vielen sein, in welchem der christliche Beigeschmack innerhalb der Erzählungen über Pythagoras zur Geltung kommt. Die Erzählung weist nämlich mehrere Parallelen zur Geschichte von Maria und Josef auf. Folgeerzählungen bezüglich der Geburt von Pythagoras fallen nüchtern aus. Pythagoras war also Sohn des Samier Mnesarchos, ein gewöhnlicher Handelsreisender. Er wuchs in Samos unter der Obhut des Lehrers Pherekydes von Syros auf. Als Mann ging er auf Reisen und machte sich im Zuge dessen mit den religiösen Anschauungen und naturwissenschaftlichen Kenntnisse dieser Länder vertraut. In Ägypten wurde er angeblich in den Kreis der Priester aufgenommen und eignete sich somit wertvolles Geheimwissen an. Bei den Ägyptern habe sich Pythagoras seine geometrischen Kompetenzen erworben und ihre rituellen Vorschriften übernommen. Als weiterer Lehrmeister Pythagoras wird außerdem Thales von Milet genannt.

Nach ausgiebigen Lehr- und Wanderjahren sei Pythagoras wieder nach Samos zurückgekehrt und gründete dort seine eigene Schule. Nach Erzählungen sind die besten Köpfe seinerzeit wegen nach Samos gekommen. Viele seiner Schüler waren sehr erfolgreich, vor allem Schüler aus Sportdisziplinen.

Aufgrund des politischen Unbehagen während der Herrschaft des in Samos regierenden Tyrannen Polykrates übersiedelte Pythagoras nach Kroton. In Unteritalien gründete er dann eine sektenartige Schule, welche bereits zuvor genauer erläutert wurde. Trotz strenger Geheimhaltung seiner Arbeiten versuchte Pythagoras mit öffentlichen Reden Einfluss in Kroton zu nehmen. Bei den demokratischen Kräften riefen seine politischen Ansprüche eine starke

Gegenreaktion hervor, sodass er ins benachbarte Metapont fliehen musste. Dort starb er zu Beginn des 5. Jahrhunderts [Sorgner and Fürbeth, 2003, S.104].

3 Der pythagoreische Lehrsatz

Das folgende Kapitel soll eine Aufarbeitung der mathematischen Aspekte des pythagoreischen Lehrsatzes geben. „Eine Formel sagt dem, der die Sprache der Mathematik spricht, mehr als 1000 Worte“ [Günter Aumann]. Wer den Satz des Pythagoras lehren möchte, dem müssen die einhergehenden Gesetzmäßigkeiten geläufig sein.

Die mathematischen Grundlagen für die strukturierte Darstellung des berühmten Lehrsatzes im folgenden Kapitel wurden aus [Scheid and Schwarz, 2009] entnommen.

Zunächst betrachten wir ein rechtwinkliges Dreieck mit den Bezeichnungen wie in Abbildung 3.1. Die Seiten (hier: a und b), welche den rechten Winkel einschließen, nennt man *Katheten*. Die dem rechten Winkel gegenüberliegende und somit längste Seite (hier: c) des rechtwinkligen Dreiecks heißt *Hypotenuse*. Die Normale zur *Hypotenuse* (hier: h) gibt die Höhe an und teilt diese in die *Hypotenuseabschnitte* (hier: p und q).

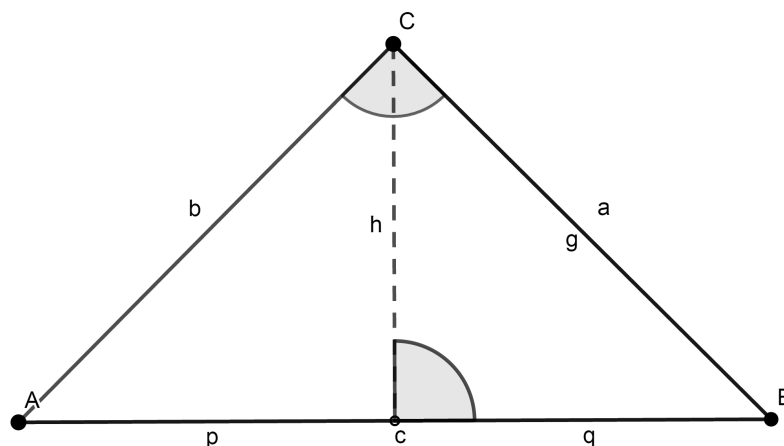


Abbildung 3.1: Rechtwinkliges Dreieck

Der Satz des Pythagoras liefert eine Aussage über die Flächeninhalte der Quadrate über den Seiten, wobei die Seitenlängen der Quadrate den Seitenlängen des rechtwinkligen Dreiecks entsprechen.

3.1 Der Satz des Pythagoras

Definition 1 *[Pythagoreische Lehrsatz] In einem rechtwinkligen Dreieck ist die Summe der Quadrate über den Katheten gleich dem Quadrat über der Hypotenuse*

[Scheid and Schwarz, 2009, S.32]

3.2 Beweise

Für den Satz des Pythagoras kennt man bereits mehr als 300 verschiedene Beweise. Unter den Autoren findet man nicht nur Mathematiker, sondern auch zahlreiche Künstler, Philosophen und Politiker. Im folgenden Unterabschnitt werden ausgewählte Beweise des Satzes genauer wiedergegeben, um unter anderem die Vielfältigkeit des pythagoreischen Lehrsatzes zu untermauern.

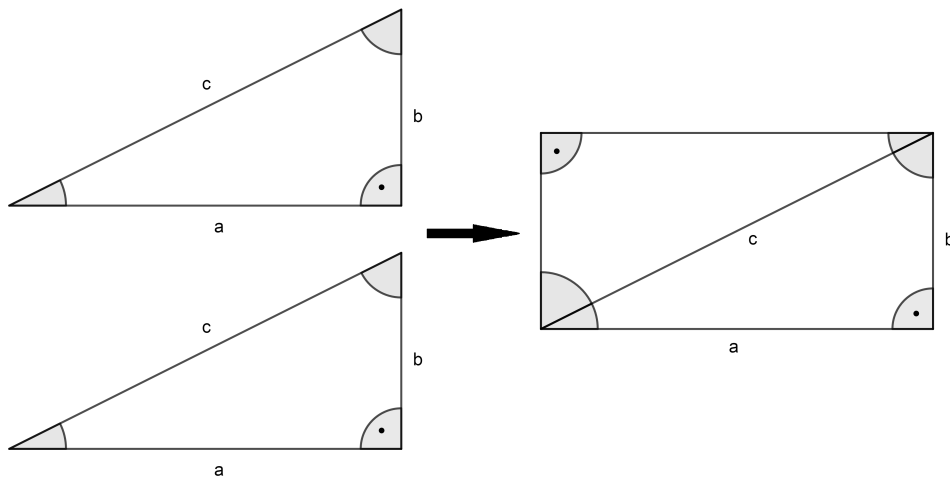
3.2.1 Beweis aus dem altbabylonischen Reich

Der folgende Beweis zählt wohl zu den schönsten aller Beweise vom Satz des Pythagoras und war im altbabylonischen Reich bereits 1700 v. Chr. bekannt. Er gründet auf unterschiedliche Berechnungen des Flächeninhaltes eines Quadrats der Seitenlängen $a + b$.

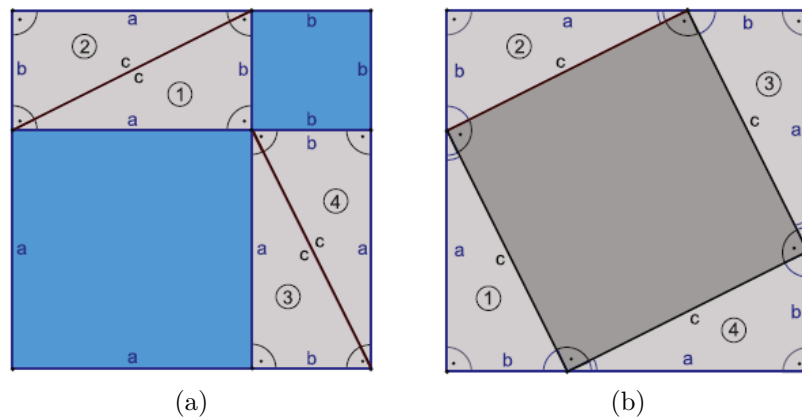
Setzt man zwei rechtwinklige Dreiecke mit den Katheten a und b und der Hypotenuse c entlang der Hypotenusen zusammen so entsteht ein rechtwinkliges Rechteck mit den Seitenlängen a und b . Wie in Abbildung 3.2 ersichtlich ergänzen sich die beiden anliegenden Hypotenusen zu einem rechten Winkel.

Aus vier solcher rechtwinkligen Dreiecken können zwei rechtwinklige Rechtecke konstruiert werden. Zusammengelegt lassen sie sich zu einem Quadrat der Seitenlänge $a + b$ vervollständigen (Abbildung 3.3 (a)).

Legt man nun die vier kongruenten rechtwinkligen Dreiecke derartig aneinander wie in Abbildung 3.3 (b), dann ergänzen sich die beiden der Hypotenuse anliegenden Winkel zu einem gestreckten Winkel. Im Innenraum des erzeugten Quadrat der Seitenlänge $a + b$ entsteht ein



Abbildungung 3.2: Rechtwinkliges Rechteck aus zwei rechtwinkligen Dreiecken konstruiert



Abbildungung 3.3: Vervollständigung [Scheid and Schwarz, 2009, S.32]

Quadrat der Seitenlänge c , welches jeweils von den Hypotenusen der rechtwinkligen Dreiecke gebildet wird.

Der Flächeninhalt c^2 entspricht dann offenbar der Summe der Flächeninhalte der Quadrate mit Seitenlänge a und b des rechten Bildes aus Abbildung 3.3.

Algebraisch ausgedrückt folgt aus

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 \quad 3.3 \text{ (a)}$$

$$= c^2 + 4 \cdot \frac{ab}{2} \quad 3.3 \text{ (b)}$$

dass $a^2 + b^2 = c^2$ gilt.

3.2.2 Beweis nach Bhaskara

Eine weitere Beweisskizze konnte man bei den Werken des indischen Mathematiker Bhaskara (1114-1191) vermerken.

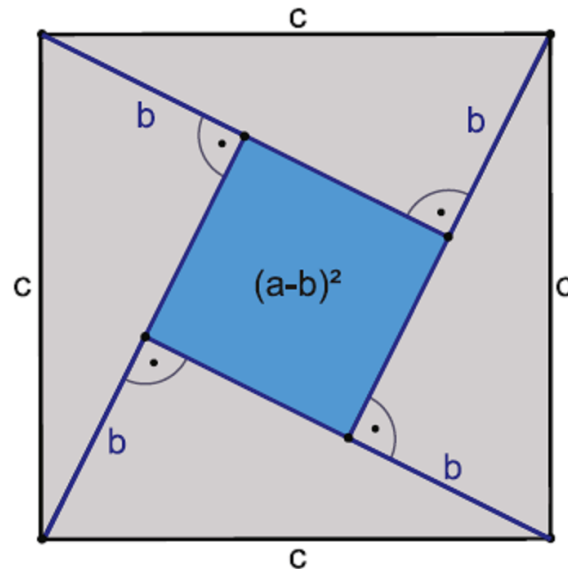


Abbildung 3.4: Beweis nach Bhaskara [Scheid and Schwarz, 2009, S.33]

Wie aus Abbildung 3.4 ersichtlich treffen jeweils, die an der Hypotenuse anliegende beiden Winkel zweier kongruenter rechtwinkliger Dreiecke, aufeinander. Die Hypotenuse der vier flächeninhaltsgleichen rechtwinkligen Dreiecke bilden ein Quadrat der Seitenlänge c . Im Innenraum dieses Quadrat wird somit ein Quadrat der Seitenlänge $a - b$ erzeugt. Daraus kann man erkennen, dass

$$c^2 = (a - b)^2 + 4 \cdot \frac{ab}{2} = a^2 - 2ab + b^2 + 2ab = a^2 + b^2$$

gilt.

3.2.3 Beweis nach Arthur Schopenhauer

Der Philosoph Arthur Schopenhauer (1788-1860) schätzte die Mathematik aufgrund der Unanschaulichkeit der Beweisführungen nicht. Er beschuldigte vielerlei Beweise den Leser bzw. die Leserin zu verwirren. Insbesondere charakterisierte Schopenhauer Euklids Beweis

vom Satz des Pythagoras als hinterlistig. In Abbildung 3.5 ist der Zerlegungsbeweis von Arthur Schoppenhauer dargestellt.

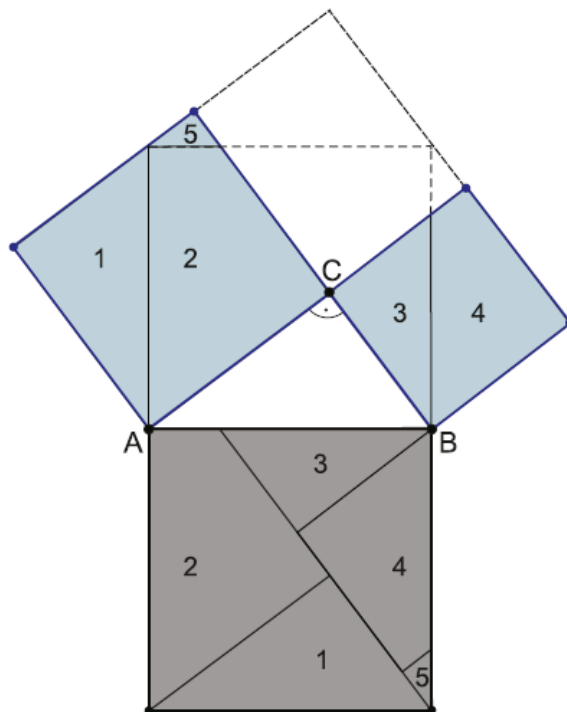


Abbildung 3.5: Beweis nach Schoppenhauer [Scheid and Schwarz, 2009, S.33]

Seine Methode basiert darauf, das Hypotenusenquadrat in fünf verschiedene Vielecke zu zerlegen, welche sich wiederum in die beiden Kathetenquadrate zusammenfügen lassen. Die, aus Abbildung 3.5 ersichtlichen, gleich nummerierten Vielecke, sind jeweils zueinander kongruent und somit ist die Flächengleichheit der Quadrate bewiesen.

3.2.4 Beweis nach James Garfield

In der früheren Zeit, als man noch kein Ansehen erlangte, wenn man sich mit Schwächen im Fach Mathematik rühmte, gab es auch unter Politikern zahlreiche Hobby-Mathematiker. Einer von ihnen war der 20. Präsident der Vereinigten Staaten von Amerika, James Garfield (1831-1888). Garfield bereicherte die Sammlung der Beweise des pythagoreischen Lehrsatzes mit einem Beweis, der auf die unterschiedliche Berechnung des Flächeninhaltes eines Trapez basiert (Abbildung 3.6).

Verwendet man die aus dem Schulunterricht bekannte Formel $A = \frac{(a+c)}{2} \cdot h$ für den Flächeninhalt A eines Trapez, so erhält man für die Abbildung 3.6 angepasste Formel $A = \frac{a+b}{2} \cdot (a+b)$.

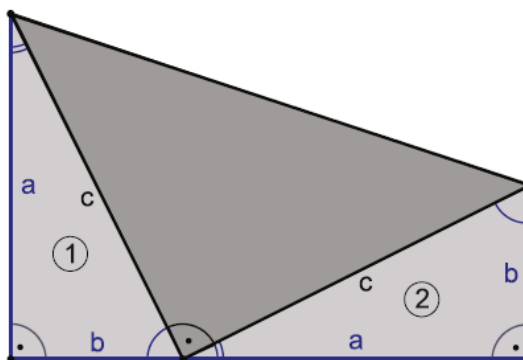


Abbildung 3.6: Beweis nach Garfield [Scheid and Schwarz, 2009, S.34]

Ermittelt man dagegen den Flächeninhalt A , indem man die Summe aller Dreiecksflächen bildet, so führt dies auf $A = \frac{a \cdot b}{2} \cdot 2 + \frac{c \cdot c}{2}$. Durch Gleichsetzen und Umformen erhält man die allgegenwärtige Formel $a^2 + b^2 = c^2$.

Algebraisch ausgedrückt:

Flächeninhalt Trapez = Summe der Dreiecksflächen

$$\frac{a+b}{2} \cdot (a+b) = \frac{a \cdot b}{2} \cdot 2 + \frac{c \cdot c}{2}$$

$$\frac{(a+b)^2}{2} = ab + \frac{c^2}{2}$$

$$a^2 + 2ab + b^2 = 2ab + c^2$$

$$a^2 + b^2 = c^2$$

3.2.5 Beweis nach Leonardo da Vinci

Die in Abbildung 3.7 dargestellte Skizze eines Beweises vom Satz des Pythagoras wurde von Leonardo da Vinci (1452-1519) angefertigt. Es gibt kaum ein Teilgebiet der Wissenschaft, in welchem Leonardo keinen Beitrag geleistet hat. Er gehört somit zu einen der berühmtesten Universalgelehrten aller Zeiten. Leonardo da Vinci lieferte beispielsweise wichtige Beiträge in der Malerei, Astronomie, Ingenieurwissenschaft, Anatomie, Naturphilosophie und vielem mehr [Herzfeld, 2014, S.2-3]. Auch der Mathematik schrieb er eine große Bedeutung zu. In jedem seiner Werke investierte da Vinci viel Zeit, Schweiß und Geduld. Im nachstehenden Beweis wird ersichtlich mit welcher präzisen Sorgfalt Leonardo vorgeht.

Die beiden Vierecke $BUEA$ und $BCFW$ aus Abbildung 3.7 sind kongruent. Es handelt

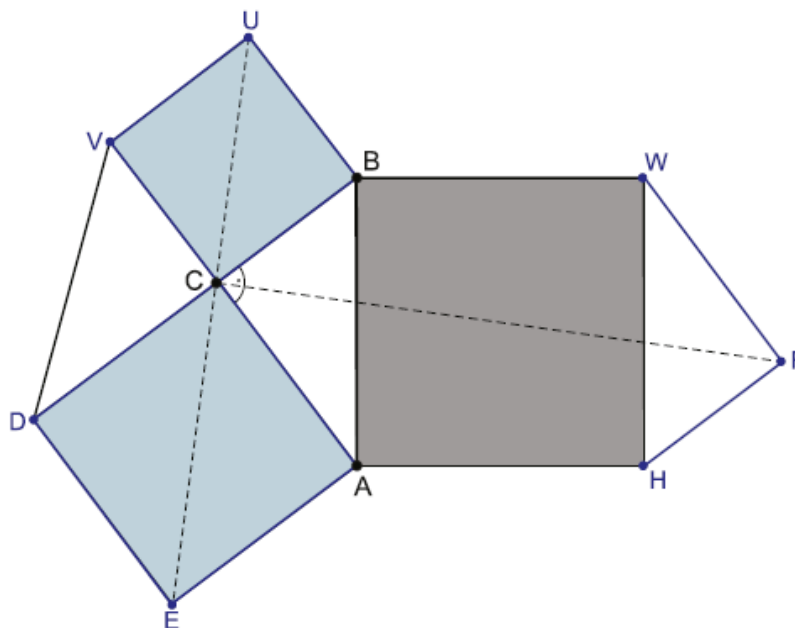


Abbildung 3.7: Beweis nach Da Vinci [Scheid and Schwarz, 2009, S.34]

sich hierbei lediglich um eine 90° – *Drehung* um den Fixpunkt B . Folglich sind auch die Sechsecke $BUVDEA$ und $BCAHFW$ flächeninhaltsgleich. Entfernt man nun aus jenen die zueinander kongruenten Dreiecke $\triangle ABC$, $\triangle VDC$ und $\triangle WHF$ kann man die Aussage des pythagoreischen Lehrsatzes ablesen.

3.2.6 Beweis nach Euklid

Kommen wir nun zur wohl bekanntesten Vorgehensweise um den Satz von Pythagoras zu beweisen. Euklids Beweis gilt offiziell als erster Beweis des Lehrsatzes. Man findet diesen in Euklids *Elemente*. Der Beweis ist etwas aufwendiger aber mit einem ganz besonderen Charme geführt worden und kann somit nicht mit den bisherigen Beweisskizzen verglichen werden. Der Beweis von Euklid beruht darauf, dass Dreiecke mit gleicher Grundseite und gleicher Höhe auch den gleichen Flächeninhalt besitzen. Wie man in Abbildung 3.8 sehen kann, ändert sich dabei weder die Länge g noch die Höhe h und somit gilt, dass Scherungen *flächeninhaltstreue* Abbildungen sind.

Mit dieser Erkenntnis kann man nun den Beweis des Satzes von Pythagoras nach Euklid nachvollziehen. Die in Abbildung 3.9 dargestellten Dreiecke $\triangle EAC$ und $\triangle EAB$ besitzen den gleichen Flächeninhalt. Das Dreieck $\triangle EAB$ geht lediglich durch eine Scherung an der Achse g_{EA} hervor.

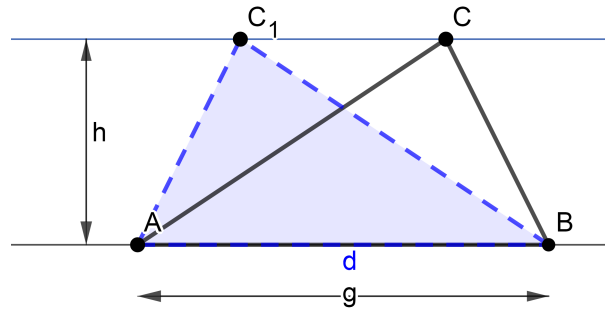


Abbildung 3.8: Flächeninhaltstreue

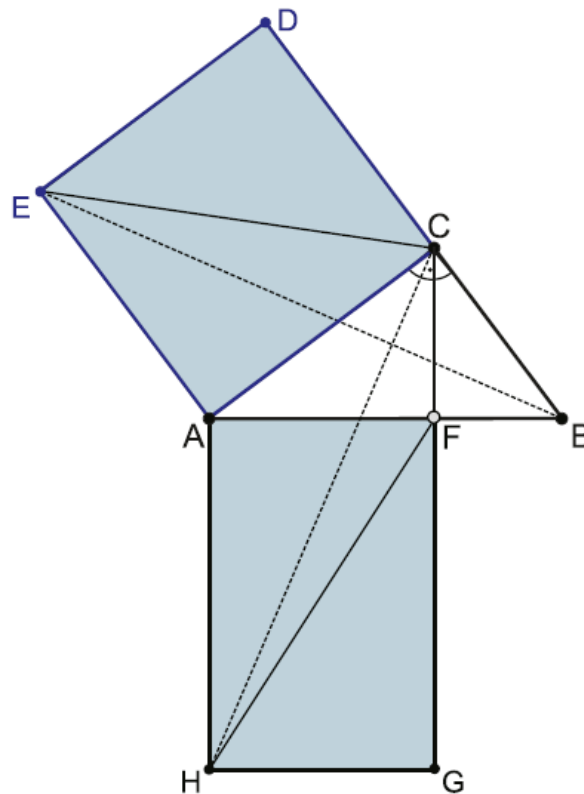


Abbildung 3.9: Beweis nach Euklid [Scheid and Schwarz, 2009, S.35]

Zudem sind die Dreiecke $\triangle EAB$ und $\triangle CAH$ zueinander kongruent. Das Dreieck $\triangle EAB$ wird lediglich durch eine 90° – *Drehung* um den Fixpunkt A in $\triangle CAH$ überführt. Insbesondere stimmt der Flächeninhalt von $\triangle CAH$ mit dem des Dreiecks $\triangle FAH$ überein, da sie die gemeinsame Grundseite AH besitzen und ihre Höhe dieselbe Länge $\overline{AF}$ beanspruchen. Schließlich sind die Dreiecke $\triangle EAC$ und $\triangle FAH$ flächeninhaltsgleich und somit besitzen

auch das Quadrat $ACDE$ und das Rechteck $FAHG$ denselben Flächeninhalt. Diese Beobachtung ist auch unter dem Namen *Kathetensatz* bekannt, welcher im Rahmen des Kapitels 5 im Abschnitt 5.1.1 genauer ergründet wird.

Mit der Folgerung, dass das Quadrat $ACDE$ über der Kathete AC des rechtwinkligen Dreiecks $\triangle ABC$ und das Rechteck $FAHG$ flächengleich sind, ist der *Kathetensatz* nach Euklid gezeigt.

Ausgehend vom Kathetensatz kann nun auch die Gültigkeit vom Satz des Pythagoras bewerkstelligt werden. Das Kapitel 5 (Abschnitt 5.1.1) bietet eine detaillierte Behandlung der geltenden Implikation *Kathetensatz* $\Rightarrow$ *Satz des Pythagoras*.

