Ein topologisches Problem der reellen algebraischen Geometrie und dessen Einsatz im Schulunterricht:

In wie viele Regionen teilen n Linien die Ebene?

Diplomarbeit

im Lehramtsstudium Mathematik - Informatik und Informatikmanagment

zur Erlangung des akademischen Grades Magistra der Naturwissenschaften

eingereicht an der

Fakultät für Mathematik, Informatik und Physik der Universität Innsbruck

von

Barbara Pritzi

Betreuer: Univ.-Prof. Dr. Tim Netzer

Innsbruck, 10. Mai 2018

Danksagung

Ich möchte am Beginn meiner Diplomarbeit zunächst die Gelegenheit nutzen, einigen Menschen „Danke“ zu sagen, Menschen, die mich während der Anfertigung dieser Diplomarbeit, aber auch im Studium, unterstützt und motiviert haben.

Zunächst gilt mein Dank meinen Betreuer Univ.-Prof. Dr. Tim Netzer, der meine Arbeit betreut und begutachtet hat und ohne dessen Hilfe und Bemühungen diese Arbeit nicht zustande gekommen wäre. Für die hilfreichen Anregungen und das konstruktive Feedback möchte ich mich herzlich bedanken.

Mein besonderer Dank gilt meiner gesamten Familie, insbesondere meinen Eltern Isabella und Walter für ihre unendliche emotionale und finanzielle Unterstützung über die Dauer meines gesamten Studiums. Außerdem möchte ich mich noch bei meiner Patin Manuela bedanken, die mich bei ihr aufgenommen hat und mich bei allem, insbesondere bei meinem Studium, immer unterstützt hat.

Ebenfalls danke ich meine Kommilitonen und Freunden während der Studienzeit für sehr schöne Jahre in Innsbruck.

Zuletzt möchte ich noch all denjenigen danken, die in der Zeit der Erstellung dieser Arbeit für mich da waren, insbesondere meinem Freund.

Diese Arbeit ist mein Dankeschön an euch alle.

Inhaltsverzeichnis

Einleitung

Diese Arbeit behandelt die Problemstellung in wie viele Regionen sich die Ebene, sowohl die affine als auch die projektive, von einer beliebigen Anzahl n an Linien teilen lässt. Dabei wird die minimale Anzahl an Regionen, die n beliebige Linien die Ebene teilen können, als auch die maximale Anzahl bestimmt. Es wird auch untersucht, ob alle Werte zwischen der minimalen und maximalen Anzahl an Regionen als Regionen realisiert werden können oder ob es Ausnahmen, so genannte Löcher gibt. Das Hauptwerk an das sich diese Arbeit anlehnt ist das Buch „Real Algebraic Geometry“ von Vladimir I Arnold [Arn13].

Das erste Kapitel behandelt alle mathematischen Grundlagen für die Problemstellung in der affinen Ebene. Zuerst wird der mathematische Bereich der „Reelle Algebraische Geometrie“ erklärt, welche sich den behandelte Problemstellung zuordnen lassen. Zudem wird die minimale und die maximale Anzahl an Regionen für n Linien analysiert und eine allgemeine Formel vorgestellt. Danach werden einige Löcher in der affinen Ebene detailliert behandelt und einige Beispiele aufgezeigt. Ein weiteres Thema dieses Kapitels ist die Variation der Problemstellung, dabei werden nicht gerade Linien in der Ebene betrachtet sondern geknickte Linien und auch Kreise in der Ebene.

Das Thema des zweiten Kapitels ist „Die Problemstellung in der Projektiven Ebene“. Hier wird zuerst die projektive Geometrie eingeführt und danach die minimale und maximale Anzahl an Regionen behandelt und auch Werte, die als Regionen in Frage kommen könnten. Später werden, wie im ersten Kapitel, einige Löcher in der Projektiven Ebene analysiert und aufgezeigt und danach wird noch die Verbindung dieser mit der affinen Ebene beschrieben.

Das letzte Kapitel behandelt die Einbettung der Problemstellung dieser Arbeit in den Schulunterricht. Hier wird der Geometrieunterricht kurz vorgestellt und wie man mithilfe des Problemlösens und des genetischen Prinzips diesen gestalten könnte. Danach wird analysiert wo die Problemstellung in den österreichischen Lehrplänen und den Südtiroler Rahmenrichtlinien vorkommt und diese sich einordnen lässt. Es wird auch noch ein eigenes Konzept vorgestellt, wie man das Thema der Arbeit für die Schülerinnen und Schüler didaktisch gut aufbereiten könnte.