Die Anwendung des Kathetensatzes auf die beide Katheten AC und BC (Abbildung 3.10) liefert die gewünschte Aussage vom Satz des Pythagoras.

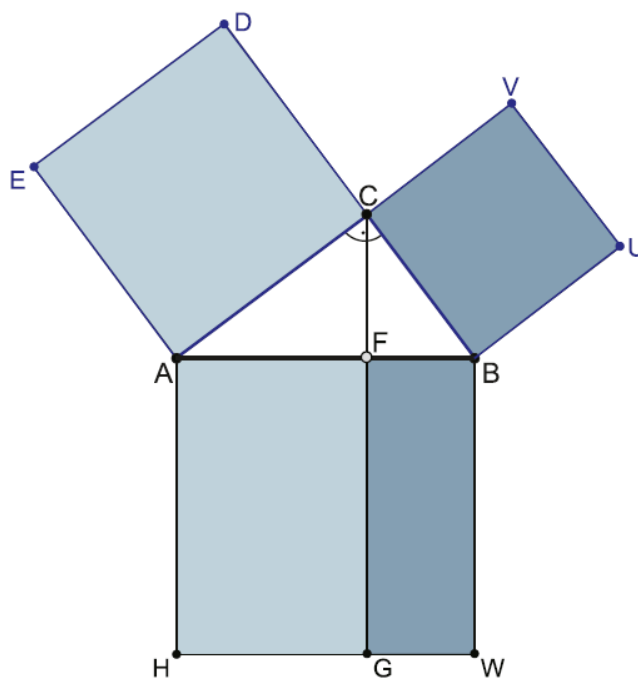


Abbildung 3.10: *Kathetensatz* $\Rightarrow$ *Satz des Pythagoras* [Scheid and Schwarz, 2009, S.36]

In Abbildung 3.10 kann man erkennen, dass sich das Quadrat $HABW$ über der Hypotenuse AB des rechtwinkligen Dreiecks ABC aus den Rechtecken $HAFW$ und $GBWV$ zusammensetzt. Die Seitenlängen der Rechtecke ergeben sich aus der Länge der Hypotenuse und den jeweiligen Hypotenusenabschnitten AF und BF .

Demnach gilt:

$$\begin{aligned}\overline{AC}^2 + \overline{BC}^2 &= \overline{AF} \cdot \overline{AH} + \overline{BF} \cdot \overline{BW} \\ &= \overline{AF} \cdot \overline{AB} + \overline{BF} \cdot \overline{AB} \\ &= (\overline{AF} + \overline{BF}) \cdot \overline{AB} \\ &= \overline{AB} \cdot \overline{AB} \\ &= \overline{AB}^2\end{aligned}$$

Somit ist des Satz von Pythagoras nach Euklid bewiesen.

Wie man erkennen kann, handelt es sich beim Satz des Pythagoras tatsächlich um einen beliebten Satz, an dessen Beweis sich Personen aus verschiedenen Berufszweigen wagten.

4 Die pythagoreischen Zahlentripel

Die Informationen für die Bearbeitung des folgenden Kapitels wurden aus [Sturm, 1917],[Bouw, 2009] und [Herrmann, 2013] geschöpft.

Als Paradebeispiel für den Satz des Pythagoras gilt das Dreieck mit den Seitenlängen 3, 4 und 5. Es gibt aber eine unendliche Menge an Tripeln, welche dem Satz des Pythagoras gerecht werden [Mankiewicz, 2000, S.22]. Diese Tripel werden auch *pythagoreischen Zahlentripel* genannt.

Definition 2 (Pythagoreische Tripel) *Es seien x , y und z natürliche Zahlen. Man nennt x , y , z pythagoreische Tripel, falls sie die nachstehende Diophantische Gleichung erfüllen*

$$x^2 + y^2 = z^2$$

4.1 Herleitung und Erzeugung der pythagoreischen Zahlentripel

1. Eine Möglichkeit um unendlich viele pythagoreische Zahlentripel (x_n, y_n, z_n) zu finden ist folgende:

Für $n \in \mathbb{N}$ betrachte man die Zahlenfolgen

$$x_n = 2n + 1, \quad y_n = 2n(n + 1), \quad z_n = 2n(n + 1) + 1$$

Ausgangspunkt dieser Herangehensweise, zur Ermittlung pythagoreischer Zahlentripel, ist das altbekannte Zahlentripel $(3, 4, 5)$, welches offensichtlich die Diophantische Gleichung erfüllt. Um die Grundidee der Entstehung dieses Algorithmuses besser zu verstehen, benötigt man die nachstehende Definition.

Definition 3 [Primitives pythagoreische Tripel] Ein pythagoreisches Zahlentripel (x, y, z) heißt primitiv, falls $\text{ggT}(x, y, z) = 1$ ist.

Aus obiger Definition kann man ableiten, dass x und y nicht gleichzeitig ungerade sein können. Daraus folgt, dass z eine ungerade Zahl sein muss.

Es gilt:

$$x_1 = 3^2 = 9 = 4 + 5 = y_1 + z_1$$

Betrachtet man nun systematisch die Folge der ungeraden Quadratzahlen, erhält man weitere pythagoreische Zahlentripel. Die nächste ungerade Quadratzahl von $3^2 = 9$ ist $5^2 = 25$.

Somit gilt:

$$\begin{aligned} x_2 &= 5^2 = 25 = 12 + 13 = y_2 + z_2 \\ x_3 &= 7^2 = 49 = 24 + 25 = y_3 + z_3 \text{ u.s.w.} \end{aligned}$$

Man kann erkennen, dass man aus dem Quadrat von x_n die weiteren Zahlen y_n und z_n als Summe einer geraden und einer ungeraden Zahl ermitteln kann.

In Tabelle 4.1 sind die ersten pythagoreischen Zahlentripel, welche aus dem zuvor beschriebenen Prozedere hervorgehen, aufgelistet.

n	$x_n = 2n + 1$	x_n^2	$y_n = 2n(n + 1)$	$z_n = 2n(n + 1) + 1$
1	3	9	4	5
2	5	25	12	13
3	7	49	24	25
4	9	81	40	41
5	11	121	60	61
...	...	...	...	...

Tabelle 4.1: Erste pythagoreische Zahlentripel

2. Eine weitere Möglichkeit zur Auffindung pythagoreischer Zahlentripel liefert uns folgender einparametriger Lösungsansatz:

Für ungerades $m \in \mathbb{N}$ sei

$$x_n = \frac{1}{2}(n^2 - 1), \quad y_n = n, \quad z_n = \frac{1}{2}(n^2 + 1)$$

Prokoloß schreibt diese Problemlösestrategie den Pythagoreern zu.

Eine Herleitung dieses Verfahrens ergibt sich aus der Tatsache, dass man aus einem Quadrat durch Anhängen eines Binoms das Folgequadrat erhält

$$(m+1)^2 = m^2 + (2m+1)$$

Die Gültigkeit der Gleichung ist schnell mittels Vollständiger Induktion über $m \in \mathbb{N}$ gezeigt.

Ersetzt man in der vorherigen Gleichung $(2m+1)$ mit n^2 und stellt in dieser anschließend m bzw. $m+1$ frei, so erhält man

$$m = \frac{n^2 - 1}{2} \quad \text{und} \quad m+1 = \frac{n^2 + 1}{2}$$

Durch Substitution ergibt sich das Pythagoreische Tripel

$$\left(\frac{n^2 + 1}{2}\right)^2 = n^2 + \left(\frac{n^2 - 1}{2}\right)^2$$

In der nachstehenden Tabelle 4.2 sind die ersten Tripel dieses Types angegeben.

n	$x_n = \frac{n^2-1}{2}$	$y_n = n$	$z_n = \frac{n^2+1}{2}$
3	4	3	5
5	12	5	13
7	24	7	25
9	40	9	41
11	60	11	61
...	...	...	...

Tabelle 4.2: Verfahren nach den Pythagoreern

- Ein Vielfaches der zuvor beschriebenen Herleitung stellt ebenfalls eine Methode zur Auffindung von pythagoreischen Zahlentripel dar und ist dem Platon zuzuschreiben.

Es handelt sich also um die Tripel (x_n, y_n, z_n) , welche folgendermaßen erzeugt werden:

$$x_n = n^2 - 1, \quad y_n = 2n, \quad z_n = n^2 + 1$$

Tabelle 4.3 beinhaltet die ersten Zahlentripel, welche aus der Herleitung nach Platon hervorgehen. Aus Tabelle 4.2 und 4.3 wird ersichtlich, dass man für ungerades $n \in \mathbb{N}$ mit der Methode nach Platon keine neuen pythagoreische Zahlentripel erhält, sondern lediglich das Doppelte der Tripel aus Punkt 2.

n	$x_n = n^2 - 1$	$y_n = 2n$	$z_n = n^2 + 1$
2	3	4	5
3	8	6	10
4	15	8	17
5	24	10	26
6	35	12	37
...	...	...	...

Tabelle 4.3: Verfahren nach Platon

Für gerades $n \in \mathbb{N}$ erzeugt man drei Zahlen, deren größter gemeinsamer Teiler 1 ist. Das heißt $ggT(x_n, y_n, z_n) = 1$. Laut Definition 3 handelt es sich hierbei um primitive pythagoreische Zahlentripel.

4. Die letzte erwähnenswerte Methode zur Bestimmung pythagoreischer Zahlentripel, welche angeführt wird, bevor wir zur allgemeinen Herleitung nach Euklid übergehen, beruht auf den Satz des Pythagoras. Es sei (a, b, c) ein primitives pythagoreisches Zahlentripel, wobei a und c ungerade sind und b gerade. Dann gilt

$$a^2 + b^2 = c^2 \Rightarrow b^2 = c^2 - a^2 = (c - a)(c + a)$$

Da b gerade ist, besitzt b^2 den Teiler 4. Aus diesem Grund kann man für $a, b, c \in \mathbb{Z}$ folgende Faktorisierung vornehmen

$$\left(\frac{b}{2}\right)^2 = \frac{c-a}{2} \cdot \frac{c+a}{2} \quad \star$$

Weil c und a nach Voraussetzung teilerfremd sind, sind auch $(c - a)$ und $(c + a)$ teilerfremd. Da auf der linken Seite in $\star$ ein Quadrat steht, muss auch die rechte Seite ein Produkt aus zwei Quadraten sein. Man kann somit folgenden Ansatz machen

$$m^2 = \frac{c+a}{2} \quad n^2 = \frac{c-a}{2}$$

Durch Einsetzen und Auflösen liefert dies für $m \in \mathbb{Z}$ und $m > n$ die Darstellung

$$a = m^2 - n^2; \quad b = 2mn; \quad c = m^2 + n^2$$

Sie stellt eine 2-parametrische Lösung dar, wie sie auch Euklid verwendet.

5. **Satz 1 (Euklid)** Sei (x, y, z) ein primitives pythagoreisches Zahlentripel mit geradem y . Dann kann man (x, y, z) in folgender Darstellung angeben

$$x = m^2 - n^2; \quad y = 2mn; \quad z = m^2 + n^2$$

mit $m, n \in \mathbb{N}$ teilerfremd und $m > n > 0$, wobei deren Differenz $m-n$ ungerade ist.

Dieses Vorgehen wird von Euklid in den *Elementen* (Band IX, §28, 29) beschrieben und war vermutlich bereits den Babyloniern (ca. 1500 v. Chr.) bekannt.

- i *Beweis*: Der Beweis ergibt sich unmittelbar durch Nachrechnen:

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 &= (m^2 - n^2)^2 + (2mn)^2 = m^4 - 2m^2n^2 + n^4 + 4m^2n^2 \\ &= m^4 + 2m^2n^2 + n^4 = (m^2 + n^2)^2 = z^2 \end{aligned}$$

- ii *Herleitung der Formel (geometrische Beweis)*: Die Darstellungsform $x^2 + y^2 = z^2$ kann durch Division mit z^2 in die Darstellung $\frac{x^2}{z^2} + \frac{y^2}{z^2} = 1$ überführt werden. Diese Darstellung wird in der Mathematik auch *Kreisgleichung* genannt.

Sei (x, y, z) ein primitives pythagoreisches Zahlentripel und $(\frac{x}{z}, \frac{y}{z}) =: (p, q) \in \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$. So gilt

$$p^2 + q^2 = 1$$

Der Punkt (p, q) liegt offensichtlich auf dem Einheitskreis.

Für $p, q \in \mathbb{Q}$ sei nun $(p, q) \neq (1, 0)$ ein Punkt auf dem Einheitskreis. Wir betrachten die Gerade g , welche durch die zwei Punkte (p, q) und $(1, 0)$ gegeben ist (Abbildung 4.1).

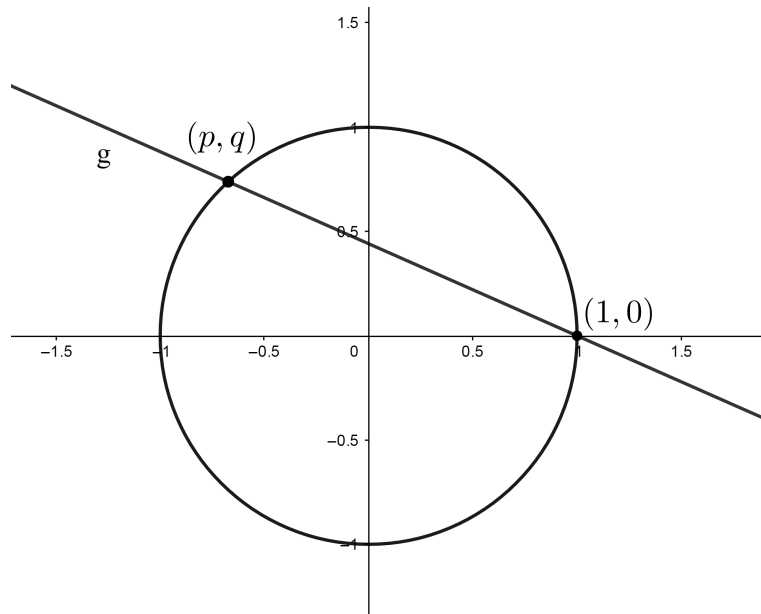


Abbildung 4.1: Gerade g durch (p,q) und $(1,0)$ geschnitten mit dem Einheitskreis

Die Gerade g ist also gleich

$$\{(1, 0) + t((p, q) - (1, 0)) \mid t \in \mathbb{R}\}$$

[Pauer, 2017, S. 82]

bzw. gegeben durch die Gleichung

$$y = \frac{q}{1-p} \cdot (1-x)$$

Diese schneidet die y -Achse im Punkt $(0, \frac{q}{1-p})$. Für $t = \frac{q}{1-p}$ gilt $q = t(1-p)$.

Wir berechnen die Schnittpunkte der Geraden g mit dem Einheitskreis (Abbildung 4.1)

$$\begin{aligned} 1 = p^2 + q^2 &\Leftrightarrow 1 = p^2 + (t(1-p))^2 \\ &\Leftrightarrow 0 = p^2 + t^2 - 2pt^2 + p^2t^2 - 1 \\ &\Leftrightarrow 0 = (1+t^2)p^2 - 2t^2p + t^2 - 1 \end{aligned}$$

Durch geeignetes Umformen (*quadratisches Ergänzen*) erhält man

$$p = \frac{t^2}{1+t^2} \pm \frac{1}{1+t^2}$$

Daraus folgt, dass

$$(p, q) = (1, 0) \quad \text{oder} \quad (p, q) = \left(\frac{t^2 - 1}{t^2 + 1}, \frac{2t}{t^2 + 1} \right)$$

Nach Voraussetzung ist $(p, q) \neq (1, 0)$ und somit lassen sich die Punkte des Einheitskreise folgendermaßen mit nur einem Parameter darstellen

$$(p, q) = \left(\frac{x}{z}, \frac{y}{z} \right) = \left(\frac{t^2 - 1}{t^2 + 1}, \frac{2t}{t^2 + 1} \right)$$

Sei $t \in \mathbb{Q}$ eine rationale Zahl mit $0 < t < 1$. Für $n, m \in \mathbb{N}$ sei t also ein Bruch der Form $t = \frac{n}{m}$, wobei $n < m$.

Nach einer kleiner Zwischenrechnung erhält man

$$(p, q) = \left(\frac{t^2 - 1}{t^2 + 1}, \frac{2t}{t^2 + 1} \right) = \left(\frac{m^2 - n^2}{m^2 + n^2}, \frac{2mn}{m^2 + n^2} \right)$$

Aus diesem Grund kann man durch den Ansatz

$$x = m^2 - n^2; \quad y = 2mn; \quad z = m^2 + n^2$$

alle pythagoreischen Zahlentripel (x, y, z) ermitteln.

Aufgrund der Tatsache, dass man die natürlichen Zahlen m und n , abgesehen von der Bedingung $m > n > 0$, beliebig wählen kann, existieren unendlich viele pythagoreische Zahlentripel.

5 Anwendungsbereich des Satzes

Der Satz des Pythagoras ist viel mehr als nur eine "Formel". Er zeigt typisch mathematische Denk- und Verhaltensweisen. Zudem gilt er als Vorzeigebispiel wie Sätze der Mathematik verallgemeinert und erweitert werden können und stellt eine Quelle für weitere mathematische Problemstellungen dar. Zusammenfassend repräsentiert der Satz des Pythagoras den universellen Charakter der Mathematik. [Weigand et al., 2018, S.7-8]

Das nachstehende Kapitel dient dazu, die Notwendigkeit und Vielfältigkeit des pythagoreischen Lehrsatzes zu verdeutlichen. Wie bereits angesprochen wagten sich zahlreiche Personen den Satz des Pythagoras auf ihre eigene Art zu beweisen. Andere benutzten den Satz um Folgesätze zu finden oder die Gültigkeit ihrer eigenen Sätze zu zeigen. Eine umfassende Behandlung dieses Kapitels würde den Rahmen der vorliegende Arbeit sprengen. Aus diesem Grund wird versucht einen nachvollziehbaren Überblick zu kreieren.

5.1 Längen im rechtwinkligen Dreieck

Für die Verfassung des nachstehenden Abschnitts wurden die Bücher [Weigand et al., 2018], [Agricola and Friedrich, 2005] und [Zeuge, 2018] verwendet.

5.1.1 Die Satzgruppe des Pythagoras

Die Satzgruppe des Pythagoras umfasst neben dem Satz des Pythagoras (*Elemente*, I, §47-48), den Kathetensatz des Euklid (*Elemente*, I, §47) und den Höhensatz des Euklid (*Elemente*, VI, §8). Alle drei Sätze sind eng miteinander verbunden. Aus dem Kathetensatz erhält man den Satz des Pythagoras und aus diesem folgt der Höhensatz.

Der Satz des Pythagoras und dessen Umkehrung

Der Satz des Pythagoras wurde bereits im Kapitel 3 (Definition 1) genannt und ausführlich behandelt.

Die Umkehrung des Satzes wird im folgenden Satz angeführt.

Satz 2 [Umkehrung des Satzes des Pythagoras] Es sei ein Dreieck mit den Seitenlängen a, b, c und es gelte

$$a^2 + b^2 = c^2$$

dann ist das vorliegende Dreieck ein rechtwinkliges Dreieck mit der Hypotenuse c

[Agricola and Friedrich, 2005, S.18]

Beweis: Es sei ein Dreieck $\triangle ABC$ mit den Seitenlängen a, b und c und es gelte der Satz des Pythagoras (Abbildung 5.1 (Dreieck weiß))

$$a^2 + b^2 = c^2$$

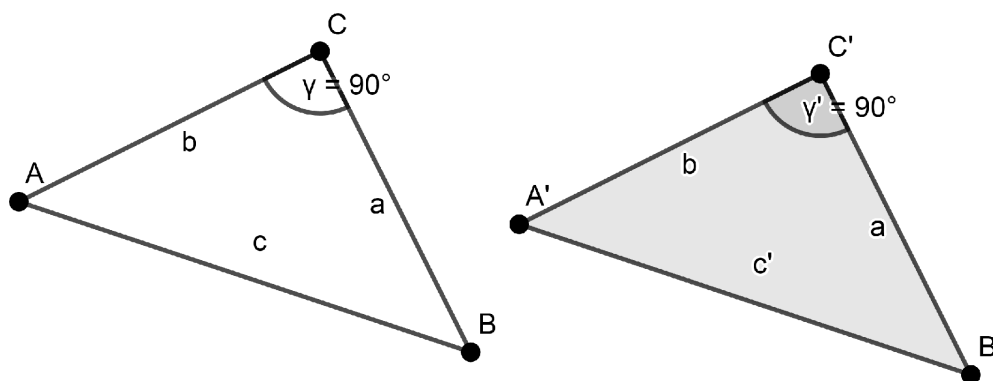


Abbildung 5.1: kongruente rechtwinklige Dreiecke $\triangle ABC$ und $\triangle A'B'C'$

Wir betrachten nun ein rechtwinkliges Dreieck $\triangle A'B'C'$ (Abbildung 5.1 (Dreieck grau)) mit den Katheten a, b , der Hypotenuse c' und dem rechten Winkel γ' . Das rechtwinklige graue Dreieck stimmt also in zwei Seitenlängen mit dem weißen Dreieck überein.

Die Hypotenusenlänge lässt sich mit dem Satz des Pythagoras

$$a^2 + b^2 = c'^2$$

bestimmen.

Somit gilt nach Voraussetzung $c' = c$.

Das heißt die beiden Dreiecke $\triangle ABC$ und $\triangle A'B'C'$ stimmen in drei Seitenlängen überein und sind somit nach dem Kongruenzsatz kongruent. Insbesondere müssen sie auch in den Innenwinkeln übereinstimmen. Es gilt also $\gamma = \gamma' = 90^\circ$. Somit ist das Dreiecke $\triangle ABC$ auch rechtwinklig.

Der Kathetensatz des Euklid

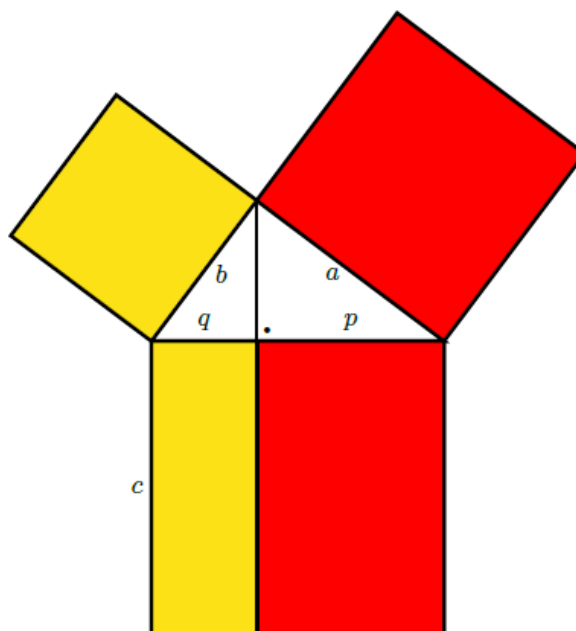


Abbildung 5.2: Kathetensatz des Euklid [Zeuge, 2018, S.23]

Satz 3 (Kathetensatz des Euklid) *Es sei ein rechtwinkliges Dreieck mit den Katheten a, b und der Hypotenuse c . Der Lotfußpunkt (Höhe des Dreiecks) teilt die Hypotenuse in die Strecken q und p . Es gilt:*

$$a^2 = c \cdot p \quad \text{und} \quad b^2 = c \cdot q$$

In Worten: *Das Quadrat über der Kathete a eines rechtwinkligen Dreiecks ist gleich dem Produkt aus der Hypotenuse c und der Strecke p . Das Quadrat über der Kathete b entspricht dem Produkt aus der Hypotenuse c und der Strecke q (Abbildung 5.2).*

Anders formuliert: *Das Quadrat über den Katheten a und b ist flächeninhaltsgleich mit dem Rechteck der Seitenlängen c und p , bzw. c und q .*

Beweis: In Abbildung 5.3 kann man drei rechtwinklige Dreiecke erkennen und es gelte der Satz des Pythagoras

$$a^2 + b^2 = c^2$$

$$h^2 + q^2 = b^2$$

$$h^2 + p^2 = a^2$$

Zudem folgt aus $q + p = c$, dass $(q + p)^2 = c^2$ ist.