1 Problemstellung in der Affinen Ebene

Dieses Kapitel beschäftigt sich mit der Problemstellung, in wie viele Regionen, manchmal auch Teile genannt, sich die reelle affine Ebene von n Linien, manchmal auch Geraden genannt, teilen lässt.
Genauer wird hier die minimale und maximale Anzahl an konstruierbaren Regionen untersucht und passende Sätze dazu konstruiert. Später werden noch einige Einschränkungen für die erzeugbaren Regionen behandelt. Um diesen Problemstellungen auf den Grund zu gehen, werden zuerst einige Grundbegriffe eingeführt.

1.1 Reelle Algebraische Geometrie

Die behandelnde Problemstellung lässt sich dem Bereich der reellen algebraischen Geometrie zuordnen. Diese Art der Geometrie wird wahrscheinlich nicht allen Mathematik Lehramtsstudenten und Lehramtsstudentinnen und auch nicht allen Mathematik Lehrern und Lehrerinnen ein Begriff sein, da sich das Lehramtsstudium fast gänzlich auf das Gebiet der Linearen Algebra und Analysis beschränkt. Deshalb werden wir nun diesen Bereich kurz erläutern.

Das Skriptum [Net16, S. 1] zur Vorlesung „Reelle Algebra und Geometrie“ beschreibt diesen Bereich wie folgt:
Die Mathematik beschäftigt sich mit den unterschiedlichsten Fragestellungen und lässt sich schwer auf nur ein Themengebiet einschränken. Eine davon ist die nach den Lösungen von Gleichungssystemen. Dabei beschäftigen sich

verschiedene Teilgebiete mit unterschiedlichen Gleichungen und Gleichungssystemen, so behandelt z.B. die Lineare Algebra lineare Gleichungen über Körper. Die algebraische Geometrie dagegen beschäftigt sich mit polynomialen Gleichungssystemen über Körpern und deren Lösungsmengen. Die Algebra beschäftigt sich hauptsächlich mit dem Suchen nach Lösungen, die mit Hilfe von Lösungsmengen beschrieben werden. Diese Lösungsmengen kann man wiederum als ein geometrisches Objekt betrachten und aus diesen Eigenschaften heraus hat man dieses Teilgebiet der Mathematik, algebraische Geometrie getauft.

Verwenden wir als Körper, den der reellen Zahlen, so erhalten wir einen Spezialfall der algebraischen Geometrie. Dieser Spezialfall nennt sich reelle algebraische Geometrie, welche sich mit polynomialen Gleichungen über den reellen Zahlen $\mathbb{R}$ und deren reellen Lösungen beschäftigt. [Net16]

Es können unterschiedliche Problemstellungen aus der Geometrie mit Hilfe von algebraischen Gleichungen beschrieben werden, so beschäftigt sich die reelle algebraische Geometrie, u.a., mit Hilberts 16-ten Problem [1] und anderen Fragestellungen die näher an der Realität liegen als andere und besser denkbar und vorstellbar sind. [Arn13]

[1] Überblick über Hilberts 16-ten Problem:
https://en.wikipedia.org/wiki/Hilbert%27s_sixteenth_problem

1.2 Die Affine Geometrie

In der Mathematik gibt es nicht die „eine“ Geometrie, nach der sich alle orientieren. Es gibt verschiedene Arten, die sich im Laufe der Zeit gebildet haben. Die Geometrie, die in den heutigen Schulen gelehrt wird, ist die euklidische Geometrie. Diese beschäftigt sich mit Winkeln, ähnlichen Dreiecken, Kreisen, dem Parallelenaxiom usw.. Sie lässt sich auf den griechischen Mathematiker Euklid von Alexandria (circa 300 v. Chr.) zurückführen und basiert hauptsächlich auf seinem Werk „Die Elemente“. [Cox55, S. 11]

Im späterem Verlauf der Geschichte, rund 2200 Jahre später, begannen Mathematiker gewisse Gedankenfolgen relativ einfacher Natur, die sich nicht mit der Untersuchung von Abständen und Winkeln befassen, auszusondern. Daraus entstanden etwas allgemeinere Geometrien, die der affinen und der projektiven Geometrie, mit denen sich auch diese Arbeit beschäftigt. [Cox55, S. 11]

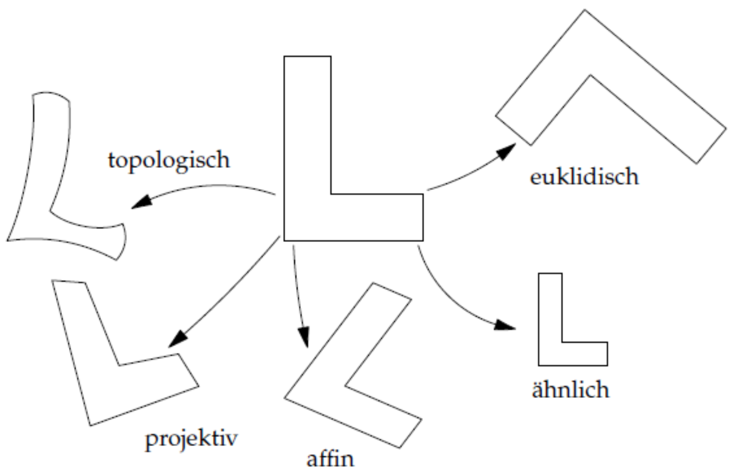


Abb. 1.1: Gleiche Objekt in verschiedenen Geometrien aus [Sch16]

Da in der affinen Geometrie der Abstandsbegriff und Winkel keine Relevanz mehr aufweisen, lässt sich diese Geometrie als eine Generalisierung der euklidischen Geometrie ansehen. Es gilt aber weiterhin das euklidische Parallelen-Axiom, welches im weiterem Verlauf dieser Arbeit noch wichtig sein wird.

Die reelle affine Ebene

Alle Geometrien haben bestimmte vordefinierte Elemente, wie Punkte, Geraden und Ebenen, so auch die affine Geometrie. Mit diesen werden elementare Fragen der Geometrie untersucht, wie z.B. die gegenseitige Lage verschiedener Geraden in der Ebene. Diese Arbeit beschäftigt sich mit einer wichtigen speziellen affinen Ebene und zwar die über den Körper der Reellen Zahlen, der reellen affinen Ebene $\mathbb{R}^2$.

Den $\mathbb{R}^2$ kann man folgendermaßen erklären :

> Wir bezeichnen die Menge $\mathbb{R}$ aller reellen Zahlen als „Zahlengerade “. Als Ebene stellen wir uns die Zeichenebene vor, etwa als ein großes Blatt Papier. Wir können nun in dieser Zeichenebene einen Nullpunkt, den Ursprung, wählen und durch diesen zwei orthogonale Geraden, welche als Achsen bezeichnet werden, legen und diese dann auch durch reelle Zahlen skalieren. Dann entsprechen Punkte der Ebene geordnete Paare (x, y) von reellen Zahlen.
> Die Zeichenebene ist also die Menge dieser geordneten Paare. [Fis11]
>
> $\mathbb{R}^2 := \{(x, y) \ : \ x, y \ \in \ \mathbb{R}\}$

Wollen wir in der Zeichenebene keinen Nullpunkt wählen, so kann man diese als affine Ebene betrachten.

1.3 Minimale und Maximale Anzahl an Regionen

Nach dem theoretischen Teil wollen wir nun die eigentliche Problemstellung behandeln. Zu Beginn wollen wir die maximale Anzahl L_n der Regionen bestimmen, die durch n Linien in der Ebene, in unserem Fall die reelle affine Ebene, kurz $\mathbb{R}^2$, erzeugt werden können. Dies ist keineswegs eine neue Problemstellung, sie wurde schon um 1826 vom Mathematiker Jakob Steiner zum ersten Mal behandelt und auch gelöst. Steiner hat damit den Grundstein für alle weiteren Überlegungen geschaffen. [KGP94, S. 5]

Bevor wir aber die Anzahl der erzeugbaren Regionen besprechen müssen wir zuerst den Begriff der „Region “ klären. In dieser Arbeit ist eine Region eine Zusammenhangskomponente, welche sich nicht in zwei disjunkte, nicht-leere offene Teilmengen aufteilen lässt. Kurz erklärt in einer Region kann man je zwei Punkte stets durch eine in der Region liegenden Streckenzug verbinden. [Toe17, S. 18]

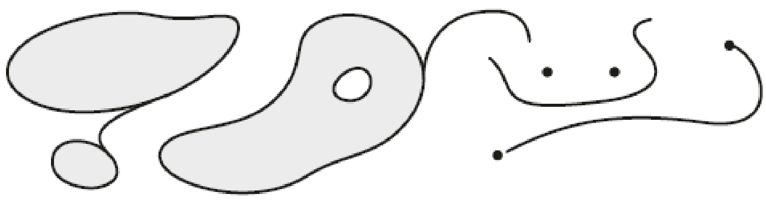


Abb. 1.2: Zusammenhangskomponenten [Toe17]

Nun können wir die eigentliche Problemstellung behandeln.