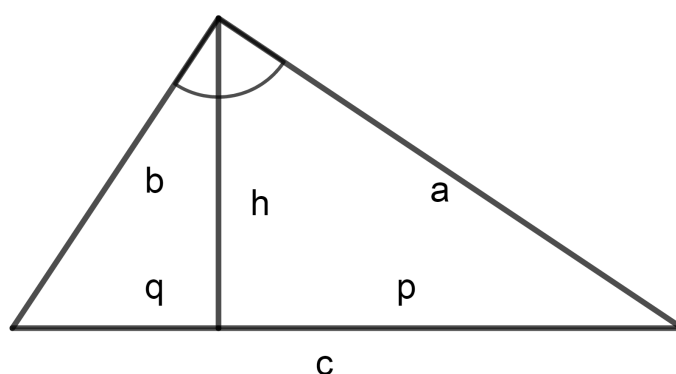


Abbildung 5.3: Drei rechtwinklige Dreiecke

Durch Umformung und Einsetzung erhält man

$$\begin{aligned} a^2 &= c^2 - b^2 = (q + p)^2 - (h^2 + q^2) = q^2 + 2pq + p^2 - (a^2 - p^2 + q^2) \\ &= q^2 + 2pq + p^2 - a^2 + p^2 - q^2 = 2p^2 + 2pq - a^2 \\ &\Leftrightarrow 2a^2 = 2p^2 + 2pq \\ &\Rightarrow a^2 = p(p + q) = pc \end{aligned}$$

Analog wird $b^2 = c \cdot q$ gezeigt.

Aus dem Kathetensatz erhält man unmittelbar den Satz des Pythagoras

$$a^2 + b^2 = (q + p)^2 \cdot c = c^2$$

Der Höhensatz des Euklid

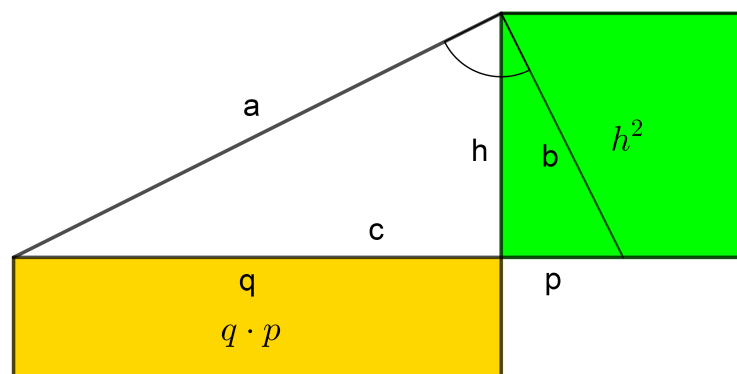


Abbildung 5.4: Höhensatz des Euklid

Satz 4 (Höhensatz des Euklid) *Es sei ein rechtwinkliges Dreieck mit den Katheten a, b und der Hypotenuse c . Der Lotfußpunkt (Höhe h des Dreiecks) teilt die Hypotenuse in die Strecken q und p . Dann gilt:*

$$h^2 = p \cdot q$$

In Worten: *Das Quadrat über die Höhe h ist gleich dem Produkt aus den Hypotenusenabschnitten p und q (Abbildung 5.4).*

Anders formuliert: *Das Quadrat über die Höhe h ist flächeninhaltsgleich mit dem Rechteck der Seitenlängen p und q .*

Ebenso gilt die Umkehrung: Gilt in einem Dreieck der Höhensatz, so ist es rechtwinklig.

Beweis: Es gelten dieselben Voraussetzungen wie im Beweis des Kathetensatzes (Abbildung 5.3).

Durch Umformung und Einsetzung erhält man wiederum

$$\begin{aligned} a^2 + b^2 = c^2 &\Leftrightarrow (h^2 + p^2) + (h^2 + q^2) = (q + p)^2 \\ &\Leftrightarrow h^2 + p^2 + h^2 + q^2 = q^2 + 2pq + p^2 \\ &\Leftrightarrow 2h^2 = 2pq \\ &\Leftrightarrow h^2 = pq \end{aligned}$$

Der Höhensatz des Euklid folgt also unmittelbar aus dem Satz des Pythagoras.

Systematischer Zusammenhang der drei Sätze

Man kann nun leicht nachprüfen dass folgende Implikationen gelten

$$\text{Kathetensatz} \Rightarrow \text{Satz des Pythagoras} \Rightarrow \text{Höhensatz} \Rightarrow \text{Kathetensatz}$$

Beweis:

Kathetensatz $\Rightarrow$ *Satz des Pythagoras*: Durch die Addition von $a^2 = c \cdot p$ und $b^2 = c \cdot q$ folgt unmittelbar der Satz des Pythagoras

$$a^2 + b^2 = c \cdot p + c \cdot q = c \cdot (p + q) = c \cdot c = c^2$$

Satz des Pythagoras $\Rightarrow$ *Höhensatz*: Addiert man die beiden Gleichungen $a^2 = h^2 + p^2$ und $b^2 = h^2 + q^2$ (Abbildung 5.3) erhält man

$$a^2 + b^2 = 2h^2 + p^2 + q^2 \tag{5.1}$$

$$\text{Zudem gelte} \quad a^2 + b^2 = c^2 = (p + q)^2 \tag{5.2}$$

Durch Gleichsetzung von (5.1) mit (5.2) ergibt sich der Höhensatz

$$\begin{aligned} 2h^2 + p^2 + q^2 &= (p + q)^2 \Leftrightarrow 2h^2 + p^2 + q^2 = p^2 + 2pq + q^2 \\ &\Leftrightarrow 2h^2 = 2pq \Leftrightarrow h^2 = pq \end{aligned}$$

Höhensatz $\Rightarrow$ *Kathetensatz*: Mit Hilfe der Abbildung 5.3 und dem Höhensatz erhält man

$$a^2 = h^2 + p^2 = p \cdot q + p^2 = p(q + p) = p \cdot c$$

und

$$b^2 = h^2 + q^2 = p \cdot q + q^2 = q(p + q) = q \cdot c$$

Verwendung der Sätze im Schulunterricht

Alle drei Sätze werden im Schulunterricht primär zur Bestimmung fehlender Seiten in rechtwinkligen Dreiecken verwendet.

Dabei wird die "Formel" entweder auf die zu bestimmende Seite umgeformt; zum Beispiel folgt aus $a^2 + b^2 = c^2$, dass $c = \sqrt{a^2 + b^2}$ bzw. $a = \sqrt{c^2 - b^2}$ bzw. $b = \sqrt{c^2 - a^2}$ gilt, oder in eine Gleichung mit einer Unbekannten überführt und anschließend die Lösungsmenge bestimmt. Zum Beispiel

Gegeben : $p = 4$

$h = 8$

Gesucht : q

Nach dem Höhensatz des Euklid gilt $h^2 = p \cdot q$ und somit

$$h^2 = p \cdot q \Rightarrow 8^2 = 4 \cdot q \Rightarrow 64 = 4 \cdot q \Rightarrow q = 16$$

Hinweis: Der Anwendungsbereich kann auf beliebige ebene Figuren erweitert werden, indem man die Figuren in rechtwinklige Dreiecke zerlegt. In Abbildung 5.5 wird beispielsweise die Zerlegung eines Trapez in rechtwinklige Dreiecke dargestellt.

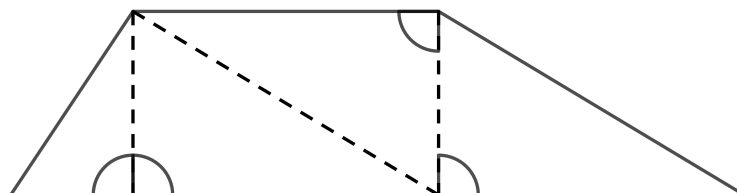


Abbildung 5.5: Zerlegung eines Trapez in vier rechtwinklige Dreiecke

5.2 Anwendung in Körpern

Die Anwendung des pythagoreischen Lehrsatzes ist auf die Berechnung von Längen innerhalb jeglichen Körper erweiterbar. In jedem mathematischen Körper verstecken sich zahlreiche rechtwinklige Dreiecke. Das grundlegende Konzept besteht im Erkennen von rechtwinkligen Dreiecken. Mit Hilfe dieser Vorgehensweise kann man fehlende Längen, welche zur Berechnung einer Fläche oder des Volumens benötigt werden, ermitteln. In Abbildung 5.6 wird anhand einer Pyramide die Vielfältigkeit der Einschreibung von rechtwinkligen Dreiecken verdeutlicht.

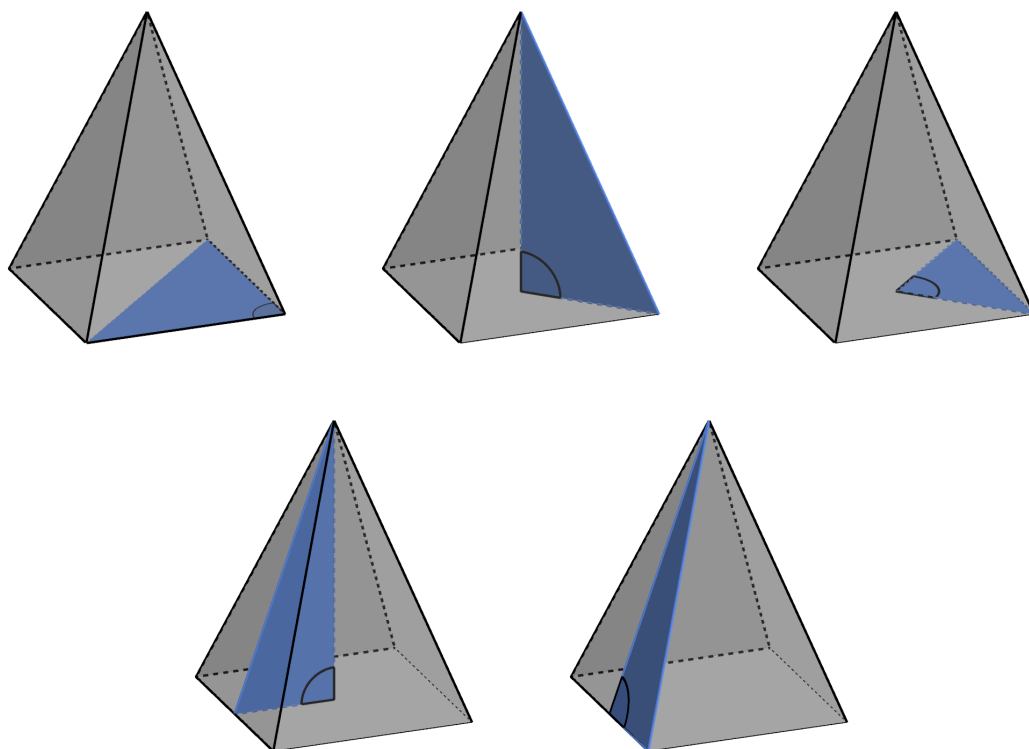


Abbildung 5.6: Rechtwinklige Dreiecke, eingeschrieben in quadratische Pyramiden

5.3 Irrationalität

Die Entdeckung der Irrationalität führte zur ersten bewusst durchgeführten Zahlbereichserweiterung in der Geschichte der Mathematik [Eschenburg, 2017, S.7]. Die Entdeckung dieser neuen Zahlen wurde den Griechen zugeschrieben. Beim Versuch die Arithmetik der rationalen Zahlen auf eine geometrische Problemstellung anzuwenden, führte zu einer Krise im

Verständnis der bisherigen Mathematik. [Maor, 1989, S.63]

Ob tatsächlich Pythagoras die Irrationalität entdeckte oder einer seiner Anhänger ist eine umstrittene Frage.

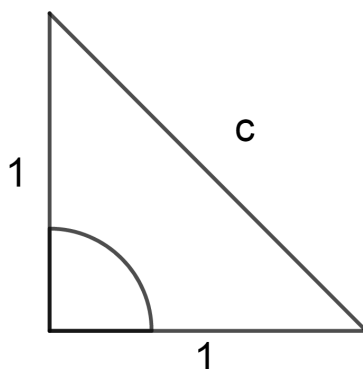


Abbildung 5.7: Gleichschenkliges, rechtwinkliges Dreieck ($a=b=1$)

Ausgehend von einem gleichschenkligen, rechtwinkligen Dreieck mit den Katheten $a = b = 1$ und der Hypotenuse c (Abbildung 5.7), stieß man auf die Inkommensurabilität der Einheiten.

Die Anwendung des pythagoreischen Lehrsatzes auf das in Abbildung 5.7 dargestellte Dreieck, liefert

$$1^2 + 1^2 = c^2$$

$$1 + 1 = c^2$$

$$2 = c^2$$

$$\sqrt{2} = c$$

Die Griechen nahmen an, dass es sich bei $\sqrt{2}$ um eine rationale Zahl handelt. Bis zu diesem Zeitpunkt kannte die Menschheit keine anderen Zahlen. Eines Tages machte ein Mitglied der Pythagoreer, vielleicht Pythagoras selbst, die Entdeckung, dass $\sqrt{2}$ und die gegebene Einheit inkommensurabel sind. Das bedeutet, die Einheiten haben kein gemeinsames Maß. Dies ist gleichbedeutend zur Aussage, dass sich $\sqrt{2}$ nicht als Bruch zweier ganzen Zahlen darstellen lässt. Man stieß auf eine Zahl, die man weder den ganzen Zahlen zuordnen konnte, noch als Verhältnis ganzer Zahlen darstellbar war. [Maor, 1989, S.64]

In anderen Worten ausgedrückt: Die Aufgabe $x^2 = 2$ liefert keine Lösung im Zahlenbereich der rationalen Zahlen [Jones, 1956, S.285].

Geben wir nun einen Beweis dafür, dass es sich bei $\sqrt{2}$ tatsächlich nicht um eine rationale Zahl handelt. Der Beweis geht auf Pythagoras zurück und stellt einen Widerspruchsbeweis dar.

Beweis: Annahme: $\sqrt{2}$ ist rational

Wenn $\sqrt{2}$ eine rationale Zahl ist, dann lässt sie sich als Bruch zweier ganzer Zahlen z und n darstellen. Es gilt $\sqrt{2} = \frac{z}{n}$, wobei $\text{ggT}(z, n) = 1$ ist. Demnach gilt

$$2 = \frac{z^2}{n^2} \Leftrightarrow z^2 = 2 \cdot n^2 \quad (5.3)$$

Daraus folgt, dass z^2 gerade ist und somit auch z gerade. Demzufolge lässt sich z als $2 \cdot k$ mit $k \in \mathbb{N}$ schreiben.

Durch Einsetzung in (5.3) erhält man

$$(2 \cdot k)^2 = 2 \cdot n^2 \Leftrightarrow 4 \cdot k^2 = 2 \cdot n^2 \Leftrightarrow 2 \cdot k^2 = n^2$$

Daraus ergibt sich, dass n^2 gerade und somit auch n gerade ist. Das heißt z und n besitzen den gemeinsamen Teiler 2. Dies liefert aber einen Widerspruch zur getroffenen Annahme, dass $\text{ggT}(z, n) = 1$ gilt und somit kann $\sqrt{2}$ nicht rational sein. [Wiedijk, 2004, S.380]

Exkurs: Der Zahlenwert $\sqrt{2}$ ist unmöglich exakt zu berechnen, da hierfür unendlich viele Dezimalstellen benötigt werden. Jedoch existieren mehrere Algorithmen den Wert beliebig genau zu approximieren. Abbildung 5.8 liefert eine Methode den Wert $\sqrt{2}$ exakt als Punkt entlang der Zahlengerade darzustellen.

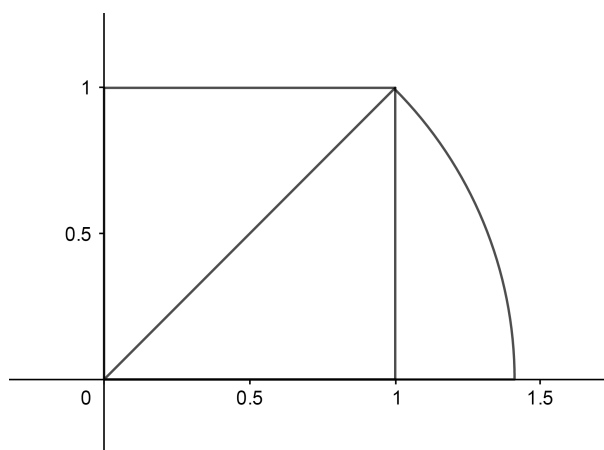


Abbildung 5.8: Darstellung der Zahl $\sqrt{2}$ mit Hilfe der Zahlengeraden

Zunächst wird das Einheitsquadrat (Quadrat mit den Seitenlängen 1) und dessen Diagonale gezeichnet. Anschließend wird ein Kreis mit dem Mittelpunkt $(0, 0)$, dessen Radius die Länge der Diagonale misst, gezogen. Die Schnittstelle des Kreises mit der x-Achse stellt die gesuchte Zahl $\sqrt{2}$ an der Zahlengerade dar.

5.4 Der große Fermatsche Satz

Die Ideen für diesen Abschnitt wurden aus [Aigner and Behrends, 2016] ermittelt.

Pierre de Fermat (1601-1665) war ein französischer Mathematiker und Jurist. Fermat stellte um das Jahr 1673 die Vermutung auf, dass es für eine natürliche Zahl n mit $n > 2$ keine von Null verschiedene, ganze Zahlen x, y, z gibt, welche der Gleichung

$$x^n + y^n = z^n$$

genügen.

5.4.1 Wie kam es zu dieser Vermutung?

In einem rechtwinkligen Dreieck mit den Katheten a, b und der Hypotenuse c gilt nach Pythagoras

$$a^2 + b^2 = c^2$$

Die Größen müssen dabei nicht zwingend ganzzahlig sein. Beispielweise folgt aus $a = 2$ und $b = 3$, dass die Hypotenuse c den Wert $\sqrt{13} \approx 3,6056$ annimmt.

Die Frage ob es positive, natürliche Zahlen gibt, welche die Gleichung $a^2 + b^2 = c^2$ erfüllen, ist mit Ja zu beantworten. Dabei handelt es sich nämlich um die pythagoreischen Zahlentripel, welche im Kapitel 4 genauer erläutert wurden.

Im Hinblick auf die pythagoreischen Zahlentripel stellte sich Fermat die Frage, wie viele Zahlentripel (x, y, z) es für $n \geq 3$ gäbe, wenn x, y, z positive, natürliche Zahlen sind.

Fermat kam nach gründlicher Untersuchung zum Entschluss, dass es kein einziges Zahlentripel (x, y, z) gibt, welches die zuvor genannten Bedingungen erfüllt. Dieses Erkenntnis ließ er dann in seinem Werk *Arithmetica* einfließen.

5.4.2 Beweisskizze

Fermats Beobachtungen konnte man nur einen Beweis für $n = 4$ entnehmen. Er verwendete dabei seine *Methode des unendlichen Abstiegs*. Ausgehend von einem Tripel (x, y, z) aus positiven, natürlichen Zahlen, welche der Gleichung

$$x^4 + y^4 = z^4$$

genügen, nahm er noch ein weiteres Tripel (x_1, y_1, z_1) mit denselben Voraussetzungen und den Eigenschaften

$$x_1^4 + y_1^4 = z_1^4$$
$$\text{und } x_1 \leq x, y_1 \leq y, z_1 \leq z$$

Fermat fuhr auf diese Weise fort und fand unendlich viele Zahlentripel, welche einerseits die Gleichung $x^4 + y^4 = z^4$ erfüllen, andererseits immer kleiner werden. Sie können sogar beliebig klein werden. Dies stellt einen Widerspruch zur getroffenen Annahme, dass es sich um positive, natürliche Zahlen handelt.

Nach Fermats Tod versuchten sich viele Mathematiker daran, den Beweis der Fermatschen Vermutung zu vervollständigen. Unter ihnen waren Mathematiker wie Leonhard Euler, Peter Gustav Lejeune Dirichlet und Augustin Louis Cauchy. Dank der vielen Mathematiker kennt man heute die Beweise des letzten Fermatschen Satz für $n = 3, n = 5, n = 7$ und $n = l$, wobei l eine Primzahl kleiner 100 (mit Ausnahme von 37, 59, 67) ist. Trotzdem gibt es einige "Fermat-Gegner", welche die Gültigkeit der Fermatschen Vermutung anzweifeln.

5.5 Euklidische Abstand

Der Abstand $\overline{AB}$ (Abbildung 5.9) zweier Punkte $A = (a_1, a_2)$ und $B = (b_1, b_2)$ im $\mathbb{R}^2$, genauer gesagt, im kartesischen Koordinatensystem (*orthogonales System*), ist nach dem Satz des Pythagoras

$$\overline{AB} = \sqrt{(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2}$$

[Pauer, 2017, S.102]

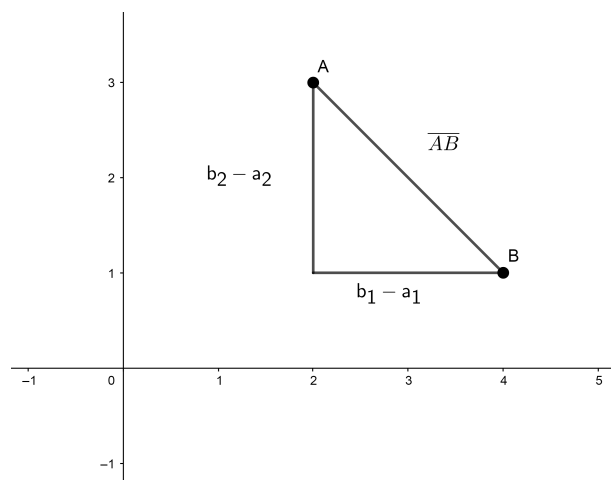


Abbildung 5.9: Euklidische Abstand im kartesischen Koordinatensystem

Diese Definition ist auf ganz $\mathbb{R}^n$, bzw. dem euklidischen Raum erweiterbar. Dadurch werden euklidische Räume zugleich metrische Räume. Der Abstand $\overline{PQ}$ zweier Punkte $P = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ und $Q = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ ist in diesem Fall folgendermaßen definiert

$$\overline{PQ} = \sqrt{(y_1 - x_1)^2 + (y_2 - x_2)^2 + \dots + (y_n - x_n)^2}$$

[Agricola and Friedrich, 2005, S.1]

5.6 Trigonometrische Pythagoras

Für die trigonometrischen Funktionen sind zahlreiche Identitäten bekannt.

Dieser Abschnitt beschäftigt sich speziell mit dem sogenannten *Trigonometrischen Pythagoras* [Leppmeier and Wills, 2013, S.33]. Die Aufarbeitung der folgenden Definitionen bedurfte das Skriptum [Hell, 2012].

Zunächst betrachten wir den Einheitskreis. In der Mathematik wird als Einheitskreis, ein Kreis im $\mathbb{R}^2$ mit Radius 1 um den Koordinatenursprung verstanden. Der Einheitskreis entspricht der Menge

$$S^1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$$

Werden die Winkel im Bogenmaß angegeben, beträgt der Umfang des Einheitskreises 2π . Die Drehung des Punktes $(1, 0)$ um den Winkel φ liefert den Punkt $P_\varphi \in S^1$ am Einheitskreis (Abbildung 5.10).

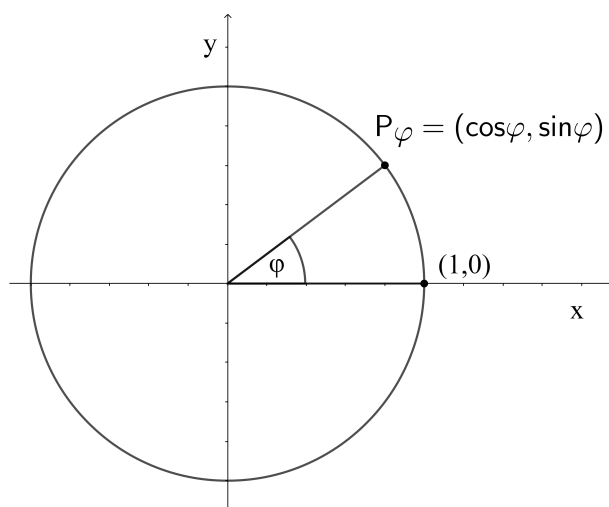


Abbildung 5.10: Sinus und Cosinus am Einheitskreis

Für $\varphi > 0$ wird eine Drehung im Gegenuhrzeigersinn und für $\varphi < 0$ eine Drehung im Uhrzeigersinn verstanden. Die erste Koordinate des Punktes P_φ bezeichnen wir als **Cosinus** des Winkel φ und die Zweite als **Sinus** von φ . Hiermit werden die reellen Funktionen

$$\cos : \mathbb{R} \rightarrow [-1, 1] : \varphi \mapsto \cos \varphi \quad \text{und} \quad \sin : \mathbb{R} \rightarrow [-1, 1] : \varphi \mapsto \sin \varphi$$

am Einheitskreis definiert.

Mit Hilfe des pythagoreischen Lehrsatzes kann die Gültigkeit der *Elementaren Identität*

$$\sin^2 \varphi + \cos^2 \varphi = 1$$

leicht nachgeprüft werden.