Im Laufe der Zeit hat es verschiedene Herangehensweisen zur Lösung dieser Problemstellung gegeben. Ein möglicher Lösungsweg, aus dem auch eine gewisse Regelmäßigkeit zu erkennen ist, ist der, der das Rekursionsverfahren verwendet. Für dieses Verfahren muss man zuerst den Rekursionsanfang bestimmen.

Dafür kann man sich folgendes überlegen:

> Wenn in der Ebene keine Linie vorhanden ist, also $n = 0$, so ist die Anzahl der Regionen gleich eins. Die „erzeugte“ Region ist die Ebene selbst, also $L_0 = 1$.
> Wenn in der Ebene eine Linie vorhanden ist, so teilt diese die Ebene in zwei Regionen, also $L_1 = 2$.
> Bei zwei Linien, die sich in einem Punkt schneiden, haben wir vier Regionen, also $L_2 = 4$. [KGP94]

Nun könnte man annehmen, dass das Hinzufügen einer neuen Linie die maximale Anzahl der Regionen verdoppelt, also dass für die maximale Anzahl an erzeugbaren Regionen $L_n = 2^n$ ist. Eine Verdoppelung der Regionen ist aber nur möglich, wenn die $n-$te Linie jede alte Region in jeweils zwei Regionen teilt. Dies wäre möglich, da eine Linie eine alte Region in maximal zwei Regionen teilen kann, da diese konvex ist. („Eine gerade Linie kann eine konvexe Region nur in maximal zwei neue Regionen teilen, die wiederum konvex sind.“ [KGP94, S. 5])

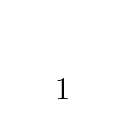


Abb. 1.3: L_0

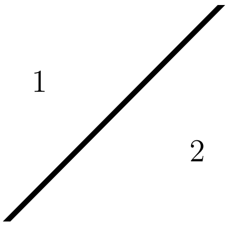


Abb. 1.4: L_1

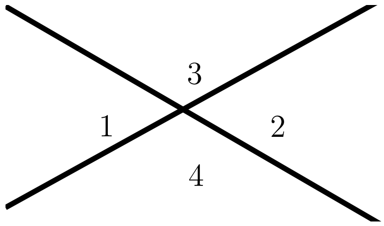


Abb. 1.5: L_2

Abb. 1.6: maximale Anzahl an Regionen für n $=0, 1, 2$

Wenn wir zum Beispiel bei der Ebene mit zwei Linien eine dritte Linie dazugeben, dann kann diese neue Linie maximal drei der alten Regionen teilen und nicht alle vier alten Regionen, egal wie die neue Linie in der Ebene liegt. Bei drei Linien gilt dann, dass die neue Linie maximal vier alte Regionen teilen kann.

Aus dieser Überlegung folgt, dass die maximale Anzahl an Regionen für $n = 3$

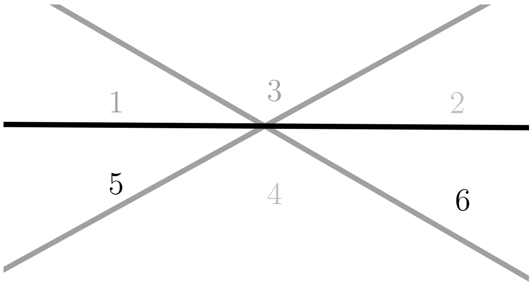


Abb. 1.7: Drei Linien mit gemeinsamen Schnittpunkt

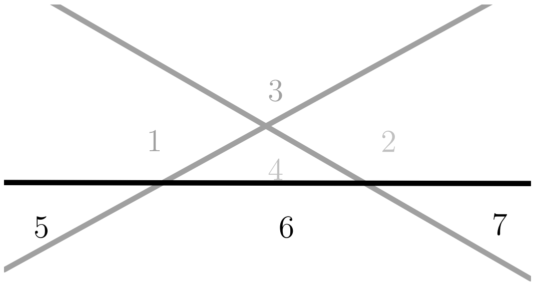


Abb. 1.8: maximale Anzahl an Regionen für $n = 3$

gleich $L_3 = 4 + 3 = 7$ ist und für $n = 4$ gilt, dass $L_4 = 7 + 4 = 11$ usw..

Daraus lässt sich ein Konstruktionsmuster bestimmen:

> Wir nehmen an, dass eine natürliche Zahl $k \in \mathbb{N}$ die Anzahl der Regionen angibt. Dann gilt, dass die neue n-te Linie die Anzahl der Regionen um k erhöht, genau dann wenn die neue Linie genau k alte Regionen teilt, dies gilt genau dann wenn die n-te Linie alle anderen Linien in $k - 1$ verschiedenen Punkten schneidet.