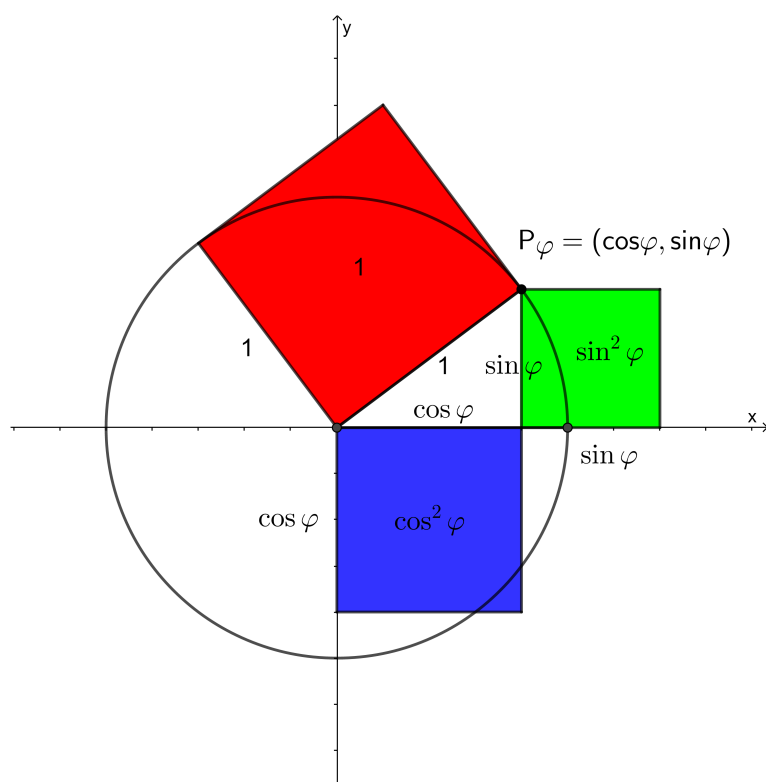


Abbildung 5.11: Elementare Identität: Satz des Pythagoras

Abbildung 5.11 liefert eine Beweisskizze für den Trigonometrischen Pythagoras.

5.7 Betrag einer komplexen Zahl

Die Definitionen für die Verfassung des Abschnittes wurden aus [Pauer, 2013, S.101] und [Hell, 2012, S.35] entnommen.

Sei $\mathbb{R}$ der Körper der reellen Zahlen. Die Menge $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ bildet mit der Addition

$$+ : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2 : ((x_1, y_1), (x_2, y_2)) \mapsto (x_1, y_1) + (x_2, y_2) := (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$$

und der Multiplikation

$$\cdot : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2 : ((x_1, y_1), (x_2, y_2)) \mapsto (x_1, y_1) \cdot (x_2, y_2) := (x_1 x_2 - y_1 y_2, x_1 y_2 + x_2 y_1)$$

den Körper der komplexen Zahlen, welcher mit $\mathbb{C}$ bezeichnet wird.

Für $z = (x, y) \in \mathbb{C}$ schreiben wir $z = x + iy := (x, 0) + i(y, 0)$, wobei $x, y \in \mathbb{R}$ sind. Dabei nennt man $\operatorname{Re}(z) := x$ und $\operatorname{Im}(z) := y$ den **Realteil**, bzw. den **Imaginärteil** von z . Die *konjugiert komplexe* Zahl zu $x+iy$ lautet $x-iy$ und wird durch $\bar{z} = \overline{x+iy} = x-iy$ angegeben.

Komplexe Zahlen können mit Hilfe der *Gauß'schen Zahlenebene* als Punkte dargestellt werden. Dabei wird der Realteil auf der waagrechten, und der Imaginärteil auf der senkrechten Achse aufgetragen.

Satz 5 Für jede komplexe Zahl z liefert

$$z \cdot \bar{z} = |z|^2 = \operatorname{Re}(z)^2 + \operatorname{Im}(z)^2$$

eine (nicht negative) reelle Zahl

Definition 4 (Betrag einer komplexen Zahl) Sei $z = x + iy \in \mathbb{C}$ eine komplexe Zahl. Die (nicht negative) reelle Zahl

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

nennt man den **Betrag** der komplexen Zahl $z \in \mathbb{C}$.

Beweis: Der Beweis folgt unmittelbar durch nachrechnen

$$\begin{aligned} |z|^2 &= z \cdot \bar{z} = (x + iy) \cdot (x - iy) \stackrel{\text{def}}{=} x^2 + y^2 \\ \Rightarrow |z| &= \sqrt{x^2 + y^2} \end{aligned}$$

Aufgrund des pythagoreischen Lehrsatzes wird der Betrag einer komplexen Zahl $z = x + iy$ mit dem Abstand von z zum Nullpunkt identifiziert. Die Begründung kann man aus Abbildung 5.12 herleiten.

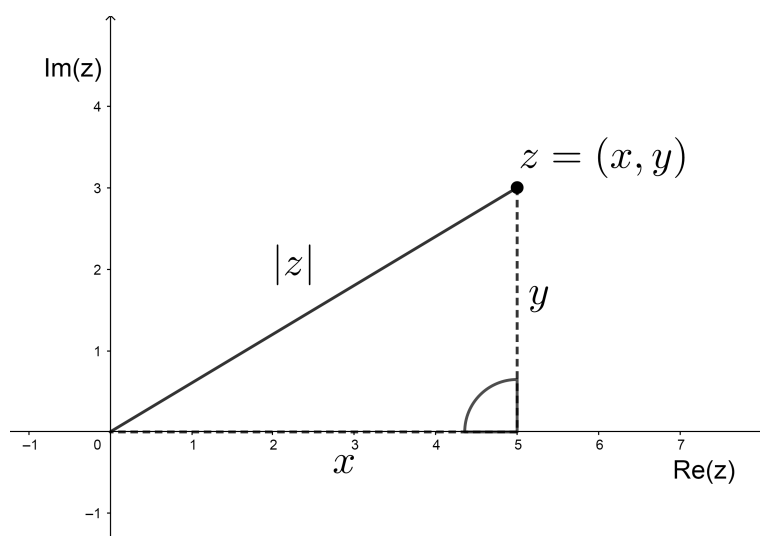


Abbildung 5.12: Darstellung der komplexen Zahl $z = x + iy$ in der Gauß'schen Zahlenebene

5.8 Skalarprodukt

Die Ideen für die nachstehenden Definitionen wurden aus [Pauer, 2017] geschöpft.

Definition 5 (Skalarprodukt) *Ein Skalarprodukt auf einem reellen Vektorraum V ist eine Funktion*

$$\langle -, - \rangle : V \times V \rightarrow \mathbb{R} : (v, w) \mapsto \langle v, w \rangle$$

welche je zwei Vektoren $v, w \in V$ eine reelle Zahl $\langle v, w \rangle$ zuordnet und folgende Eigenschaften besitzt:

- *Symmetrie:* $\forall v, w \in V$ gilt $\langle v, w \rangle = \langle w, v \rangle$
- *Bilinearität:* $\forall u, v, w \in V$ und $\forall c, d \in \mathbb{R}$ gilt

$$\begin{aligned} \langle u, c(v + w) \rangle &= c\langle u, v \rangle + c\langle u, w \rangle \\ \text{und} \quad \langle d(u + v), w \rangle &= d\langle u, w \rangle + d\langle v, w \rangle \end{aligned}$$

- *positiv Definitheit:* $\forall v \in V$ mit $v \neq 0$ ist $\langle v, v \rangle > 0$

Ist auf einem reellen Vektorraum ein Skalarprodukt definiert, liefert dies einen einfachen Beweis des pythagoreischen Lehrsatzes.

Man wählt zwei Punkte v und w entlang der Koordinatenachsen eines rechtwinkligen Koordinatensystems (Abbildung 5.13). Daraus folgt, dass $\langle v, w \rangle = 0$ ist. Die Berechnung des Quadrats des Abstandes von v zu w liefert das gewünschte Ergebnis

$$\|v - w\|^2 = \langle v - w, v - w \rangle = \langle v, v \rangle - \langle v, w \rangle - \langle w, v \rangle + \langle w, w \rangle = \|v\|^2 + \|w\|^2$$

Der Beweis nutzt dabei die Symmetrieeigenschaft des Skalarprodukts aus.

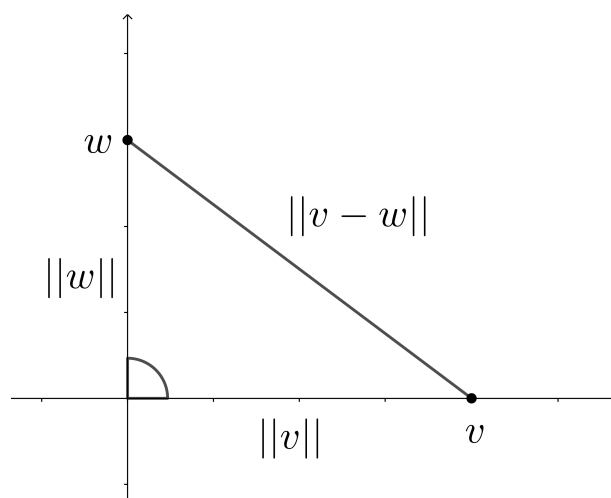


Abbildung 5.13: Beweisskizze: Satz des Pythagoras mittels Skalarprodukt

Umgekehrt kann man mit Hilfe vom Satz des Pythagoras das Skalarprodukt zweier Punkte motivieren.

Im $\mathbb{R}^2$ sind zwei Punkte $A = (x_1, y_1)$ und $B = (x_2, y_2)$ gegeben. Mit Hilfe des pythagoreischen Lehrsatzes kann man nachprüfen ob die Gerade durch 0 und A orthogonal zur Geraden durch 0 und B steht.

Nach Satz 1 gilt in einem rechtwinkligen Dreieck die Beziehung $\overline{AB}^2 = \overline{OA}^2 + \overline{OB}^2$. Wendet man nun den Abstandsbegriff, wie im Abschnitt 5.5 definiert, an, erhält man

$$\text{rechtwinkliges Dreieck} \Leftrightarrow \overline{AB}^2 = \overline{OA}^2 + \overline{OB}^2$$

$$\Leftrightarrow (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 = (x_1^2 + x_2^2) + (y_1^2 + y_2^2)$$

$$\Leftrightarrow (x_1^2 + x_2^2) + (y_1^2 + y_2^2) - (2x_1x_2 + 2y_1y_2) = (x_1^2 + x_2^2) + (y_1^2 + y_2^2)$$

$$\Leftrightarrow x_1x_2 + y_1y_2 = 0$$

Die beiden Geraden stehen also genau dann orthogonal zueinander, wenn

$$x_1x_2 + y_1y_2 = 0$$

gilt (Abbildung 5.14).

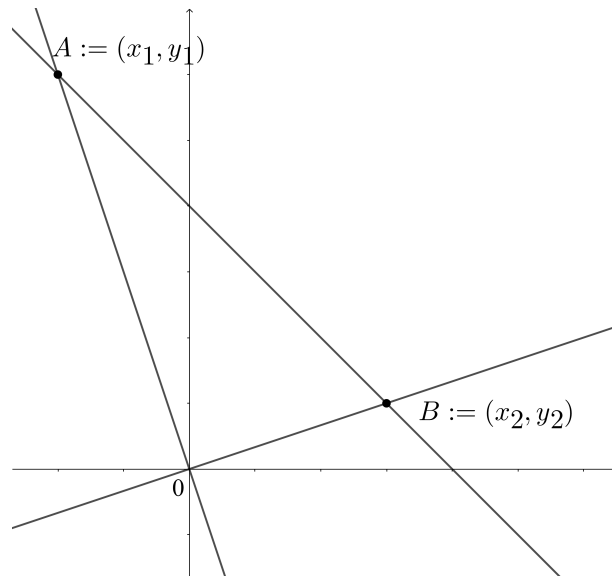


Abbildung 5.14: Beweisskizze: Satz des Pythagoras zum Skalarprodukt

Somit kann man das Skalarprodukt der beiden Punkte A und B durch

$$A \cdot B = x_1x_2 + y_1y_2$$

definieren.

6 Verallgemeinerungen vom Satz des Pythagoras

Im vorherigen Kapitel wurden primäre Anwendungsbereiche des pythagoreischen Lehrsatzes erläutert. Innerhalb diesem Kapitel wird der Satz noch weiter vertieft, um dem Leser bzw. der Leserin einen zusätzlichen Einblick in die Welt des pythagoreischen Lehrsatzes zu bieten. Für den Satz des Pythagoras gibt es vielerlei weiterführende mathematische Konzepte. Aus dem gesamten Repertoire, bezüglich der Verallgemeinerungen vom Satz des Pythagoras, wurden deshalb nur 3 interessante Aspekte ausgewählt und im Nachstehenden genauer unter die Lupe genommen.

6.1 Der Kosinussatz

Definition 6 [Kosinussatz] Sei $\triangle ABC$ ein Dreieck mit den Seitenlängen a, b, c und Winkelgrößen α, β, γ (Abbildung 6.1)

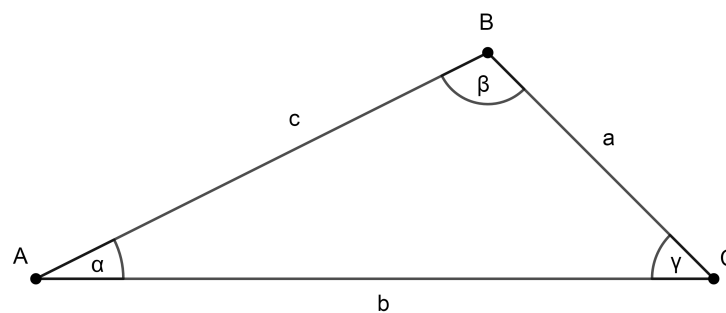


Abbildung 6.1: Dreieck $\triangle ABC$ mit den Seitenlängen a, b, c und Winkelgrößen α, β, γ

Dann gilt

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos \beta$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma$$

Der Satz des Pythagoras gilt genau dann wenn $\cos \gamma = 0$ ist. Für das Bogenmaß eines Winkels im Intervall $(0, \pi)$ erhält man für $\gamma = \frac{\pi}{2}$ die gewünschte Aussage.

Für $\gamma = \frac{\pi}{2}$ gilt also

$$\begin{aligned} c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma &\Leftrightarrow c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \frac{\pi}{2} \\ &\Leftrightarrow c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot 0 \\ &\Leftrightarrow c^2 = a^2 + b^2 \end{aligned}$$

Demzufolge repräsentiert der Kosinussatz im Spezialfall eines vorliegenden rechtwinkligen Dreiecks den Satz des Pythagoras und wird daher als Verallgemeinerung des Satzes verstanden. [Kasten and Vogel, 2018, S.159]

6.2 Flächengleichheit ähnlicher Figuren

Die Aussage über die Flächengleichheit der Quadrate über den Katheten und der Hypotenuse gilt nicht nur für Quadrate, sondern auch für zueinander ähnliche Figuren.

Es handelt sich dabei um ähnliche Figuren (Abbildung 6.2), deren Flächeninhalt A sich mit Hilfe der Formel

$$A = k \cdot s^2$$

berechnen lässt, wobei s für die Seitenlängen der regelmäßigen Polygone steht und k ein figurabhängiger Faktor ist. Ein Ausnahmefall stellt, die in Abbildung 6.2 dargestellte Figur (f), dar. Dabei handelt es sich nicht um regelmäßige Polygone sondern um Halbkreise.

Mit Hilfe der Seitenlängen s und dem Faktor k können die Flächeninhalte der Polygone ermittelt werden. Die Seitenlängen s können variieren, während der Faktor k konstant bleibt:

$$k = 1 : \text{Quadrat}$$

Abbildung 6.2 (a)

$$k = \frac{\sqrt{3}}{4} : \text{gleichseitiges Dreieck}$$

Abbildung 6.2 (b)

$$k = \frac{\sqrt{25 + 10\sqrt{5}}}{4} : \text{regelmäßiges Fünfeck}$$

Abbildung 6.2 (c)

$$k = \frac{3\sqrt{3}}{2} : \text{regelmäßiges Sechseck}$$

Abbildung 6.2 (d)

$$k = 2 \cdot (\sqrt{2} + 1) : \text{regelmäßiges Achteck}$$

Abbildung 6.2 (e)

$$k = \frac{\pi}{8} : \text{Halbkreis}$$

Abbildung 6.2 (f)

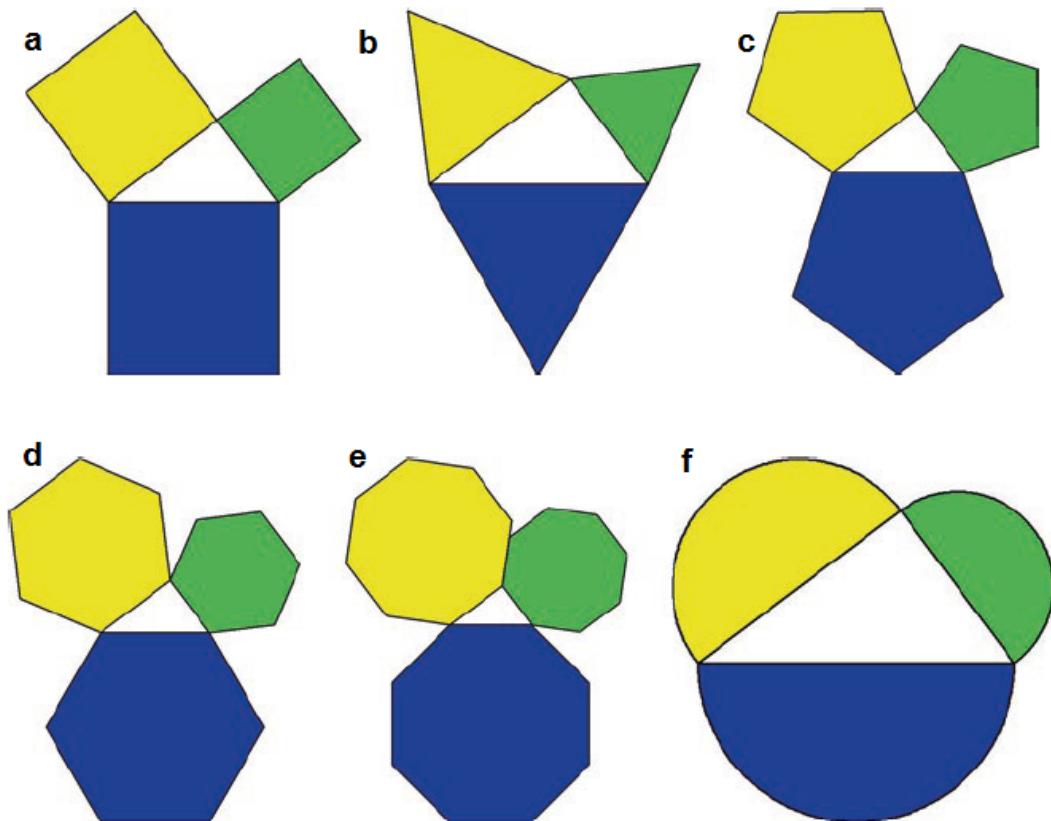


Abbildung 6.2: Flächengleichheit für das Quadrat (a), gleichseitiges Dreieck (b), regelmäßiges Fünfeck (c), regelmäßiges Sechseck (d), regelmäßiges Achteck (e) und Halbkreise (f) [Strick, 2017, S.332]

Die Figur (f) aus Abbildung 6.2 führt direkt zu einem Satz, welchen der griechische Mathematiker Hippokrates von Chios um 450 v. Chr. herausfand. Der Satz ist unter dem Namen „Die Mönchen des Hippokrates“ bekannt.

[Strick, 2017]

6.3 Satz von de Gua

Der Satz von de Gua stellt eine räumliche Variante vom Satz des Pythagoras dar und wird deshalb als Verallgemeinerung bezeichnet. Der Satz wurde nach Jean Paul de Gua de Malves, ein Mathematiker des 18. Jahrhunderts, benannt.

Im Folgenden bezeichnen wir den Flächeninhalt des Dreiecks $\triangle ABC$ mit den Eckpunkten A, B, C (Abbildung 6.3) mit $F_{\triangle ABC}$. Den des Dreiecks $\triangle ABZ$ mit den Eckpunkten A, B, Z mit $F_{\triangle ABZ}$ usw.

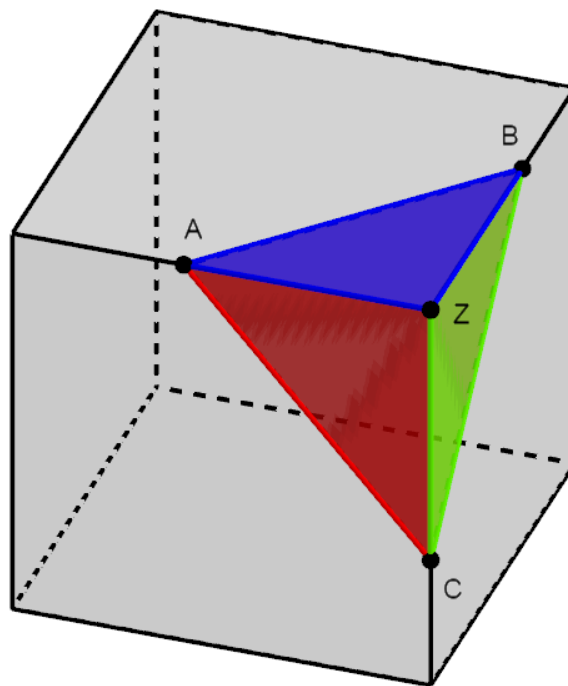


Abbildung 6.3: Satz von de Gua

Satz 6 (Satz von de Gua) *Besitzt ein Tetraeder eine rechtwinklige Ecke, dann gilt*

$$F_{\triangle ABZ}^2 + F_{\triangle ACZ}^2 + F_{\triangle BCZ}^2 = F_{\triangle ABC}^2$$

In Worten: *Besitzt ein Tetraeder eine Ecke, welche durch Ergänzung von drei rechtwinkligen Dreiecken, gebildet wird, dann ist die Summe der quadrierten Flächeninhalte der rechtwinkligen Dreiecke gleich dem quadrierten Flächeninhalt des Dreiecks, welches dem rechtwinkligen Ecke gegenüberliegt.*

7 Einführungsmöglichkeiten in den Unterricht

Die Vielfältigkeit des pythagoreischen Lehrsatzes spiegelt sich auch in dessen Einführung in den Schulunterricht wieder. Der Schwerpunkt kann dabei im Verhältnis von Seiten, in der Gleichheit von Flächen oder in der Beweisführung liegen. Somit kann der Schwerpunkt individuell gesetzt werden. Das folgende Kapitel befasst sich mit zwei typischen, aus dem Schulunterricht bekannte Methoden, den Satz des Pythagoras einzuführen und mit zwei ausgewählten alternativen Einstiegsmöglichkeiten.

7.1 Verankerung im Lehrplan

Im Laufe seiner Schulkarriere ist es unumgänglich den Satz des Pythagoras zu begegnen. Betrachtet man den Lehrplan der Neuen Mittelschule in Österreich, so ist der Satz des Pythagoras sowohl in der 3. Klasse (Abbildung 7.1) als auch in der 4. Klasse (Abbildung 7.2) unter dem Abschnitt *Arbeiten mit Figuren und Körpern* verankert.

3.3 Arbeiten mit Figuren und Körpern

- Vergrößern und Verkleinern von Figuren,
- ähnliche Figuren erkennen und beschreiben;
- Formeln für Flächeninhalte von Dreiecken und Vierecken begründen und damit Flächeninhalte berechnen können,
- Umkehraufgaben lösen können,
- Gegenstände, die die Gestalt eines Prismas oder einer Pyramide haben, zeichnerisch darstellen können,
- Oberfläche, Rauminhalt und Gewicht von Gegenständen, die die Gestalt eines Prismas oder einer Pyramide haben, berechnen können;
- den Lehrsatz des Pythagoras für Berechnungen in ebenen Figuren nutzen können.

Abbildung 7.1: Lehrplan Neue Mittelschule (3.Klasse)
<https://www.ris.bka.gv.at> (aufgerufen am 26.01.2019)

4.3 Arbeiten mit Figuren und Körpern

- den Lehrsatz des Pythagoras für Berechnungen in ebenen Figuren und in Körpern nutzen können,
- eine Begründung des Lehrsatzes des Pythagoras verstehen,
- Berechnungsmöglichkeiten mit Variablen darstellen können;
- Schranken für Umfang und Inhalt des Kreises angeben können,
- Formeln für die Berechnung von Umfang und Flächeninhalt des Kreises wissen und anwenden können,
- Formeln für die Länge eines Kreisbogens und für die Flächeninhalte von Kreisteilen herleiten und anwenden können;
- Formeln für die Berechnung der Oberfläche und des Volumens von Drehzylindern und Drehkegeln sowie für die Kugel erarbeiten und nutzen können.

Abbildung 7.2: Lehrplan Neue Mittelschule (4.Klasse)

<https://www.ris.bka.gv.at> (aufgerufen am 26.01.2019)

In den Rahmenrichtlinien der Südtiroler Mittelschulen ist der Satz des Pythagoras in allen drei Schulstufen unter dem Unterpunkt *Ebene und Raum* anzutreffen (Abbildung 7.3).

	Ebene und Raum
Den Lehrsatz des Pythagoras anwenden In Sachsituationen geometrische Fragestellungen entwickeln und bearbeiten, dabei Computer und andere Hilfsmittel einsetzen	Geometrische Figuren konstruieren auch unter Verwendung entsprechender Software
	Umfang und Flächeninhalt von Vielecken und Kreis berechnen
	Körper skizzieren, Netze zeichnen, Oberfläche und Volumen berechnen
	Satz des Pythagoras in ebenen und räumlichen Figuren anwenden In realen Situationen geometrische Fragestellungen bearbeiten, dabei Computer und andere Hilfsmittel gezielt einsetzen
(a)	(b)

Abbildung 7.3: Rahmenrichtlinien Südtiroler Mittelschule (a) 1. und 2. Klasse, (b) 3.Klasse

<http://www.provinz.bz.it> (aufgerufen am 26.01.2019)

Wie in den Abbildungen 7.1, 7.2 und 7.3 zu erkennen ist, zielen beide Richtlinien zunächst auf die Anwendung des pythagoreischen Lehrsatzes an sich, dann auf die Anwendung in ebenen Figuren und als letzten Schritt auf die Anwendung auf räumliche Figuren, bzw. Körper. Der Lehrplan der Neuen Mittelschule richtet zusätzlich sein Augenmerk auf die Begründung und das Verständnis des unabdingbaren Lehrsatzes.

7.2 Schulbuchanalyse

Im Rahmen dieses Unterkapitels wurden zwei ausgewählte Schulbücher auf das Einführungskonzept vom Satz des Pythagoras analysiert. Obwohl beide Schulbücher denselben Unterrichtsgegenstand einführen, können deutliche Unterschiede vermerkt werden.

7.2.1 Mathematik verstehen 3

Das Buch „*Mathematik verstehen 3*“ von Salzger et al. wurde im Jahr 2016 vom Österreichischen Bundesverlag Schulbuch veröffentlicht. Das Schulbuch ist "Nur zu Prüfzwecken" online verfügbar.

Die Einführung in den Satz des Pythagoras startet mit dem altbekannten Ergänzungsbe-
weis aus Abbildung 7.4. Die Schüler und Schülerinnen sollen dabei die Zusammenhänge der
Flächeninhalte beschreiben und gegebenenfalls nachbasteln.

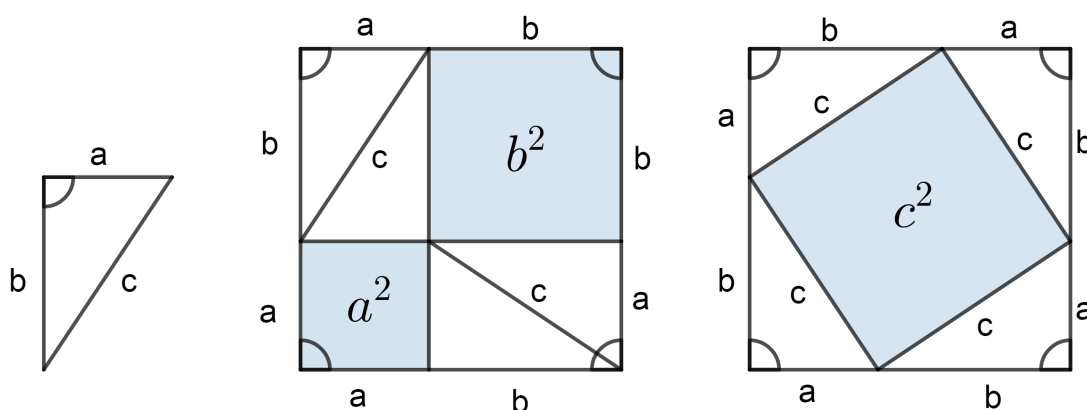


Abbildung 7.4: Ergänzungsbe-
weis

Ziel der Aufgabe ist es, die Kongruenz der Quadrate mit Seitenlänge $a+b$ zu erkennen und somit auf die Formel

$$a^2 + b^2 = c^2$$

zu kommen.

Die Quadrate haben nämlich einen Flächeninhalt von

$$(a + b) \cdot (a + b) = (a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

Die vier rechtwinkligen Dreiecke liefern eine Gesamtfläche von

$$4 \cdot \frac{a \cdot b}{c} = 2 \cdot a \cdot b$$

Insgesamt ergibt sich somit für die blaue Fläche

$$a^2 + 2ab + b^2 - 2ab = a^2 + b^2 = c^2$$

Schon steht der Satz des Pythagoras für das vorgegebene rechtwinklige Dreieck mit den Seitenlängen a, b, c da.

Das Buch arbeitet mit der gewählten Einführung also auf allen drei Ebenen. Zunächst wird durch die Bastelarbeiten die enaktive Ebene angepeilt. Durch das Zusammenlegen der Flächen geht man auf die ikonische Ebene über. Die Erfassung der Ergebnisse mit Hilfe von Buchstaben stellt schlussendlich den Brückenschlag zur symbolische Ebene her. Falls man sich als Lehrperson gegen die Bastelarbeiten entscheidet wird nur auf die ikonische und symbolische Ebene eingegangen.

Nach dem experimentellen Einstieg folgt ein weiterer Beweis des pythagoreischen Lehrsatzes (Abbildung 7.5).

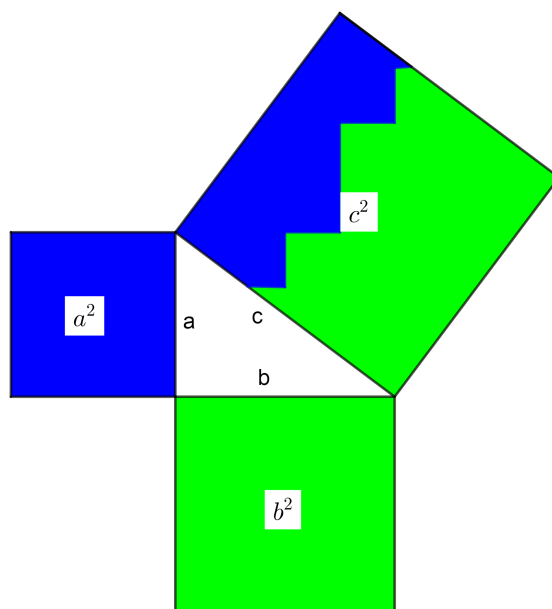


Abbildung 7.5: Beweis: Kathetenquadrate und Hypotenusenquadrat

Der Beweis wird dabei bereits vom Schulbuch vorgeführt. Bevor die Schüler und Schülerinnen den Beweis selbst konstruieren dürfen bietet das Schulbuch einen kleinen geschichtlichen Input zum Satz des Pythagoras.

Im nächsten Schritt thematisiert das Schulbuch indirekt die Fixierung auf die gängige Beschriftung von rechtwinkligen Dreiecken mit den Seitenlängen a, b und c . Damit ist gemeint, dass man auf die Frage nach dem Satz des Pythagoras, häufig die Antwort $a^2 + b^2 = c^2$ bekommt und nicht $Kathete^2 + Kathete^2 = Hypotenuse^2$. Die Assoziation des pythagoreischen Lehrsatzes mit der Formel $a^2 + b^2 = c^2$ ist in der Gesellschaft tief verankert. An und für sich spricht nichts dagegen. Anscheinend handelt es sich hierbei um eine leicht merkbare Formel, welche Schüler und Schülerinnen bis ins Erwachsenenalter verinnerlichen. Auf der anderen Seite verwischt diese Assoziation die Allgemeingültigkeit des Satzes von Pythagoras auf jegliche rechtwinklige Dreiecke. Durch eine kurze Aufgabe, welche in Abbildung 7.6 dargestellt ist, wird versucht diesem Automatismus entgegenzuwirken.

Formuliere den pythagoräischen Lehrsatz mit den Variablen im abgebildeten Dreieck!

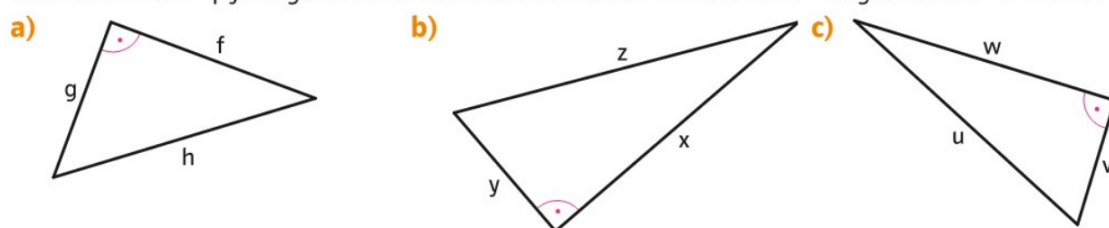


Abbildung 7.6: Formulierung des pythagoreischen Lehrsatzes [Weber, 1999, S.181]

Dem folgen noch weitere Aufgaben zur Flächengleichheit der Kathetenquadrate und dem Hypotenusenquadrat (Abbildung 7.7).

Berechne mit Hilfe des pythagoräischen Lehrsatzes den Flächeninhalt A!

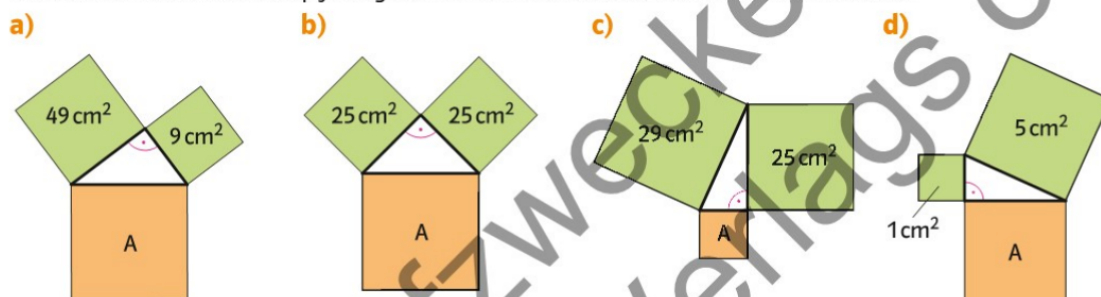


Abbildung 7.7: Aufgaben zum Flächeninhalt [Weber, 1999, S.182]

Im nächsten Schritt geht das Schulbuch auf die Anwendung des pythagoreischen Lehrsatzes zur Ermittlung fehlender Seitenlängen ein. Aufs Ganze gesehen wird die Grundidee zur Berechnung fehlender Seitenlängen als Definition (Abbildung 7.8) eingeführt. Anschließend wird zunächst die reine Anwendung geübt (Abbildung 7.9), bevor außerschulische Anwendungsaufgaben wie beispielsweise in Abbildung 7.10 dargestellt, gelöst werden.

Es seien **a** und **b** die **Kathetenlängen** und **c** die **Hypotenusenlänge** eines rechtwinkligen Dreiecks. Dann gilt nach dem pythagoräischen Lehrsatz:
 $a^2 = c^2 - b^2$ oder $a = \sqrt{c^2 - b^2}$ $b^2 = c^2 - a^2$ oder $b = \sqrt{c^2 - a^2}$ $c^2 = a^2 + b^2$ oder $c = \sqrt{a^2 + b^2}$

Abbildung 7.8: Wechsel der Darstellung des pythagoreischen Lehrsatzes [Weber, 1999, S.183]

Gegeben sind die Kathetenlängen a und b eines rechtwinkligen Dreiecks. Berechne die Länge der Hypotenuse c!

- | | | |
|-------------------------|-------------------------|-------------------------|
| a) a = 15 cm, b = 8 cm | c) a = 7 m, b = 24 m | e) a = 35 cm, b = 12 cm |
| b) a = 20 cm, b = 21 cm | d) a = 45 dm, b = 28 dm | f) a = 11 mm, b = 60 mm |

Gegeben sind eine Kathetenlänge und die Hypotenusenlänge c eines rechtwinkligen Dreiecks. Berechne die Länge der anderen Kathete!

- | | | |
|--------------------------|-------------------------|--------------------------|
| a) a = 16 cm, c = 34 cm | c) b = 48 m, c = 50 m | e) a = 77 cm, c = 85 cm |
| b) b = 20 cm, c = 101 cm | d) a = 40 dm, c = 41 dm | f) b = 90 mm, c = 106 mm |

Abbildung 7.9: Reine Übungsaufgaben [Weber, 1999, S.184]

Für eine neue 5 m breite Garage wird eine schräge Dachkonstruktion geplant. An der höchsten Stelle soll das Dach 3 m und an der niedrigsten 2 m hoch sein. Wie lang muss das Dach sein, wenn es auf beiden Seiten jeweils 30 cm überstehen soll? Runde auf Zentimeter genau!

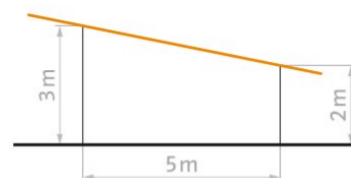


Abbildung 7.10: Anwendungsaufgabe: Satz des Pythagoras [Weber, 1999, S.186]

7.2.2 Genial! Mathematik 3

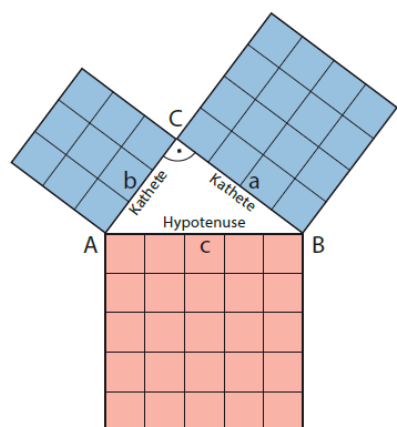
Das Schulbuch „*Genial! Mathematik 3*“, von Beer et al. wurde 2014 als 5. Auflage vom Bildungsv Verlag Lemberger auf den Markt gebracht.

Im Gegensatz zum Schulbuch „Mathematik verstehen 3“ startet dieses Schulbuch nicht gleich mit den geltenden Gesetzmäßigkeiten innerhalb vom Satz des Pythagoras.

Zu Beginn wird die Neugier durch einen Ausflug in die Geschichte des pythagoreischen Lehrsatzes geweckt. Bevor man ans Eingemachte geht, werden alle Voraussetzungen des Satzes durch Übungen wiederholt. Zu den Voraussetzungen, um mit Hilfe des Satzes von Pythagoras, Probleme zu lösen gehören: *das Quadrieren, das Wurzelziehen und der Umgang mit rechtwinklige Dreiecke und deren Beschriftung.*

Nachdem man sich die zuvor genannten Rechenoperationen angeeignet hat und rechtwinklige Dreiecke sowohl erkennt, deren Eigenschaften zu nennen weiß und auch richtig beschriften kann, startet das Schulbuch mit dem Satz des Pythagoras.

Dabei wählt das Buch einen Beweis zum Nachprüfen, welcher in Abbildung 7.11 zu sehen ist.



a) Gib die Seitenlängen an! (1 Kästchen $\triangleq$ 1cm)

$a = \underline{\hspace{1cm}}$ cm $b = \underline{\hspace{1cm}}$ cm $c = \underline{\hspace{1cm}}$ cm

b) Berechne den Flächeninhalt der Quadrate!

$A_1 = a^2 = \underline{\hspace{1cm}}$ cm² $A_2 = b^2 = \underline{\hspace{1cm}}$ cm² $A_3 = c^2 = \underline{\hspace{1cm}}$ cm²

Überprüfe durch Abzählen der Kästchen!

c) Überprüfe durch Einsetzen, ob gilt:

$$\underline{\hspace{1cm}} \text{ cm}^2 + \underline{\hspace{1cm}} \text{ cm}^2 = \underline{\hspace{1cm}} \text{ cm}^2$$

$$\underline{\hspace{1cm}} \text{ cm}^2 = \underline{\hspace{1cm}} \text{ cm}^2$$

Abbildung 7.11: Einführung in den pythagoreischen Lehrsatz [Beer et al., 2014, S.157]

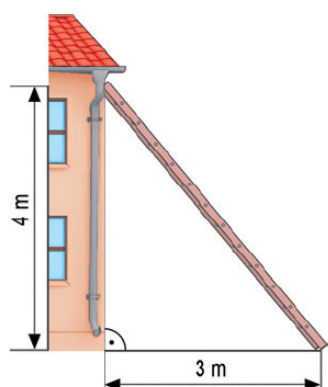
Das Buch vertieft jedoch im Folgenden nicht die Flächengleichheit der Kathetenquadrate mit dem Hypotenusenquadrat, sondern geht gleich auf die Formulierung des pythagoreischen Lehrsatzes für verschiedene rechtwinklige Dreiecke, wie bereits in Abbildung 7.6 dargestellt wurde, über. Auch hier versucht das Schulbuch der Typisierung $a^2 + b^2 = c^2$ entgegenzuwirken.

Im Anschluss befasst sich das Buch mit der Ermittlung von fehlenden Seitenlängen. Auch „*Genial! Mathematik 3*“ wählt dabei die Methode der "Formelumstellung", jedoch gibt dieses

Buch die Definitionen nicht, wie in Abbildung 7.8 ersichtlich, vor, sondern getrennt voneinander an. Nach jeder Freistellung einer Variable (z. B. $c = \sqrt{a^2 + b^2}$) wird diese Vorgangsweise durch reine Anwendung eingeübt.

Anschließend trifft man auch in diesem Schulbuch auf Aufgaben wie in Abbildung 7.7 abgebildet sind und thematisiert somit nur kurz die Flächengleichheit der Quadrate über den Katheten und der Hypotenuse.

Bevor auf außerschulische Anwendungsaufgaben (Abbildung 7.12) des Satzes von Pythagoras eingegangen wird, liefert das Buch den typischen Ergänzungsbeweis aus den altbabylonischen Reich und einen Beweis von Mario Pacek zum nachbasteln. Hiermit bewerkstelligt das Schulbuch das Wechselspiel der drei Ebenen: die enaktive, ikonische und symbolische Ebene.



Eine Leiter wird an eine Hauswand gelehnt.

Mit dem Fußende ist sie 3 Meter von der Wand entfernt. Sie reicht 4 Meter in die Höhe.

- a) Wie lang ist diese Leiter?
- b) Wie lang muss die Leiter sein, wenn das Fußende 6 Meter von der Wand entfernt ist und sie 8 Meter hoch reichen soll?
- c) Überlege einige Sicherheitstipps für das Aufstellen von Leitern! Begründe sie!

Abbildung 7.12: Anwendungsaufgabe: Satz des Pythagoras [Beer et al., 2014, S.162]

7.2.3 Gegenüberstellung

Die beiden Schulbücher beinhalten ähnliche Aufgabenstellungen. Der wesentliche Unterschied der Bücher liegt in der Einführung des Satzes, in der Schwerpunktsetzung und in der Reihenfolge der Anwendungsbereiche.

Während sich das Schulbuch „*Mathematik verstehen 3*“ für die Einführung anhand einer Beweisführung entscheidet, wählt das Buch „*Genial! Mathematik 3*“ eine etwas einfachere Herangehensweise, indem die Herleitung des Satzes mit Hilfe einer Nachprüfung der geltenden Gesetzmäßigkeiten bewerkstelligt wird.

Interessant ist, dass das erste Buch seinen Schwerpunkt mehr auf den Flächenaspekt des pythagoreischen Lehrsatzes legt und das zweite Buch mehr auf den Seitenaspekt. Nichts desto trotz gehen beide Bücher auf den Flächenaspekt, Seitenaspekt und Flächen- und Seitenaspekt ein.

Im Aufbau gibt es auch deutliche Unterschiede. Während im Buch „*Mathematik verstehen 3*“ nachstehende Reihenfolge zu vermerken ist,

Beweis-Definition-Geschichte-Typisierung-Flächenaspekt-Seitenaspekt-Anwendungsaufgaben

entscheidet sich das Schulbuch „*Genial! Mathematik 3*“ für folgende Reihenfolge

Geschichte-Voraussetzungen-Definition-Typisierung-Seitenaspekt-Flächenaspekt-Beweis-Anwendungsaufgaben

um den Satz des Pythagoras abzuarbeiten.

Gedankenanstöße für die Tauglichkeit der Einführungsmethoden im Schulunterricht folgt im letzten Abschnitt dieses Kapitels.

7.3 Experimentelle Zugänge

Die Schule von Heute sollte nicht nur Frontalunterricht, Buch, Heft und Stift bieten, sondern alle möglichen Sinne aktivieren. Im folgenden Abschnitt werden zwei alternative Einführungsmöglichkeiten für den Satz des Pythagoras geboten, welche auf allen drei mathematischen Ebenen arbeiten.

Für die Ausarbeitung des Abschnittes wurden Passagen aus [Weber, 1999] verwendet.

7.3.1 Tischlein deck dich

Problemstellung

Familie Müller bekommt schon wieder Nachwuchs. Anlässlich dieses Ereignisses beschließt die Familie einen neuen quadratischen Tisch anzuschaffen, der doppelt so groß ist wie der alte, der ebenfalls quadratisch war. Da neue Tischdecken viel Geld kosten überlegt sich Familie Müller aus je zwei alten Tischdecken eine neue zu schneiden.

Bearbeitungsschritte

Der Weg zum Satz des Pythagoras erfolgt in 3 Schritten:

1. Man geht davon aus, dass die beiden alten Tischdecken gleich groß sind (Abbildung 7.13)

Die Tischdecken werden entlang der Diagonale zerschnitten und am rechten Winkel aneinandergelegt. Die rechten Winkel bilden das Zentrum der neuen, größeren Tischdecke (Abbildung 7.14) und ergänzen sich zu einem Winkel von 360° .

Aufgrund der Tatsache, dass die vier Teildreiecke zueinander kongruent sind, bilden sie in richtiger Anordnung ein Quadrat.

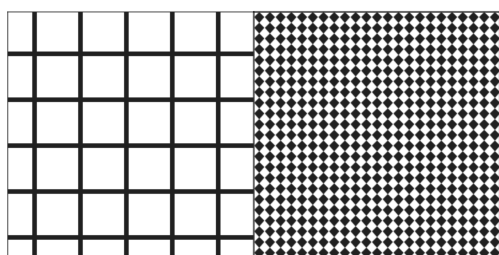


Abbildung 7.13: Zwei gleich große Tischdecken

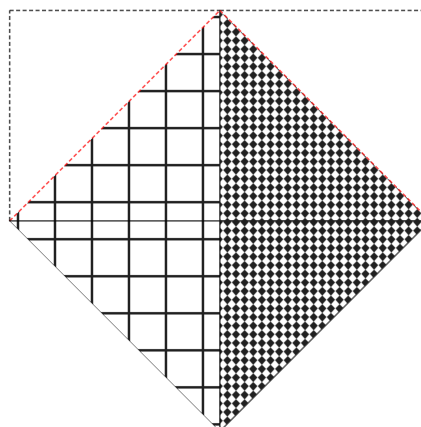


Abbildung 7.14: Neue, größere Tischdecke

2. Die alten Tischdecken sind unterschiedlich groß (Abbildung 7.15)

Wendet man das zuvor gewählte Verfahren an, entsteht keine quadratische Tischdecke. Es darf also nicht entlang der Diagonale geschnitten werden. Der Fehler muss behoben werden, indem man das größere Quadrat zugunsten des kleineren Quadrats verkleinert. Das heißt, es muss durch Probieren, ein Punkt S (Abbildung 7.16) so gefunden werden, dass sich die entstehenden Flächen zu einem Quadrat ergänzen.

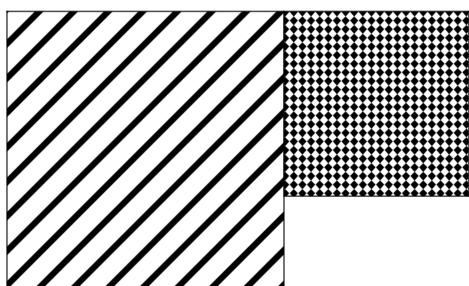


Abbildung 7.15: Unterschiedlich große Tischdecken

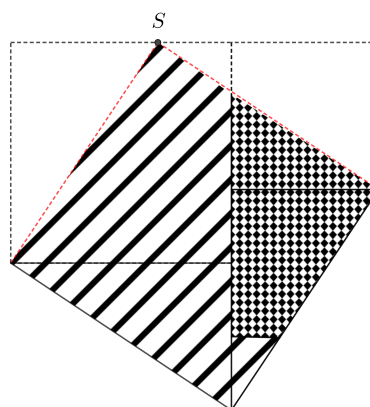


Abbildung 7.16: Neue, größere Tischdecke

3. Brückenschlag zum Satz des Pythagoras

Es gibt mehrere Möglichkeiten den Übergang zum Satz des Pythagoras zu gewährleisten. Eine der einfachsten Methoden besteht darin, die Schüler und Schülerinnen ihre Ergebnisse mit einer vorgegebenen Konstruktion des pythagoreischen Lehrsatzes (Abbildung 7.17) vergleichen zu lassen.