Wenn wir uns zudem überlegen, dass für die maximale Anzahl der Regionen sich maximal zwei Linien in einen Punkt schneiden dürfen, so kann die neue n-te Linie die alten $n - 1$ Linien in maximal $n - 1$ verschiedenen Punkten schneiden. Daraus folgt, dass die Anzahl der Regionen kleiner oder gleich der Anzahl der Linien ist, also $k \leq n$.

Wir können nun folgenden Rekursionsschritt formulieren:

$$L_n \leq L_{n-1} + n \text{ für } n > 0$$

Um die Gleichheit dieser Ungleichung zu erhalten, darf die n-te Linie zu keiner der anderen $n - 1$ Linien parallel sein und die n-te Linie muss die $n - 1$ Linien alle in unterschiedlichen Punkten schneidet, d.h. nur maximal zwei Linien schneiden sich in einem Schnittpunkt.

Es gilt deshalb folgende Rekursion:

$L_0 = 1$	**Rekursionsanfang**
$L_n = L_{n-1} + n$ für $n > 0$	**Rekursionsschritt**

Wir wollen nun diese rekursive Formel in ihre explizite Form umwandelt, damit wir für $n \in \mathbb{N}$, eine beliebige Anzahl von Linien, die maximale Anzahl an Regionen bestimmen können ohne dabei die Anzahl der vorherigen Regionen wissen zu müssen.

$$\begin{aligned}
L_n &= L_{n-1} + n \\
&= L_{n-2} + (n-1) + n \\
&= L_{n-3} + (n-2) + (n-1) + n \\
&\vdots \\
&= L_0 + 1 + 2 + 3 + 4 + \cdots + (n-1) + n \\
&= 1 + 1 + 2 + 3 + 4 + \cdots + (n-1) + n \\
&= 1 + S_n
\end{aligned}$$

Für $S_n = 1 + 2 + \cdots (n-1) + n$ werden die ersten n natürlichen Zahlen aufsummiert. Wendet man die Gauss'schen Summenformel an, so gilt für $S_n = \frac{n(n+1)}{2}$.

Wir können nun folgenden Satz formulieren, dessen Richtigkeit wir mit Hilfe des Beweises der vollständigen Induktion zeigen werden, wie es auch in [KGP94, S. 6 ff.] gemacht wurde.

Satz 1 (Maximale Anzahl an Regionen)**.** *Die maximale Anzahl an Regionen, die von n Linien in der affinen Ebene erzeugt werden können ist*

$$L_n = \frac{n(n+1)}{2} + 1 \textit{ für } n \geq 0.$$

Diesen Satz könnte man nun mit Hilfe eines einfachen Induktionsbeweises beweisen. Der Beweis dieses Satzes geht aber auch schon aus der vorhergehenden Konstruktion hervor.

Wir wissen nun, wenn wir die maximale Anzahl an Regionen, welche mit n Linien erzeugt werden können, konstruieren wollen so darf keine der Linien parallel zu einer anderen Linie sein. Zudem dürfen sich maximal zwei Linien in einem Schnittpunkt schneiden. [Iva10]
Wir kennen aktuell die maximale Anzahl an Regionen, die n Linien erzeugen können, es fehlt noch die minimale Anzahl. Dafür kann man sich folgendes überlegen:

> Wenn in der Ebene keine oder eine Linie ist, so ist die minimale Anzahl gleich der maximalen Anzahl und zwar 1.
> Sind zwei Linien in der Ebene, die beide zueinander parallel verlaufen, so ist die Anzahl der Regionen drei, bei drei parallelen Linien ist die Anzahl der Regionen vier usw..

Die minimale Anzahl lässt sich also leicht bestimmen. Um sie zu erhalten, müssen alle n Linien in der Ebene parallel zueinander sein. Es teilen n parallele Linien die affine Ebene in $n+1$ Regionen. Für die minimale Anzahl an Regionen gilt die Faustregel, dass sie immer eines mehr ist, wie die Anzahl der Linien.
Wir können nun folgenden Satz formulieren:

Satz 2 (Minimale Anzahl an Regionen)**.** *Die minimale Anzahl an Regionen, die von n Linien in der affinen Ebene erzeugt werden können ist*

$$L_{min} = n + 1 \textit{ für } n \geq 0.$$

Wie schon für den Satz 1 über die maximale Anzahl könnte man diesen Satz mit Hilfe einer Induktion beweisen. Der Beweis dieses Satzes geht aber auch schon aus dessen Konstruktion hervor.

Wir haben nun gezeigt, dass die affine Ebene in mindestens $n + 1$ Regionen und maximal in $\frac{n(n+1)}{2} + 1$ Regionen von n Linien geteilt werden kann.

1.4 Einige Löcher in der Affinen Ebene

Wir können nun die minimale Anzahl und maximale Anzahl an Regionen, in die eine reelle affine Ebene, im weiteren oft nur noch Ebene genannt, mithilfe von n Linien eingeteilt werden kann bestimmen. Nun möchten wir herausfinden, in wie viele Regionen n Linien die Ebene nicht teilen können. Solche Anomalien zwischen der minimalen und maximalen Anzahl an Regionen werden Löcher genannt. Neben den Löchern interessieren wir uns auch, ob es bestimmte Werte zwischen der minimalen und maximalen Anzahl gibt, in die die Ebene sicher geteilt werden kann und wo sich diese befindet.
Im weiteren Verlauf wird die Anzahl an erzeugbaren Regionen mit M bezeichnen.

Mit einer Linie kann die Ebene in zwei Regionen geteilt werden, mit zwei parallelen Linien in drei Regionen und mit zwei nicht parallelen Linien, die Linien schneiden sich in einem Punkt, in vier Regionen, usw..

Ein paar Beispiele für M erzeugbare Regionen aus [Arn13] liefert die folgende Tabelle:

n	1	2	3	4	5	6	7	8
M	2	3	4	5	6	7	8	9
		4	6	8	10	12	14	16
			7	9	12	15	18	22
				10	13	16	19	?
				11	$\vdots$	17	$\vdots$	24
					16	$\vdots$	29	$\vdots$
						22		37

Tabelle 1.1: erzeugbare Regionen für n Linien

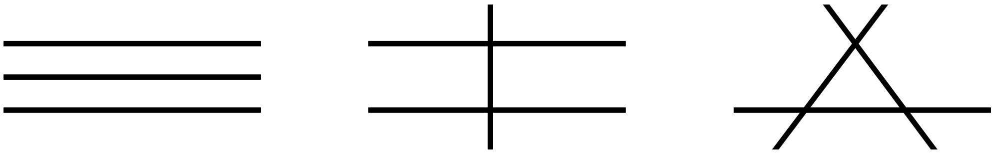


Abb. 1.9: Die mit $n = 3$ Linien erzeugbaren Regionen

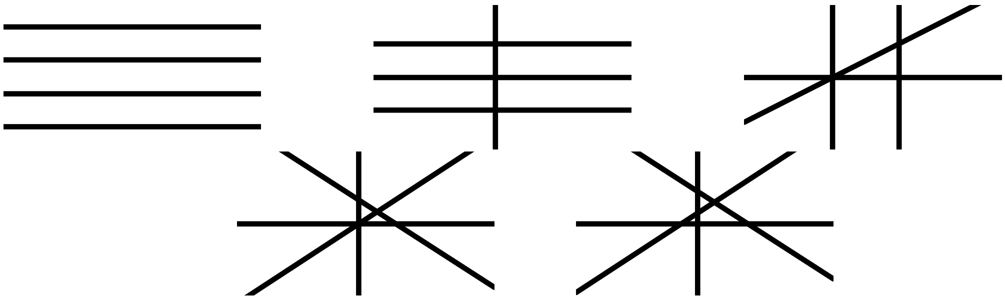


Abb. 1.10: Die mit $n = 4$ Linien erzeugbaren Regionen

Wir interessieren uns nun dafür, ob wir alle Werte von M zwischen

$$n + 1 < M < 1 + \frac{n(n+1)}{2}$$

erreichen können oder ob es Ausnahmen gibt.
Aus der Tabelle 1.1 ist ersichtlich, dass nicht alle Werte von M von jedem n erreicht werden können und dass es Ausnahmen geben kann. Sind nun diese Ausnahmen nur willkürlich oder gibt es bestimmte Gesetzmäßigkeiten oder Eigenschaften um diese zu erkennen bzw. diese gar zu bestimmen?

Eine erste Gesetzmäßigkeit, die man aus der Tabelle ableiten kann, ist die folgende: es gibt für jede Anzahl n von Linien in der Ebene eine Zahl $j_n \in \mathbb{R}$ für dir gilt, dass $j_n \leq M_{max}$, ab der alle weiteren Zahlen als Werte für die Anzahl der erzeugbaren Regionen in Frage kommen.
In anderen Worten: M kann jeden Wert zwischen

$$j_n \leq M \leq 1 + \frac{n(n+1)}{2} = M_{max}$$

annehmen.
Diese Gesetzmäßigkeit wird mit Hilfe der Projektiven Ebene genauer im Kapitel 2 erläutert.