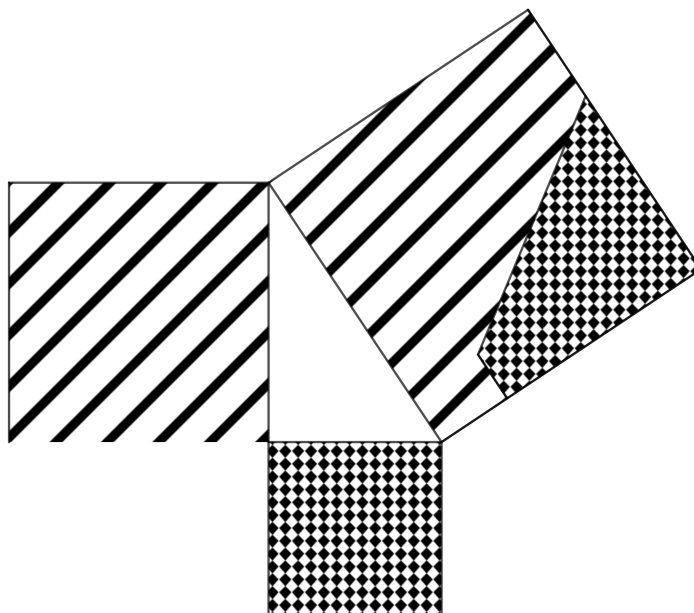


Abbildung 7.17: Konstruktion des pythagoreischen Lehrsatzes

Chancen der Methode

Die Methode bietet den Schüler und Schülerinnen einen experimentellen Zugang zum Satz des Pythagoras. Durch Probieren können die Schüler und Schülerinnen die Konstruktionsweise und somit die Gesetzmäßigkeiten des pythagoreischen Lehrsatzes selbstständig erarbeiten. Das eigenständige Handeln und Experimentieren schafft eine Lernumgebung, in welcher die Schüler und Schülerinnen Freude an der Mathematik empfinden können. Die enaktive, ikonische und symbolische Ebenen reichen sich innerhalb dieser Methode die Hand. Durch die Bastelarbeiten wird die enaktive Ebene aktiviert. Der Übergang zur ikonischen Ebene wird durch die Konstruktionen der größeren Tischdecken bewerkstelligt. Der Schritt zum symbolischen Erfassen des pythagoreischen Lehrsatzes bildet schlussendlich den Brückenschlag hin zur symbolischen Ebene.

7.3.2 Die Seilknüpfer

Die folgende Methode zielt darauf, gemeinsame Gesetzmäßigkeiten für verschiedene Zahlentripel auszusondern und damit die Eigenschaften des pythagoreischen Lehrsatzes im rechtwinkligen Dreieck zu entdecken. Das heißt der Brückenschlag zum Satz des Pythagoras erfolgt mit Hilfe der pythagoreischen Zahlentripel.

Problemstellung

Die Schüler und Schülerinnen arbeiten in Dreiergruppen an einem Knotenseil mit 36 Einheiten. Ob aus einer Kordel selbst das Seil mit 36 Einheiten gebastelt wird oder das fertige Material mitgebracht wird, ist jedem selbst überlassen. In der Gruppe sollen sie rechtwinklige Dreiecke legen, wobei nicht immer die gesamte Seillänge benötigt wird.

Bearbeitungsschritte

Die Erarbeitung des pythagoreischen Lehrsatzes und dessen Beweis erfolgt in 4 Teilschritten:

1. Mit Hilfe der zugrundeliegenden Problemstellung können die Schüler und Schülerinnen die pythagoreische Zahlentripel $(3, 4, 5)$, $(6, 8, 10)$, $(9, 12, 15)$, $(12, 5, 13)$ finden.
2. Unter Verwendung eines rechtwinkligen Suchdiagramms (Abbildung 7.18) können experimentell noch weitere pythagoreische Zahlentripel entdeckt werden.

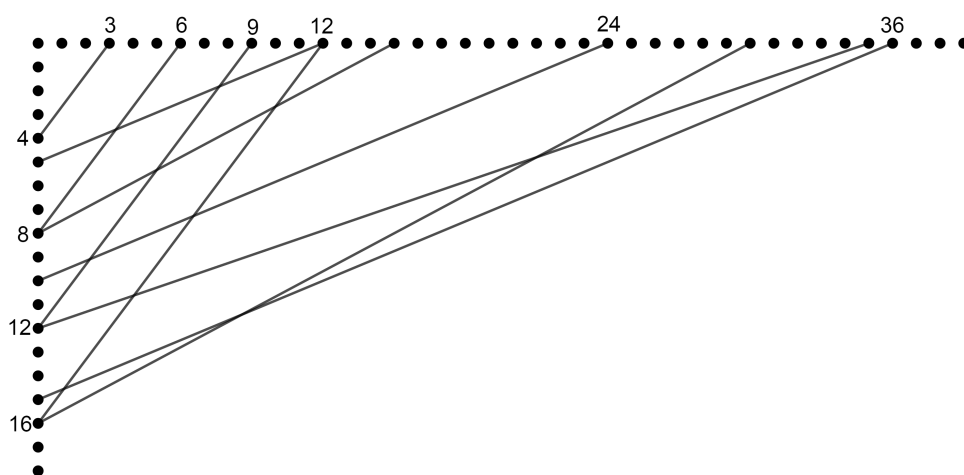


Abbildung 7.18: Rechtwinkliges Suchdiagramm

3. Die Ergebnisse werden in der Gruppe aufgearbeitet. Es wird versucht einen Zusammenhang zwischen den gefundenen Tripeln zu finden und somit gemeinsame Gesetzmäßigkeiten herauszufiltern.

Ziel dabei wäre die pythagoreische Beziehung $Kathete^2 + Kathete^2 = Hypotenuse^2$ zu erkennen.

4. Führen, die im Schritt 3 durchgeführten Überlegungen, zu den Hypothesen

- *Hypothese 1*: Gilt für die Seiten eines Dreiecks,

$$Kathete^2 + Kathete^2 = Hypotenuse^2$$

so ist der gegenüberliegende Winkel der Hypotenuse, ein rechter Winkel.

- *Hypothese 2*: Ist ein Dreieck rechtwinklig, dann gilt die Beziehung

$$Kathete^2 + Kathete^2 = Hypotenuse^2$$

ist man am Ziel angelangt.

Es bleibt nur noch die Hypothesen auf ihre Richtigkeit zu überprüfen.

Dies liefert Schritt 5.

5. Passend zum bisherigen Vorgang bietet sich ein Ergänzungsbeweis an. Dabei werden wiederum Bastelarbeiten benötigt. Aus einem Stück Papier werden zum gegebenen rechtwinkligen Dreieck die *Kathetenquadrate* und das *Hypotenusenquadrat* konstruiert (Abbildung 7.19). Anschließend wird versucht, die in Abbildung 7.20 dargestellten Quadrate mit den Seiten $a+b$, nachzulegen und auf deren Flächengleichheit untersucht.

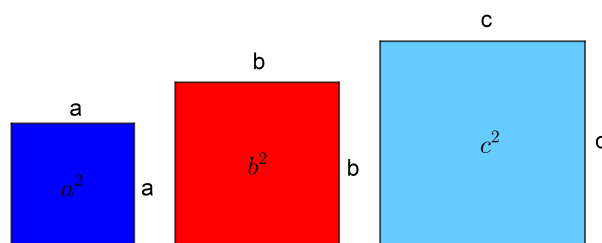


Abbildung 7.19: Kathetenquadrate und Hypotenusenquadrat

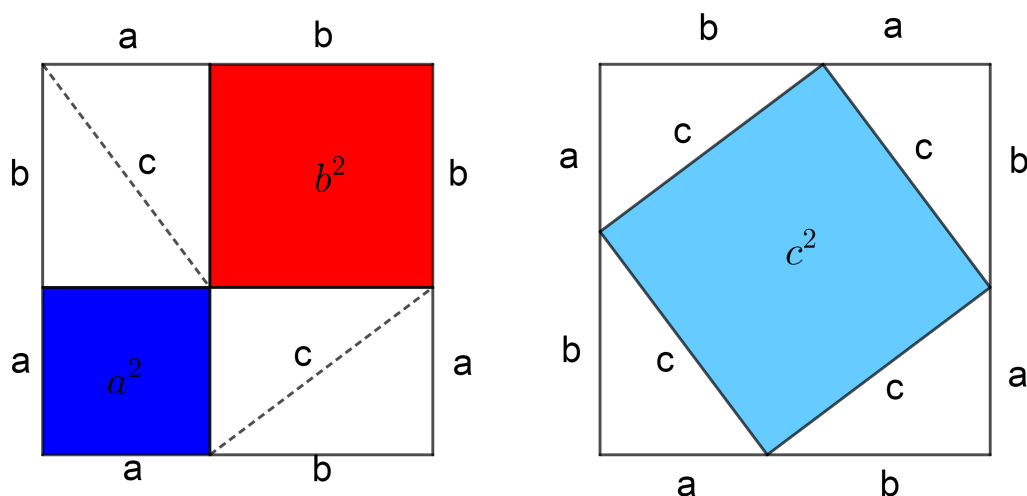


Abbildung 7.20: Ergänzungsbeweis durch Zusammenlegen der Flächen

6. Die Ergebnisse werden zum Abschluss in die Klasse zusammengetragen und nochmals reflektiert. Diese Reflexion dient zur Ergebnissicherung.

Chancen der Methode

Wiederum bietet die Herangehensweise einen experimentellen Zugang zum Satz des Pythagoras. Die Schüler und Schülerinnen können eigenständig durch gefundene pythagoreischen Zahlentripel die, dem Satz des Pythagoras zugrundeliegenden, Gesetzmäßigkeiten herausfinden. Zusätzlich kann mit Hilfe des Ergänzungsbeweises die Glaubwürdigkeit der zugrundeliegenden Thematik bestärkt werden.

Auch bei dieser Methode stehen die enaktive, ikonische und symbolische Ebene im Einklang. Wiederum können sich die Schüler und Schülerinnen durch die Bastelarbeiten enaktiv am Unterrichtsgeschehen beteiligen. Umgekehrt als zuvor, begeben sich die Schüler und Schülerinnen durch die Erstellung der Hypothesen zunächst auf die symbolische Ebene, bevor sie durch den Ergänzungsbeweis direkt auf die ikonische Ebene übergeleitet werden.

7.4 Erforschung der Einführungsmethoden

Prinzipiell kann jede Lehrperson den Satz des Pythagoras nach ihrem Geschmack einführen. Die folgenden, durch Studien belegten, Überlegungen bezüglich der Einführungsmöglichkeiten, soll den Lesern eine Hilfeleistung bei der Wahl ihrer Einführungsmethode geben.

Allgemein zeichnet die Fokussierung auf inhaltlich relevante Aspekte den Unterricht einer guten Lehrperson. Wenn Schüler und Schülerinnen mit dem Konzept vom Satz des Pythagoras vertraut gemacht werden sollen, macht es wenig Sinn den Satz mit einem anspruchsvollen und voraussetzungsreichen Höhensatz einzuführen. Vielversprechend ist dagegen, jene Aspekte hervorzuheben, welche den Satz des Pythagoras kennzeichnen. Dazu gehören, dass der pythagoreische Lehrsatz nur in rechtwinkligen Dreiecken gilt, einen Seiten- und Flächenaspekt repräsentiert und für zwei verschiedene Seitentypen: Kathete und Hypotenuse, Verwendung findet. Zudem ist es wichtig sowohl auf der algebraischen als auch auf der geometrischen Seite zu arbeiten. Kurz gesagt, es muss eine hohe inhaltliche Kohärenz präsent sein. Damit ist gemeint, dass die einzelnen Aspekte zu einem nachvollziehbaren, übergreifenden Ganzen verknüpft werden sollen. [Lipowsky, 2007]

Im Hinblick auf die Einführung vom Satz des Pythagoras spielt die Fähigkeit der Lehrperson, Bedeutung der Thematik zu initiieren, also Schüler und Schülerinnen zu motivieren, eine wichtige Rolle [Prenzel, 2006, S.142].

Deshalb ist es unentbehrlich den Satz des Pythagoras für Schüler und Schülerinnen erlebbar zu machen. Neugier und Offenheit gegenüber Themen und Gegenstände hängt meistens mit der persönlichen Einstellung zusammen und ist somit kaum pädagogisch beeinflussbar. Werte wie Begeisterung, Leidenschaft, Wille, Interesse und Anteilnahme sind hingegen vor allem in Praxissituationen pädagogisch erreichbar. Wo keine emotionale Berührung stattfindet, können auch keine Kompetenzen vermittelt werden. [Erpenbeck and Sauter, 2015, S.187,189]

Um diesen Status noch mehr Wichtigkeit zu verleihen betrachten wir eine Untersuchung von Lernumgebungen. Die Studie zeigt, dass der Leistungszuwachs der Schüler und Schülerinnen im methoden-integrativen Design deutlich höher liegt, als im operativ-strategischen und im direktiven Design. Dies untermauert die Gegebenheit, dass die Konfrontation der Schüler und Schülerinnen mit ihrer außerschulischen Umwelt zu einem erhöhten Leistungszuwachs führt. [Schukajlow and Blum, 2018, S.68,148]

Die Bedeutsamkeit einen Alltagsbezug im Unterricht herzustellen kann auch der Studie mit dem Titel „*Unterrichtsqualität, Lernverhalten und mathematisches Verständnis*“ entnommen werden. Hierbei wird die Beachtung mehr dem Geschichtsteil geschenkt. Der Bezug zum Alltag wird laut Studie durch historische Verknüpfungen verstärkt. Dabei genügt es jedoch nicht zu sagen „Pythagoras war ein Grieche“, sondern mehr von seiner Lebensgeschichte berichtet werden. [Hugener et al., 2006, S.213]

Die Frage ob es sinnvoll sei einen Beweis des pythagoreischen Lehrsatzes in seiner Unterrichtsplanung aufzunehmen ist mit „Ja“ zu beantworten. Der Beweis setzt nämlich zahlreiche Erschließungsprozessen in Gang, welche Kompetenzen auf der aktualgenetischen und historisch-genetischen Ebene fördern. [Wildhirt, 2007, S.44]

Eine weitere Studie befürwortet den Einsatz von Skizzen bei der Bearbeitung vom Satz des Pythagoras. Die Studie befasste sich mit der Wirksamkeit von Skizzen auf die Modellierungsleistung. Sie konnte einen positive Effekt von selbsterstellten Skizzen auf das mathematische Modellieren bestätigen. [Bräuer et al., 2018, S.345].

Im Rahmen dieses Kapitels wurden nun verschiedene Einführungsmethoden genauer beschrieben und auf ihre Tauglichkeit neutral erörtert. Den Lesern steht es nun frei die Stellungnahmen anzunehmen. Die literaturgestützten Beiträge stellen einen Anreiz zur Veränderung oder sogar Verbesserung seiner Unterrichtsmethode dar.

8 Exkurs: GeoGebra

Digitale Medien sind im heutigen Alltag kaum noch wegzudenken und werden deshalb auch vermehrt im Unterricht eingesetzt. Das nachstehende Kapitel dient dazu, dem Leser bzw. der Leserin einen Einblick zu verschaffen, wie der Satz des Pythagoras für Schüler und Schülerinnen mit Hilfe von digitalen Medien erkundbar gemacht werden kann.

Im Rahmen dessen wurde mit der Geometrie-Software GeoGebra gearbeitet, welche vom Österreicher Markus Hohenwarter 2001 [Chip, 2019] entwickelt wurde und sogar über einen Online-Zugriff verfügt.

8.1 Konstruktionsschritte

8.1.1 Voreinstellungen

Falls sich die Software bereits auf dem Rechner befindet, kann diese geöffnet werden. Im Falle des Nichtvorhandenseins der Software, kann diese einfach und legal auf verschiedenste Webseiten heruntergeladen werden (Beispielsweise auf https://www.chip.de/downloads/GeoGebra_20747798.html). Nach der Installation ist die Software betriebsbereit. Beim Öffnen des Programms öffnet sich, das in Abbildung 8.1 dargestellte, Fenster. Das Programm verfügt über eine Menüleiste, Werkzeugleiste, Navigationsleiste und einer Eingabeleiste. Zudem kann man zwischen fünf verschiedenen Ansichten wechseln. Für unsere geometrische Konstruktion benötigen wir nur das kartesische Koordinatensystem.

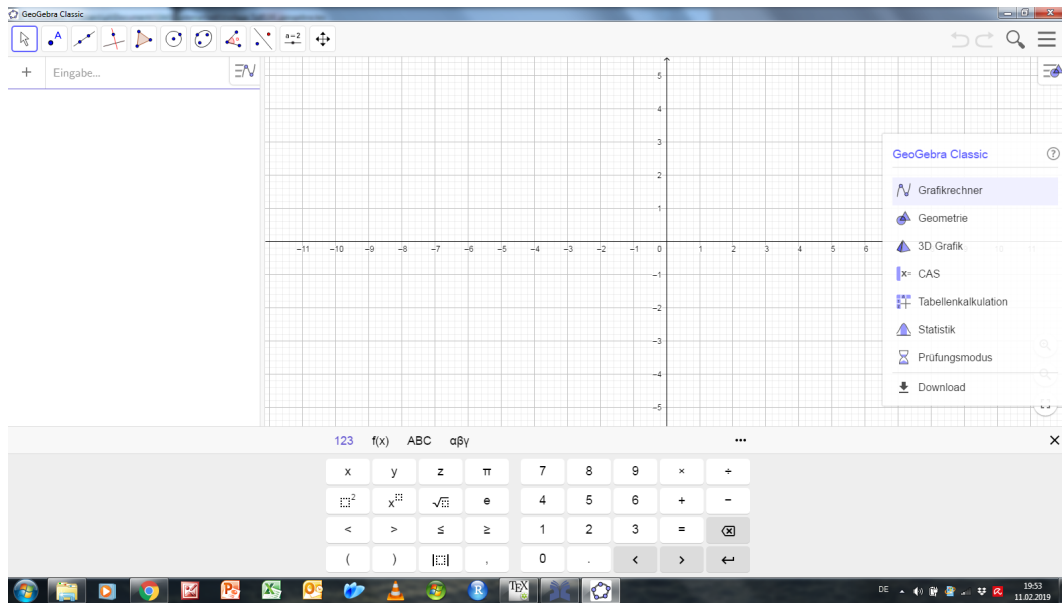


Abbildung 8.1: GeoGebra-Fenster

8.1.2 Konstruktion eines rechtwinkligen Dreiecks

Im vorliegenden kartesischen Koordinatensystem (Abbildung 8.1) kann ein beliebiges rechtwinkliges Dreieck konstruiert werden. Man wählt dabei im Menüpunkt der Flächen das Vieleck (Abbildung 8.2 (a)) aus. Durch Klicken auf das Koordinatensystem werden die Eckpunkte des Dreiecks gezeichnet. Im Anschluss kann man noch die dazugehörigen Winkel einblenden, indem man zuerst auf das Winkelsymbol (Abbildung 8.2 (b)) klickt und dann innerhalb der Dreiecksfläche.

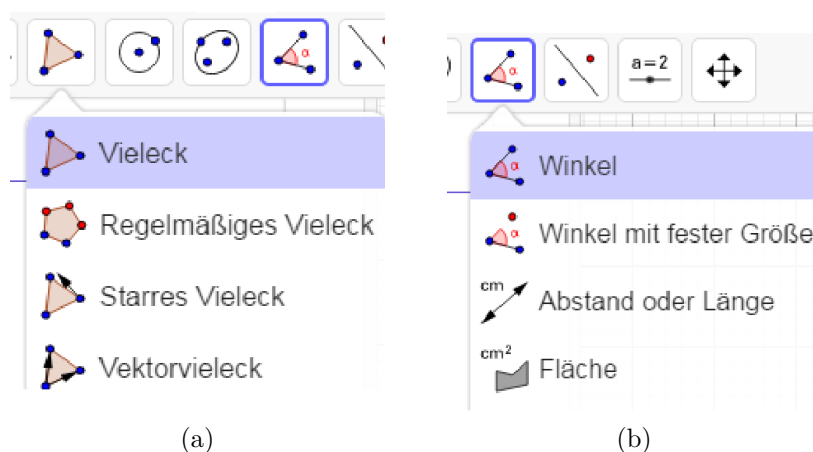


Abbildung 8.2: Symbolleiste: Vieleck und Winkel

8.1.3 Anlegen der Schieberiegler

Abbildung 8.3 zeigt eine Möglichkeit, wie das rechtwinklige Dreieck nach der Konstruktion aussehen könnte.

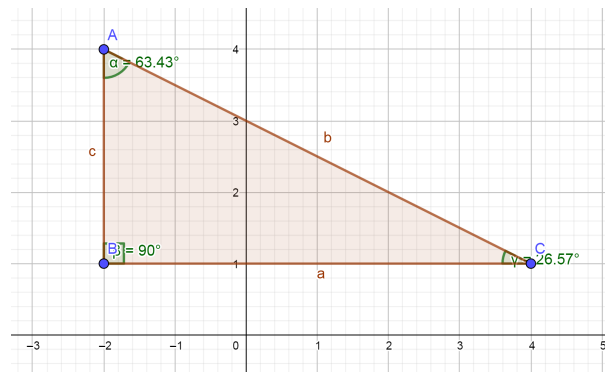


Abbildung 8.3: Konstrukt: Rechtwinkliges Dreieck

Kommen wir nun zum Herzstück der gesamten Konstruktion: das Anlegen der Schieberiegler. Dazu klickt man zunächst auf das Symbol des Schieberieglers (Abbildung 8.4 (a)) und anschließend auf die Zeichenfläche. Es wird ein Schieberiegler erzeugt (Abbildung 8.4 (b)). An dieser Stelle kann man sofort die ersten Formatierungen tätigen, wie beispielsweise den Namen oder die Intervalllänge ändern. Da man drei Punkte bzw. drei Längen gegeben hat und eine Größe aus den anderen Beiden resultiert, benötigt man zwei Schieberiegler. In unserem Beispiel tragen sie den Namen d und e (Abbildung 8.4 (b)).

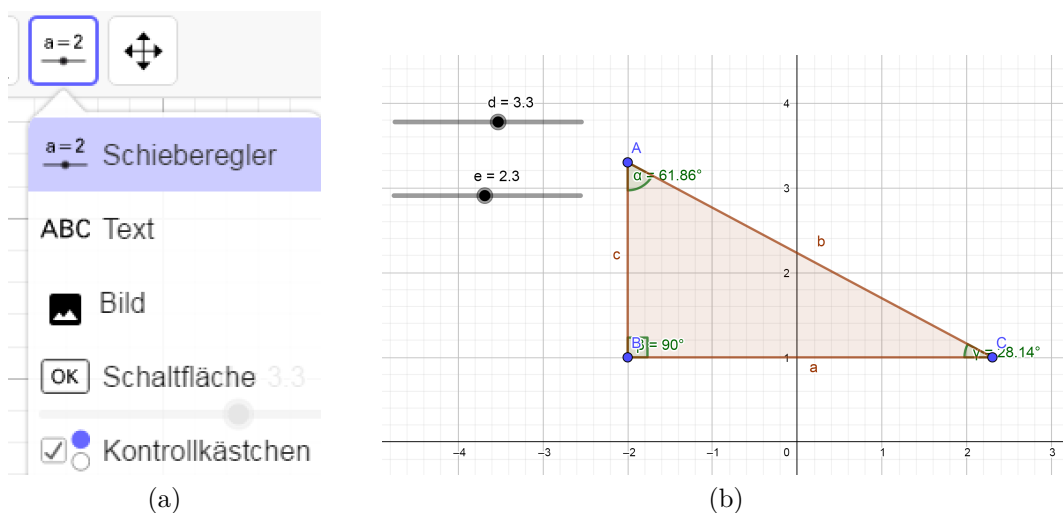


Abbildung 8.4: Anlegen der Schieberiegler

Im nächsten Schritt müssen die Schieberegler an den Punkten angepasst werden. Wir nehmen dabei, die aus Abbildung 8.3 ersichtlichen Punkte, A und C .

Zur Anpassung macht man einen Doppelklick auf den betreffenden Punkt. Es öffnet sich ein Fenster (Abbildung 8.5 (a)), indem man die Koordinaten des Punktes mit dem Schieberegler abstimmen kann. In unserem Beispiel hat der Punkt A die Koordinaten $(-2, 4)$ (Abbildung 8.5 (a)). Punkt A soll entlang der y -Achse regulierbar sein. Deshalb muss man die y -Koordinate an den Schieberegler d anpassen, indem man die Koordinaten des Punktes auf $(-2, d)$ (Abbildung 8.5 (b)) setzt.