Mit Hilfe der Tabelle kann man zudem erkennen, dass es Zahlen gibt, die kleiner als die Zahl j_n sind, welche nicht als Werte für M erzeugbare Regionen von n Linien in Frage kommen können, hier kommt es daher zu Ausnahmen bzw. Löchern. [Iva10]

Eine solche Ausnahme beschreibt folgender Satz aus [Arn13]:

Satz 3. *Es sei $n \in \mathbb{N}$. Dann können n Linien die affine Ebene nicht in M Regionen teilen, wenn*

$$\begin{aligned} n+1 &< M < 2n \quad \textit{oder} \\ 2n &< M < 3n-3 \quad \textit{ist.} \end{aligned}$$

Um diesen Satz zu beweisen, wird die gleiche Vorgehensweise und Notation wie in [Arn13] verwendet. Hierbei wird mit k die maximale Anzahl an parallelen Linien von n Linien bezeichnet und x beschreibt die maximale Anzahl an Linien, die sich in einem gemeinsamen Punkt (Schnittpunkt) schneiden.

Beweis.

Fall 1. *Für $k = n$ ist die Anzahl der erzeugten Regionen gleich $M = n + 1$.*

Für diesen Fall sind alle n Linien parallel und deshalb gilt für die Anzahl der Regionen $M = n + 1$, also die minimale Anzahl an erzeugbaren Regionen.

Fall 2. *Für $k = n - 1$ ist die Anzahl der erzeugten Regionen gleich $M = 2n$.*

Hier sind $n - 1$ Linien parallel und diese erzeugen n Regionen. Die n-te Linie schneidet alle anderen $n - 1$ Linien und teilt damit jede Region in jeweils zwei Teile. Somit ist die Anzahl der erzeugten Regionen gleich $M = 2n$. (Siehe 1.9 und 1.10 zweite Abbildung)

Fall 3. *Für $k = n-2$ ist die Anzahl der erzeugten Regionen entweder*
$$M = 3n-2 \text{ oder } M = 3n-3.$$

Hier sind $n-2$ Linien parallel und eine nicht dazu parallele Linie, die $n-1$-te Linie, teilt die Ebene in $2(n-1)$ Regionen (siehe Fall 2). Die n-te Linie schneidet die $n-2$ Linien in $n-2$ verschiedenen Punkten. Ist diese Linie parallel zur $n-1$-ten Linie, dann gilt für die Anzahl der Regionen $M = 3(n-1)$.

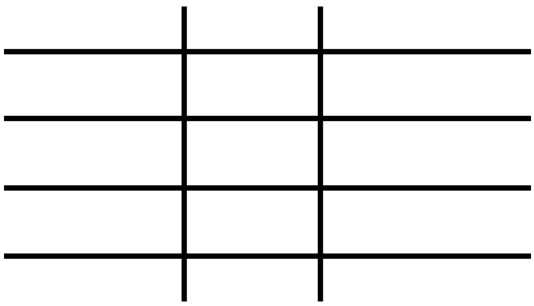


Abb. 1.11: Ebene mit $M = 3(n-1)$ Regionen

Ist diese n-te Linie zu keiner anderen Linie parallel und schneidet zudem die $n-1$-te Linie außerhalb der $n-2$ parallelen Linien, so kommt zu den bereits existierenden $2(n-1)$ Regionen n weitere Regionen dazu, es gilt nun also $M = 2(n-1) + n = 3n-2$.
Schneidet die neue n-te Linie, die $n-1$-te Linie in einem Schnittpunkt mit einer anderen Linie, dann haben wir eine Region weniger, daher $M = 3n-3$.