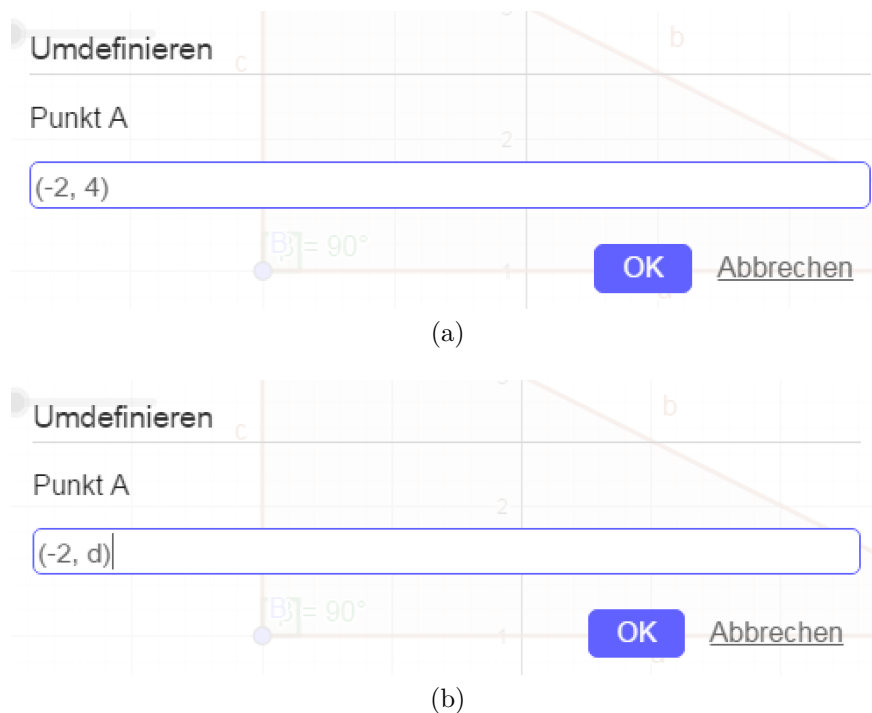


Abbildung 8.5: Anlegen der Schieberiegler

Die Abstimmung des Punktes C erfolgt analog. Die Unterschiede liegen lediglich darin, dass dieser Punkt entlang der x -Achse regulierbar sein muss und somit die x -Koordinate angepasst werden muss und der Schieberegler den Namen e trägt.

Nach Abschluss der Einstellungen sind die Punkte A, C und damit auch die Längen a und c nach belieben verstellbar.

Die Schüler und Schülerinnen könnten nach diesem Schritt die Gültigkeit der Gleichungen

$$b = \sqrt{a^2 + c^2} \quad a = \sqrt{b^2 - c^2} \quad c = \sqrt{b^2 - a^2}$$

nachprüfen, indem sie die Werte der resultierenden Längen in der Navigationsleiste nachlesen.

8.1.4 Anfügen der Quadrate

Um die geltende Gesetzmäßigkeit des pythagoreischen Lehrsatzes bezüglich der Flächengleichheit der Quadrate über den Seiten zu veranschaulichen, benötigt es noch weitere Konstruktionsschritte.

Aus diesem Grund werden sowohl über den Katheten als auch über die Hypotenuse die Quadrate konstruiert.

Hierbei wählt man unter dem Menüpunkt der Flächen das Untersymbol „Regelmäßiges Vieleck“ aus und klickt anschließend Punkt A , dann Punkt C an. Es öffnet sich ein Fenster, in dem man die Anzahl der Eckpunkte angeben kann. In unserem Fall wäre dies vier, da ein Quadrat vier Eckpunkte besitzt. Die Quadrate über den Katheten werden analog erzeugt. Ein regelmäßiges Vieleck mit vier Eckpunkten von B nach A und von C nach B . Zu Beachten ist dabei stets die Reihenfolge. Das regelmäßige Vieleck wird gegen den Uhrzeigersinn aufgespannt. Falls man die Punkte in einer anderen Reihenfolge anklickt, könnte das Vieleck von GeoGebra in die falsche Richtung erstellt werden.

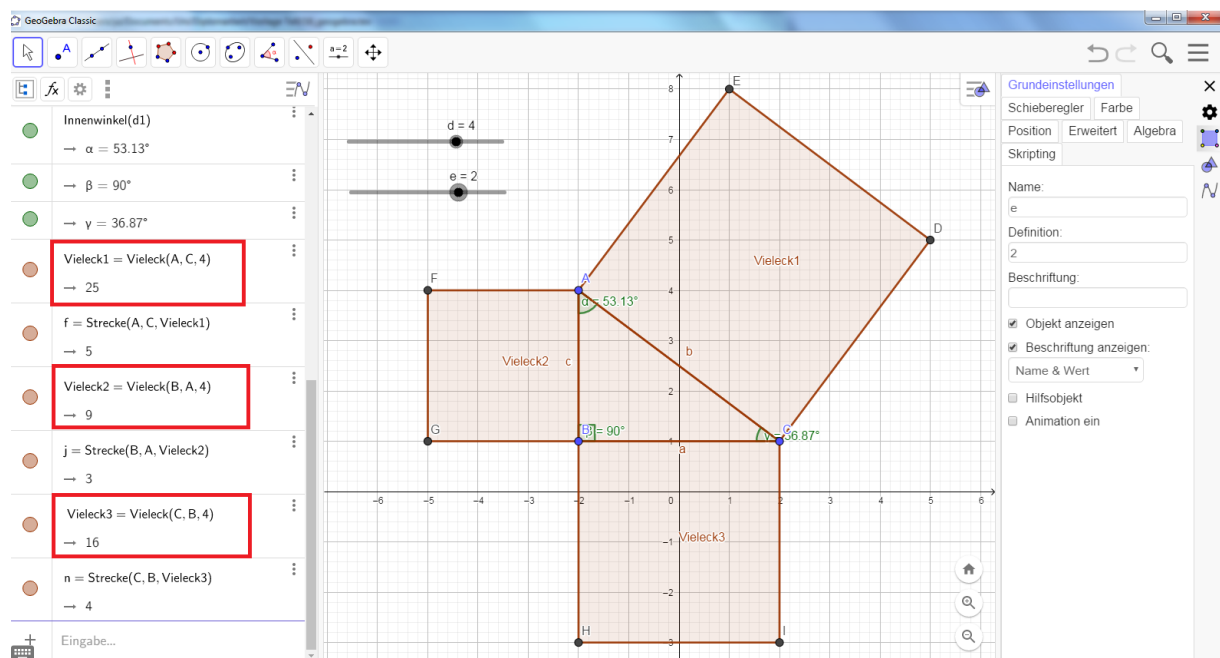


Abbildung 8.6: Flächengleichheit der Quadrate über den Seiten

Abbildung 8.6 stellt das fertige Konstrukt dar. Ändert man mit Hilfe der Schieberegler die Seitenlängen a und c , verändern sich dementsprechend auch die Flächen der Quadrate. Die

Schüler und Schülerinnen können nun auch die Flächengleichheit

$$a^2 + c^2 = b^2$$

für verschiedene rechtwinkligen Dreiecke nachprüfen.

Im angegebenen Beispiel wurden die Längen $a = 4$ und $c = 3$ gewählt. In der Navigationsleiste (Abbildung 8.6 (*rot*)) kann man die resultierenden Quadratflächen ablesen und somit die Gültigkeit des pythagoreischen Lehrsatzes für das rechtwinklige Dreieck mit den Seitenlängen 3, 4 und 5 bewerkstelligen.

9 Unterrichtskonzept

Der Leitfaden für die Verfassung des folgenden Kapitels wurden aus [Wagner, 2017] entnommen.

Das vorliegende Unterrichtskonzept beschäftigt sich mit der Einführung vom Satz des Pythagoras und einer ersten Anwendung der geltenden Gesetzmäßigkeiten.

9.1 Unterrichtsentwurf für die Einführung vom Satz des Pythagoras und dessen erste Anwendung

Allgemeine Angaben

Schule:	Südtiroler Mittelschule
Unterrichtsfach:	Mathematik
Klasse:	3. Klasse (20 Schüler und Schülerinnen)
Thema der Unterrichtsreihe:	Bearbeitung des pythagoreischen Lehrsatzes
Thema der Unterrichtseinheit:	Einführung in den Satz des Pythagoras und dessen erste Anwendung

Lernziele

- Die SuS kennen die, dem Satz des Pythagoras zugrunde liegenden, Gesetzmäßigkeiten und können diese auch anwenden.
- Die SuS können den Satz des Pythagoras eigenständig herleiten.
- Die SuS kennen einen Beweis vom Satz des Pythagoras.
- Die SuS erlangen durch die Bastelarbeiten einen enaktiven Zugang zum Satz des Pythagoras.
- Die SuS erkennen die Vorteile einer Teamarbeit.
- Die SuS erkennen, dass es sich beim Satz des Pythagoras nicht bloß um eine Formel handelt, sondern um Gesetzmäßigkeiten, welche man mit Hilfe geometrischer Konstruktionen nachvollziehen kann.

Lehrplanbezug

Das Thema ist in den **Rahmenrichtlinien für die Grund- und Mittelschule** unter dem Punkt *Ebene und Raum* zu finden.

Lernausgangslage

Die Lehrperson begleitet die Klasse bereits seit der ersten Klasse Mittelschule und pflegt mit ihnen einen guten Umgang. Die Schüler und Schülerinnen lernen gemeinsam in der Klassengemeinschaft auf dem mittleren Niveau. Der Stundenplan

einer dritten Klasse Mittelschule umfasst drei Mathematikstunden pro Woche. Die Verwaltung des Stundenplans ist dabei heuer günstig für die Mathematikstunden ausgefallen. Es handelt sich um eine Doppelstunde, dienstags, die ersten beiden Stunden und eine einzelne Stunde am Donnerstag die dritte Stunde.

Sachanalyse

Der Satz des Pythagoras wird in der zweiten Hälfte des Schuljahres thematisiert. Um den Satz des Pythagoras innerhalb der Klasse behandeln zu können, benötigen die Schüler und Schülerinnen eine Vielzahl an Kenntnisse, Fähigkeiten und Fertigkeiten:

- Die SuS erkennen rechtwinklige Dreiecke und können die Begriffe *Kathete* und *Hypotenuse* korrekt den entsprechenden Seiten zuordnen.
- Die SuS können die Fläche von Drei- und Vierecken ermitteln.
- Die SuS beherrschen den Umgang mit Potenzen.
- Die SuS sind mit der Quadratwurzel einer Zahl vertraut und können diese gegebenenfalls händisch oder mit technologischen Hilfsmitteln berechnen.
- Die SuS beherrschen den Umgang mit den binomischen Formeln.
- Die SuS besitzen die Fähigkeit, Äquivalenzumformungen an Gleichungen durchzuführen und deren Lösungsmenge anzugeben.
- Die SuS wissen, dass Buchstaben für Zahlen stehen, können die Buchstaben durch gegebene Zahlen ersetzen und damit Rechenoperationen ausführen.

Die angeführten Kenntnisse, Fähigkeiten und Fertigkeiten müssen sich die Schüler und Schülerinnen keinesfalls alle in der dritten Klasse aneignen, sondern innerhalb der gesamten drei Jahre Mittelschule. Es empfiehlt sich, die aufgelisteten Themen vor der Behandlung des Satzes vom Pythagoras gemeinsam aufzufrischen und somit in den Kopf zu rufen. Dem Satz des Pythagoras folgt das Kapitel der *Körper*, wobei der Satz auch innerhalb dieses Kapitels Anwendung findet (Kapitel 5).

Um sich innerhalb dieser Diplomarbeit nicht übermäßig zu wiederholen wird an dieser Stelle auf das Kapitel 3 DER PYTHAGOREISCHE LEHRSAZ verwiesen. Im Rahmen dieses Kapitels findet sich eine detaillierte Behandlung der Hintergrundinformationen zum Satz.

Im Folgenden wird noch auf zwei Missverständnisse hingewiesen, welche dem Satz des Pythagoras einhergehen und von Schüler und Schülerinnen nicht immer korrekt erfasst werden.

Missverständnisse:

- Bei der gängigen Gleichung $a^2 + b^2 = c^2$ handelt es sich nicht bloß um eine gültige Formel. Sie beinhaltet einen Seitenaspekt, Flächenaspekt und einen Seiten- Flächenaspekt. Jene Aspekte können geometrisch einfach erklärt und somit den Schüler und Schülerinnen verständlich gemacht werden. Man sollte daher darauf achten, den Satz des Pythagoras nicht als Formel einzuführen, sondern den Zugang mit Hilfe der geltenden Gesetzmäßigkeiten zu legen.
- Die, zuvor gewählte, Schreibweise $a^2 + b^2 = c^2$ kann zu einem weiteren Missverständnis bei Schüler und Schülerinnen führen. Diese Kurzform für den geltenden Zusammenhang ist in den Köpfen der meisten Schüler und Schülerinnen fest verankert. Es könnte sich jedoch auch das Missverständnis einnisten, dass die Katheten stets mit a und b beschriftet sind, bzw. zu beschriften sind; und die Hypotenuse mit dem Buchstaben c . Aus diesem Grund sollte man Schüler und Schülerinnen auf die Bedeutung von Buchstaben in der Mathematik sensibilisieren. Es empfiehlt sich daher bereits zu Beginn an rechtwinkligen Dreiecken mit unterschiedlichen Beschriftungen zu arbeiten.

Didaktische Begründung des Lerngegenstands

Wie bereits mehrmals erwähnt, gehört der Satz des Pythagoras zu einen der fundamentalsten Sätze der Euklidischen Geometrie. Dies sollte sowohl allen Mathematiklehrpersonen als auch allen Schüler und Schülerinnen bewusst sein. Die wichtige Bedeutung des pythagoreischen Lehrsatzes muss also von den Lehrpersonen an die Schüler und Schülerinnen vermittelt werden.

Die Schwerpunktthemen in einer dritten Klasse Mittelschule bilden das Rechnen mit **Mono-, Bi-, Tri- und Polynomen**, die **Gleichungen**, die **Körper** und die grundlegende **Statistik**. Man kann erkennen, dass sich drei, der großen Schwerpunktthemen die Hand mit dem pythagoreischen Lehrsatz reichen oder sogar eine korrekte Anwendung des Satzes fordern. Aus diesem Grund stellt der Satz des Pythagoras einen wichtigen Behandlungspunkt innerhalb des Lehrplans einer dritten Klasse dar.

Die Schüler und Schülerinnen sollen begreifen, dass sie der Satz zu einem zukünftigen, kompetenteren Verhalten befähigt. Der Bildungswert liegt dabei vor allem in der „allgemein-kulturellen Bildung“. Denn wie bereits angesprochen, ist der Satz des Pythagoras, kaum jemand unbekannt. Sein Bildungswert liegt aber auch in der „beruflich-pragmatischen Bildung“. Die Anwendung des pythagoreischen Lehrsatzes eröffnet die Fähigkeit viele mathematische Probleme zu lösen und ist folglich mit mehreren Berufsbildungen verknüpft. Ist ein rechtwinkliges Dreieck gegeben, in einem anderen Flächenstück oder Körper einschreibbar, kann der Satz des Pythagoras angewendet werden. Schüler und Schülerinnen können somit fehlende Seiten berechnen und Folgeproblemstellungen, wie beispielsweise die Ermittlung eines Volumens oder vielerlei außerschulische Problemstellungen (Abbildung 7.12), lösen.

Die zugrunde liegende strukturelle Problemlösestrategie,

Rechtwinklige Dreiecke erkennen - mögliche Lösungsvarianten abrufen - Satz des Pythagoras anwenden

welche im Zuge der Bearbeitung des pythagoreischen Lehrsatzes geübt wird, kann auch indirekt auf alltägliche Problemstellungen angewendet werden

Problem erkennen - Lösungsmöglichkeiten abrufen - Problem lösen.

Jede Lehrperson kann noch individuell viele Gründe für die Bearbeitung des Satzes finden. Von Wichtigkeit ist, dies den Schüler und Schülerinnen zu vermitteln, damit sie einen Sinn in ihrem Tun sehen.

Methodische Begründung

Ich habe mich für die Unterrichtsform „erarbeitender Unterricht“ entschieden. Dabei werden verschiedene Unterrichtsmethoden, Arbeitsformen und Sozialformen eingebunden. Es gibt sowohl entdeckende und erforschende Sequenzen als auch kommunikative. Im Rahmen dessen führt das Zusammenspiel der Eigenaktivität der Schüler und Schülerinnen und die Steuerung von Seiten der Lehrperson zum Ergebnis.

23

Die Erarbeitung erfolgt auf einer entdeckenden Weise. Der Satz des Pythagoras wird so den Schüler und Schülerinnen besser greifbar. Die Bastelarbeiten aktivieren zugleich die enaktive und ikonische Ebene. Es wird also eine zusätzliche Sinneswahrnehmung eingebunden. Zudem werden die Schüler und Schülerinnen durch diese handlungsorientierte Vorgehensweise zur Mitarbeit motiviert. Die Bastelarbeiten bzw. das Zusammenlegen der Flächen sollte Neugierde wecken. Durch die gewählte Partnerarbeit werden die Schüler und Schülerinnen in ihrer Teamfähigkeit gefördert. Des Weiteren ist es eine Chance die Vor- und Nachteile einer Partnerarbeit zu entdecken.

In einem zweiten Moment erfolgt der Unterricht auf einer erarbeitenden Art und Weise. Dabei erscheint eine Einzelarbeit als sinnvoll. Die Schüler und Schülerinnen haben somit die Möglichkeit sich alleine mit der Thematik auseinanderzusetzen und damit sowohl die gewonnenen Erkenntnisse anzuwenden, ihre Grenzen auszuloten und individuelle Unklarheiten aus dem Weg zu räumen.

Bei der Ergebnissicherung habe ich mich für eine Tandempräsentation und einem Plenumsgespräch entschieden. Ausgewählte Schüler und Schülerinnen können hierbei ihre Präsentationskompetenzen üben und ausbauen. Durch das Plenumsgespräch

hat die gesamte Klasse die Möglichkeit einen korrekten Sprachgebrauch mit mathematischen Fachbegriffen zu proben. Des Weiteren können sich an diesem lehrergelenkten Unterrichtsgespräch alle Mitglieder der Klassengemeinschaft beteiligen. Falls trotzdem von einigen Schüler und Schülerinnen keine Wortmeldung kommt, kann die Lehrperson explizit deren Meinung einholen. Die Klasse kann somit die erarbeiteten Aufgaben gemeinsam reflektieren und eine Vollständigkeit ihrer Ergebnisse erzeugen. Am Ende werden die Ergebnisse im Heft verschriftlicht.

Verlaufsplan

Zeit	Phase	Unterrichtsgeschehen	Sozialform/ Methode	Medien/ Material
Zwei Mathematikstunden zu je 50 Minuten				
2'		Begrüßung/Administratives: Die Lehrperson und die Schüler und Schülerinnen begrüßen sich. Administrative Angelegenheiten werden erledigt.		
5'	Einstieg	Stundenwiederholung: Die Klasse wiederholt gemeinsam mit der Lehrperson die Inhalte der vergangenen Doppelstunde (das Würfelziehen).	Schüler-Lehrer-Gespräch	
8'	Hinführung	Die Lehrperson gibt den Schüler und Schülerinnen einen kurzen Input zur Person Pythagoras von Samos	Wissensinput	Kapitel 2
30'	Erarbeitung	Die Lehrperson teilt das erste Übungsblatt aus und bespricht mit den Schüler und Schülerinnen die Arbeitsaufträge. Anschließend versuchen die Schüler und Schülerinnen, gemeinsam mit dem Banknachbarn/der Banknachbarin die Problemstellungen zu lösen.	Partnerarbeit	Übungsblatt 1
15'	Ergebnissicherung	Gemeinsam mit der Klasse werden die unterschiedlichen Vorgehensweisen auf Gemeinsamkeiten und Unterschiede erörtert. Anschließend werden die Fragen vom Übungsblatt besprochen.	Plenums-gespräch	

20'	Erarbeitung	Die Lehrperson verteilt das zweite Übungsblatt und bespricht den Arbeitsauftrag mit der Klasse. Die Schüler und Schülerinnen erarbeiten die Aufgabe.	Einzelarbeit	Übungsblatt 2 Übungsblatt 1
8'	Ergebnissicherung	Freiwillige Schüler und Schülerinnen können sich zu einer Tandempräsentation melden. Falls sich niemand freiwillig meldet, löst die Lehrperson einen Hauptpräsentator und einen Assistenten aus. Der Hauptpräsentator präsentiert seine Beobachtungen und Ergebnisse. Der Assistent fügt weitere Beobachtungen hinzu. Anschließend werden die Ergebnisse gemeinsam mit der Lehrperson besprochen und ergänzt.	Tandempräsentation Plenumsgespräch	evtl. Tafel
8'	Ergebnissicherung	Nachdem die Zusammenhänge der beiden Übungsblätter mit der Klasse gesammelt wurden, versucht die Lehrperson gemeinsam mit den Schülern und Schülerinnen, notwendige Kriterien für die Anwendung des pythagoreischen Lehrsatzes zu formulieren. Anschließend liefert die Lehrperson eine mathematische Definition vom Satz des Pythagoras, welche die Schüler und Schülerinnen ins Heft übertragen.	Plenumsgespräch Wissensinput	Kapitel 3
4'	Ausblick	Am Ende der Stunde gibt die Lehrperson einen Ausblick zu den bevorstehenden Unterrichtseinheiten. Im Zuge dessen versucht die Lehrperson auch die Wichtigkeit der Behandlung des Themas zu vermitteln.	Wissensinput	
Eine Mathematikstunde zu 50 Minuten				
2'		Begrüßung/Administratives: Die Lehrperson und die Schüler und Schülerinnen begrüßen sich. Administrative Angelegenheiten werden erledigt.		
5'	Einstieg	Stundenwiederholung: Die Klasse wiederholt gemeinsam mit der Lehrperson die Inhalte der vergangenen Doppelstunde.	Schüler-Lehrer-Gespräch	

10'	Erarbeitung	Die Lehrperson teilt den Übungszettel aus und bespricht mit der Klasse den Arbeitsauftrag. Anschließend können die Schüler und Schülerinnen alleine oder gemeinsam mit einem Klassenkollegen/einer Klassenkollegin arbeiten.	Einzelarbeit Partnerarbeit	Übungsblatt 3
25'	Erarbeitung	Die Lehrperson teilt den Übungszettel zur ersten Anwendung des pythagoreischen Lehrsatzes aus und geht die Aufgaben gemeinsam mit der Klasse durch. Die Schüler arbeiten alleine die Übungsaufgaben ab. Die Lehrperson schlendert durch den Klassenraum und gibt individuelle Hilfeleistungen.	Einzelarbeit	Übungsblatt 4
5'	Ergebnissicherung	Falls nach der Übungsphase noch Fragen offen geblieben sind, werden diese gemeinsam gesammelt und bearbeitet.	Lehrer-Schüler-Gespräch	Tafel
2'	Ergebnissicherung	Die gemachten Erkenntnisse, innerhalb der vergangenen Stunde, werden mündlich zusammengetragen. Die Lehrperson gibt anschließend einen Ausblick auf die darauffolgenden Stunden.	Plenums-gespräch Wissensinput	

Tabelle 9.1: Verlaufsplan: Einführung und erste Anwendung

10 Konklusion

Mit dieser Arbeit sollte die Notwendigkeit vom Satz des Pythagoras hervorgehoben werden. Bereits in der Zeit vor Christus spielte die Beziehung $a^2 + b^2 = c^2$ eine wichtige Rolle für die Menschheit. Dies hat sich bis heute nicht geändert. Auch Pythagoras selbst ist nicht nur für die heutige Gesellschaft ein Begriff, sondern wurde schon zu Lebzeiten als Guru verehrt.

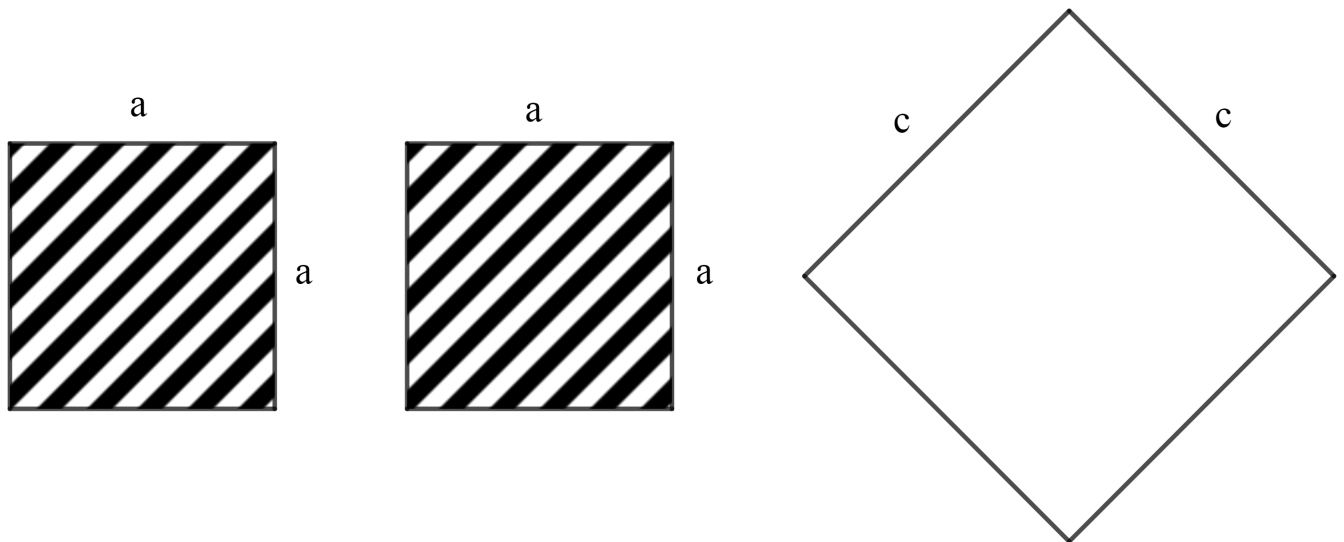
Innerhalb der Arbeit wurde aufgezeigt, dass der Satz des Pythagoras tatsächlich in fast jedem Teilgebiet der Mathematik direkt oder indirekt Verwendung findet. Ein besonderes Augenmerk wurde dabei auf die Vielfältigkeit des Satzes gelegt. Egal, welches Kapitel man im Augenschein nimmt, eines wird klar: der Satz des Pythagoras ist sowohl für die Mathematik als auch für das alltägliche Leben unabdingbar. Deshalb beinhaltet die Arbeit auch ein schulbezogenes Kapitel. Der Satz des Pythagoras ist nicht bloß eine Formel mit der man rechnen kann, sondern fördert zahlreiche elementare mathematische Kompetenzen. Der Umgang und das Verständnis für den Satz des Pythagoras spielt deshalb im Mathematikunterricht eine wichtige Rolle und ist deshalb im Lehrplan nicht wegzudenken.

Abgerundet wird die Arbeit mit einem Unterrichtskonzept zur Einführung vom Satz des Pythagoras und dessen erste Anwendung. Wie bereits zu Beginn erwähnt durchstreift man beim Lesen dieser Arbeit die Geschichte vom Satz des Pythagoras, beginnend bei den alten Babyloniern bis dato.

11 Anhang

ÜBUNGSBLATT 1

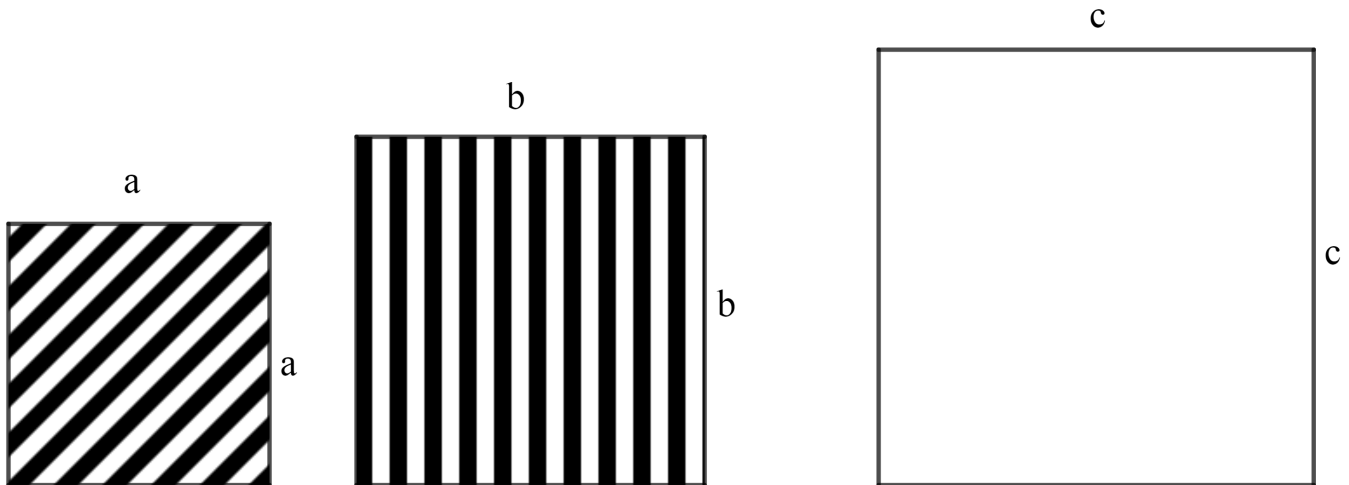
Aufgabe 1 Versuche aus den beiden kleinen Quadraten mit der Seitenlänge a ein größeres Quadrat zu konstruieren.



- (a) Kannst du mit deinem erzeugten größeren Quadrat das Quadrat mit Seitenlänge c abdecken?
- (b) Hast du deine kleinen Quadrate in gleich große Flächenstücke geschnitten? Um welche Flächenstücke handelt es sich dabei?
- (c) Welche geltende Gesetzmäßigkeiten kannst du erkennen? Untersuche dabei auch die Winkel.

Aufgabe 2 Angenommen die Seitenlänge der beiden kleinen Quadrate beträgt 3cm . Es gilt also $a = 3\text{cm}$. Welche Länge muss dann die Seitenlänge c des weißen Quadrats messen?

Aufgabe 3 Versuche wieder aus den beiden kleineren Quadraten mit der Seitenlänge a und b ein größeres Quadrat zu bilden. *Beachte:* Die Quadrate sind dieses Mal nicht gleich groß.



- (a) Kannst du mit deinem erzeugten größeren Quadrat das weiße Quadrat mit Seitenlänge c abdecken?
- (b) Hast du deine kleinen Quadrate in gleich große Flächenstücke geschnitten? Um welche Flächenstücke handelt es sich dabei?

Aufgabe 4 Wir nehmen an, dass für die Seitenlängen der jeweiligen beiden kleineren Quadrate folgendes gilt:

$$a = 6\text{cm} \quad \text{und} \quad b = 8\text{cm}$$

Was muss demzufolge für die Seitenlänge c des weißen Quadrats gelten?

Aufgabe 5 Welchen Zusammenhang kannst du erkennen, wenn die Seitenlängen a und b die Katheten eines rechtwinkligen Dreiecks darstellen und die Seitenlänge c die Hypotenuse bildet?

ÜBUNGSBLATT 2

1. Zeichne auf der Rückseite, in der Mitte des Blattes ein rechtwinkliges Dreieck mit den Katheten $a = 3\text{cm}$, $b = 4\text{cm}$ und der Hypotenuse c . Beschrifte das Dreieck.
2. Miss die Seitenlänge c ab. $c = \underline{\hspace{2cm}}$
3. Zeichne über jede Dreiecksseite ein Quadrat (Zum Beispiel entsteht über die Kathete a ein Quadrat mit der Seitenlänge a).
4. Ermittle die Flächen der entstandenen Quadrate

$$a^2 = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$b^2 = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$c^2 = \underline{\hspace{2cm}}$$

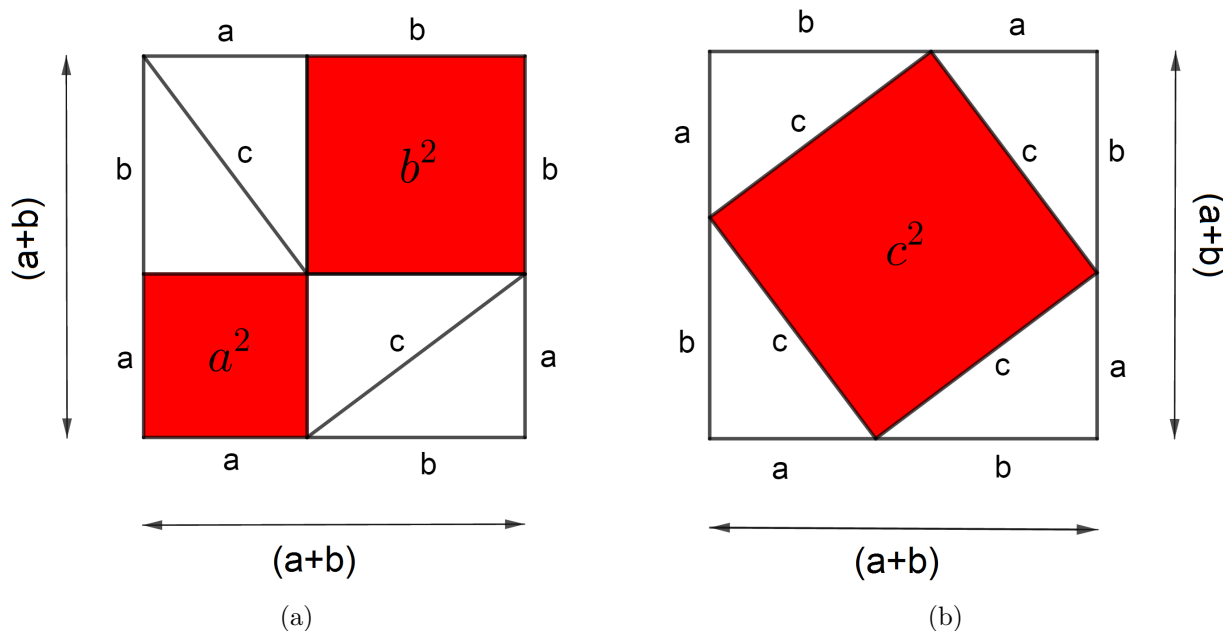
5. Überprüfe durch Einsetzen die Gültigkeit des nachstehenden Zusammenhangs:

$$\begin{array}{rccccccc} a^2 & & + & & b^2 & & = & & c^2 \\ \hline \text{cm} & + & \text{cm} & & & & = & & \text{cm} \end{array}$$

6. Fasse deine Beobachtungen zusammen.
7. Versuche den Sachverhalt mit den ursprünglichen Quadraten aus ÜBUNGSBLATT 1 zu konstruieren.
8. *Zusatzaufgabe:* Führe die gesamten Schritte für selbst gewählte Seitenlängen a und b durch.

ÜBUNGSBLATT 3

Beweisskizze für den Satz des Pythagoras

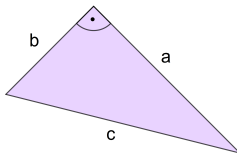


Aufgabe 1 Das Bild veranschaulicht zwei Quadrate mit der Seitenlänge $(a+b)$. Die Fläche der Quadrate entspricht dementsprechend jeweils $(a+b)^2$.

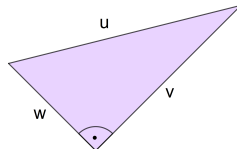
1. Im Bild (a) wurde das große Quadrat mit der Seitenlänge $(a+b)$ in vier Dreiecken und zwei Quadraten zerlegt. Ermittle die einzelnen Teilflächen und addiere sie.
2. Im Bild (b) wurde das große Quadrat mit der Seitenlänge $(a+b)$ in vier Dreiecken und einem Quadrat zerlegt. Ermittle die einzelnen Teilflächen und addiere sie.
3. Setze die ermittelten Flächen aus Aufgabe 1 und 2 (Bild (a) und Bild (b)) gleich und fasse zusammen. Welche Aussage wird ersichtlich?

ÜBUNGSBLATT 4

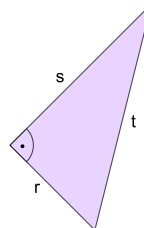
Aufgabe 1 Formuliere für die nachstehenden Dreiecke den Satz des Pythagoras.



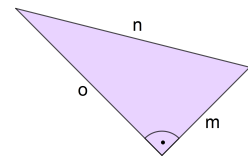
(a)



(b)



(c)

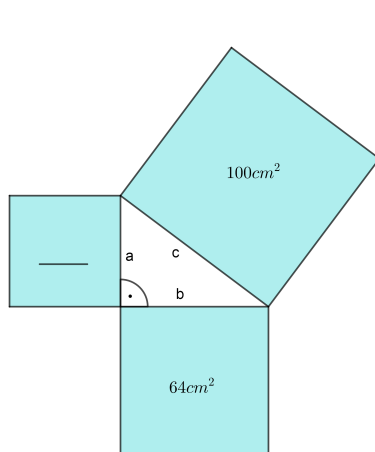


(d)

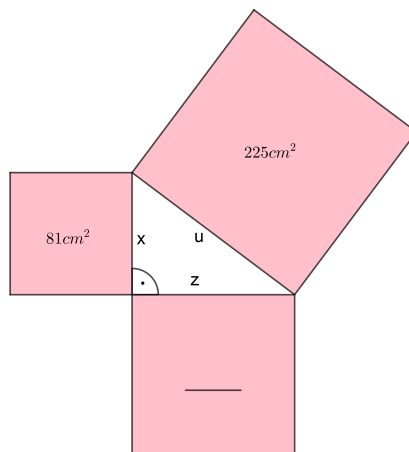
Aufgabe 2 Überprüfe durch Einsetzen ob es sich um rechtwinklige Dreiecke handelt.

Kathete a	3	5	5	6	5	24	5	1
Kathete b	4	6	8	8	4	7	12	1
Hypotenuse c	5	7	10	10	3	25	13	2

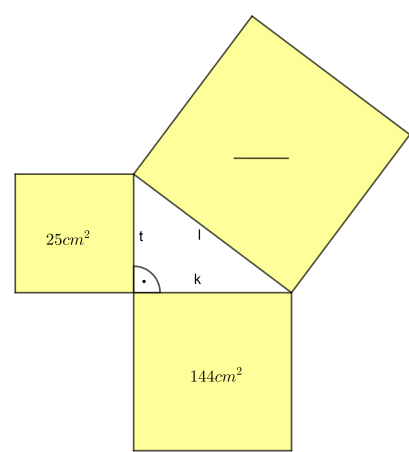
Aufgabe 3 Berechne den fehlenden Flächeninhalt und schreibe das Ergebnis in das Quadrat. Ermittle dann die Seitenlängen im Kopf.



(a)



(b)



(c)

Literaturverzeichnis

- [Agricola and Friedrich, 2005] Agricola, I. and Friedrich, T. (2005). *Elementargeometrie. Mathematik für das Lehramt*. Vieweg+Teubner Verlag.
- [Aigner and Behrends, 2016] Aigner, M. and Behrends, E. (2016). *Alles Mathematik: Von Pythagoras zu Big Data*, volume 4. Springer Spektrum.
- [Beer et al., 2014] Beer, R., Chelly, A., Ilias, P., Jilka, S., Steffan, C., and Varelija, G. (2014). *Genial! Mathematik 3: Lehr- und Arbeitsbuch für die 3. Klasse*, volume 5. Bildungsverlag Lemberger.
- [Bouw, 2009] Bouw, I. (2009). Pythagoraskor. Vorlesungsskript, Universität Ulm.
- [Bräuer et al., 2018] Bräuer, V., Leiss, D., Schukajlow, L., and Schukajlow, S. (2018). Erfolgreicher modellieren mit skizze?-effekte des zeichnens von skizzen bei modellierungsaufgaben zum satz des pythagoras und zu linearen funktionen. Studie, Universität Paderborn.
- [Chip, 2019] Chip (2019). Geogebra. note=https://www.chip.de/downloads/GeoGebra_20747798.html.
- [Erpenbeck and Sauter, 2015] Erpenbeck, J. and Sauter, W. (2015). *Stoppt die Kompetenzkatastrophe!: Wege in eine neue Bildungswelt*. Springer Berlin Heidelberg.
- [Eschenburg, 2017] Eschenburg, J. (2017). *Sternstunden der Mathematik*. Springer Fachmedien Wiesbaden.
- [Gilbert, 1872] Gilbert, G. (1872). *Studien zur altspartanischen Geschichte*. Vandenhoeck & Ruprecht.
- [Hell, 2012] Hell, T. (2012). *Analysis 1: Skriptum zur Vorlesung*. Universität Innsbruck.
- [Herrmann, 2013] Herrmann, D. (2013). *Die antike Mathematik: Eine Geschichte der griechischen Mathematik, ihrer Probleme und Lösungen*. Springer Berlin Heidelberg.

- [Herzfeld, 2014] Herzfeld, M. (2014). *Leonardo da Vinci: Denker, Forscher und Poet*. SEVERUS Verlag.
- [Hofmann, 1963] Hofmann, J. (1963). *Geschichte der Mathematik - Von den Anfängen bis zum Auftreten von Fermat und Descartes*, volume 2. Walter de Gruyter & Co.
- [Hugener et al., 2006] Hugener, I., Pauli, C., and Reusser, K. (2006). *Dokumentation der Erhebungs- und Auswertungsinstrumente zur schweizerisch-deutschen Videostudie: Unterrichtsgüte, Lernverhalten und mathematisches Verständnis*, volume 15. Deutsches Institut für Internationale Pädagogische Forschung.
- [Jones, 1956] Jones, P. S. (1956). Irrationals or incommensurables iii-the greek solution. *The Mathematics Teacher*, 49(4):282–285.
- [Kasten and Vogel, 2018] Kasten, H. and Vogel, D. (2018). *Grundlagen der ebenen Geometrie*. Springer Berlin Heidelberg.
- [Leppmeier and Wills, 2013] Leppmeier, M. and Wills, J. (2013). *Kugelpackungen von Kepler bis heute: Eine Einführung für Schüler, Studenten und Lehrer*. Vieweg+Teubner Verlag.
- [Lipowsky, 2007] Lipowsky, F. (2007). Was wissen wir über guten unterricht; im fokus: die fachliche lernentwicklung. *Friedrich Jahresheft*.
- [Mankiewicz, 2000] Mankiewicz, C. (2000). *Zeitreise Mathematik - Vom Ursprung der Zahlen bis zur Chaostheorie*. vgs.
- [Maor, 1989] Maor, E. (1989). *Die Entdeckung der irrationalen Zahlen*, pages 63–73. Birkhäuser Basel, Basel.
- [Pauer, 2013] Pauer, F. (2013). *Lineare Algebra 1: Ein Skriptum zur Vorlesung im Wintersemester 2013/14*, volume 6. Universität Innsbruck.
- [Pauer, 2017] Pauer, F. (2017). *Algebra und Geometrie in der Schule: Ein Skriptum zur Vorlesung im Wintersemester 2017/2018*. Universität Innsbruck.
- [Prenzel, 2006] Prenzel, M. (2006). *Untersuchungen zur Bildungsqualität von Schule: Abschlussbericht des DFG-Schwerpunktprogramms ; [BIQUA]*. Waxmann.
- [Riedweg, 2002] Riedweg, C. (2002). *Pythagoras: Leben, Lehre, Nachwirkung ; eine Einführung*. Beck.

- [Salzger et al., 2016] Salzger, B., Bachmann, J., Germ, A., Riedler, B., Singer, K., and Ulovec, A. (2016). *Mathematik verstehen 3*, volume 1. Österreichischer Bundesverlag Schulbuch GmbH & Co. KG.
- [Scheid and Schwarz, 2009] Scheid, H. and Schwarz, W. (2009). *Elemente der Geometrie*. Spektrum Akademischer Verlag.
- [Schukajlow and Blum, 2018] Schukajlow, S. and Blum, W. (2018). *Evaluierte Lernumgebungen zum Modellieren*. Realitätsbezüge im Mathematikunterricht. Springer Fachmedien Wiesbaden.
- [Sorgner and Fürbeth, 2003] Sorgner, S. and Fürbeth, O. (2003). *Musik in der deutschen Philosophie: eine Einführung*. Metzler Musik. Metzler.
- [Strick, 2017] Strick, H. (2017). *Mathematik ist schön: Anregungen zum Anschauen und Erforschen für Menschen zwischen 9 und 99 Jahren*. Springer Berlin Heidelberg.
- [Sturm, 1917] Sturm, A. (1917). *Geschichte der Mathematik - bis zum Ausgang des 18. Jahrhunderts*, volume 3. G. J. Göschen'sche Verlagshandlung G.m.b.H.
- [Wagner, 2017] Wagner, A. (2017). "wie schreibe ich einen unterrichtsentwurf". Gewerkschaft Erziehung und Wissenschaft Baden-Württemberg.
- [Weber, 1999] Weber, F. (1999). Steigerung der effizienz des mathematisch-naturwissenschaftlichen unterrichts:. Technical report, Ministerium für Bildung, Wissenschaft und Weiterbildung.
- [Weigand et al., 2018] Weigand, H., Filler, A., Hölzl, R., Kuntze, S., Ludwig, M., Roth, J., Schmidt-Thieme, B., and Wittmann, G. (2018). *Didaktik der Geometrie für die Sekundarstufe I*. Mathematik Primarstufe und Sekundarstufe I + II. Springer Berlin Heidelberg.
- [Wiedijk, 2004] Wiedijk, F. (2004). Formal proof sketches. Technical report, Department of computerscience, University Nijmegen.
- [Wildhirt, 2007] Wildhirt, S. (2007). Lehrstückunterricht gestalten: Exemplarische studien zur lehrkustdidaktischen kompositionslehre. Master's thesis, Universtiät Marburg/Lahn.
- [Zeuge, 2018] Zeuge, W. (2018). *Nützliche und schöne Geometrie: Eine etwas andere Einführung in die Euklidische Geometrie*. Springer Fachmedien Wiesbaden.

Abbildungsverzeichnis

2.1	Pentagramm	6
2.2	Plimpton 322	8
2.3	Zhoubi suanjing	9
2.4	Seilknüpfung	9
2.5	Pythagoras von Samos	10
3.1	Rechtwinkliges Dreieck	13
3.2	Rechtwinkliges Rechteck	15
3.3	Vervollständigung	15
3.4	Beweisskizze nach Bhaskara	16
3.5	Beweisskizze nach Schoppenhauer	17
3.6	Beweisskizze nach Garfield	18
3.7	Beweisskizze nach Da Vinci	19
3.8	Flächeninhaltstreue	20
3.9	Beweisskizze nach Euklid	20
3.10	<i>Kathetensatz $\Rightarrow$ Satz des Pythaogras</i>	21
4.1	Einheitskreis mit Gerade g	28
5.1	kongruente rechtwinklige Dreiecke	31
5.2	Kathetensatz des Euklid	32
5.3	Beweis: Kathetensatz und Höhensatz des Euklid	33
5.4	Höhensatz des Euklid	34
5.5	Trapez	36
5.6	Pyramide	37
5.7	Gleichschenkliges, rechtwinkliges Dreieck	38
5.8	Darstellung der Zahl $\sqrt{2}$	39
5.9	Euklidische Abstand in der Ebene	42
5.10	Sinus und Cosinus am Einheitskreis	43

5.11	Elementare Identität: Satz des Pythagoras	44
5.12	Darstellung der komplexen Zahl z in der Gauß'schen Zahlenebene	46
5.13	Beweisskizze:Satz des Pythagoras mittels Skalarprodukt	47
5.14	Beweisskizze: Satz des Pythagoras zum Skalarprodukt	48
6.1	Dreieck $\triangle ABC$	49
6.2	Satz des Pythagoras für zueinander ähnliche Figuren	51
6.3	Satz von de Gua	52
7.1	Lehrplan Neue Mittelschule (3.Klasse	54
7.2	Lehrplan Neue Mittelschule (4.Klasse)	55
7.3	Rahmenrichtlinien Südtiroler Mittelschule	55
7.4	Ergänzungsbeweis	56
7.5	Beweis: Kathetenquadrate und Hypotenusenquadrat	57
7.6	Formulierung des pythagoreischen Lehrsatzes	58
7.7	Aufgaben zum Flächeninhalt	58
7.8	Wechsel der Darstellung des pythagoreischen Lehrsatzes	59
7.9	Reine Übungsaufgaben	59
7.10	Anwendungsaufgabe: Satz des Pythagoras	59
7.11	Einführung in den pythagoreischen Lehrsatz	60
7.12	Anwendungsaufgabe: Satz des Pythagoras	61
7.13	Zwei gleich große Tischdecken	63
7.14	Neue, größere Tischdecke	63
7.15	Unterschiedlich große Tischdecken	64
7.16	Neue, größere Tischdecke	64
7.17	Ergebnis:Satz des Pythagoras	65
7.18	Rechtwinkliges Suchdiagramm	66
7.19	Kathetenquadrate und Hypotenusenquadrat	67
7.20	Ergänzungsbeweis	68
8.1	GeoGebra-Fenster	72
8.2	Symbolleiste: Vieleck und Winkel	72
8.3	Konstrukt: Rechtwinkliges Dreieck	73
8.4	Anlegen der Schieberiegler	73
8.5	Anlegen der Schieberiegler	74
8.6	Flächengleichheit der Quadrate über den Seiten	75

Tabellenverzeichnis

4.1	Erste pythagoreische Zahlentripel	24
4.2	Verfahren nach den Pythagoreer	25
4.3	Verfahren nach Platon	26
9.1	Verlaufsplan: Einführung und erste Anwendung	85