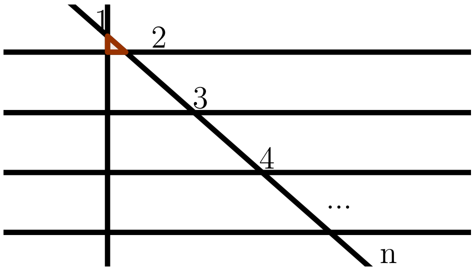


Abb. 1.12: Ebene mit $M = 3n - 2$ Regionen

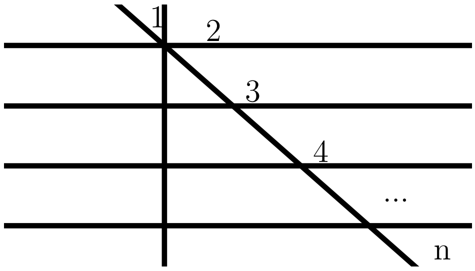


Abb. 1.13: Ebene mit $M = 3n - 3$ Regionen

Fall 4. *Für $x = n$ ist die Anzahl der erzeugten Regionen $M = 2n$.*

Hier gibt es keine parallelen Linien und alle n Linien haben genau einen gemeinsamen Schnittpunkt. Somit teilen die n Linien die Ebene in $2n$ Regionen, $M = 2n$.

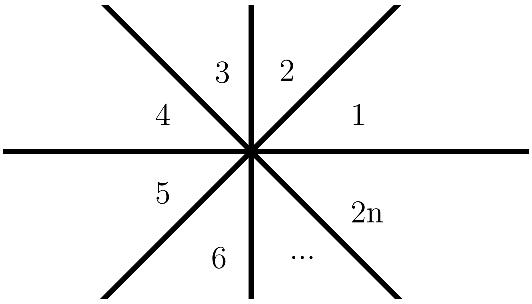


Abb. 1.14: Ebene mit $M = 2n$ Regionen

Fall 5. *Für $x = n - 1$ ist die Anzahl der erzeugten Regionen entweder $M = 3n - 2$ oder $M = 3n - 3$.*

Hier schneiden sich $n - 1$ Linien, also alle bis auf eine, in einem Punkt (gemeinsamer Schnittpunkt). Die $n-1$ Linien teilen die Ebene in $2(n-1)$ Regionen (siehe Fall 4). Falls die neue n-te Linie zu keiner der anderen Linien parallel ist und auch nicht durch den gemeinsamen Schnittpunkt aller anderen geht, so schneidet sich die Linie in $n - 1$ verschiedenen Punkten mit den anderen Linien. Die neue Linie wird also in n Teile geteilt und somit kommt zu den $2(n-1)$ Regionen noch n weitere Regionen dazu.
Deshalb gilt für $M = 2(n - 1) + n = 3n - 2$.

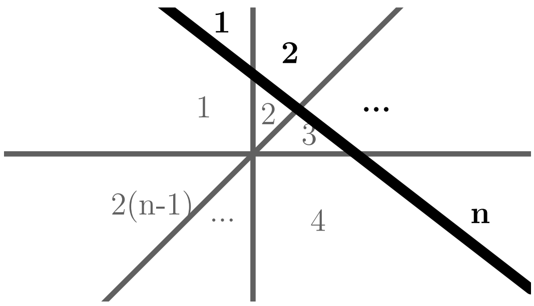


Abb. 1.15: Ebene mit $M = 3n - 2$ Regionen

Falls die neue n-te Linie zu einer anderen Linie parallel verläuft und nicht durch den Schnittpunkt aller anderen $n-1$ Linien geht, so schneidet diese Linie sich in $n - 2$ Punkten mit den anderen Linien. Die n-te Linie wird in $n - 1$ Teile geteilt.
Deshalb gilt für die erzeugten Regionen $M = 2(n-1) + (n-1) = 3n-3$.

Fall 6. *Für $k < n - 2$, $3 < x < n - 1$ ist die Anzahl der erzeugten Regionen*

$$M \geq 4n - 8.$$

Für $k < n - 2$, $2 < x < n - 1$ ist die Anzahl der erzeugten Regionen

$$M \geq 3n - 3.$$

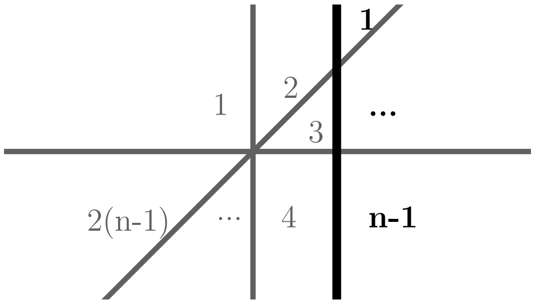


Abb. 1.16: Ebene mit $M = 3n - 3$ Regionen

Wenn sich x Linien in einem Punkt P schneiden, teilen sie die Ebene in $2x$ Regionen. (Siehe Fall 4) Jede der $n - x$ anderen Linien schneidet mindestens $x - 1$ Linien, die durch den Punkt P gehen und wird durch diese in mindestens x Teile geteilt. Mit den neuen $n-x$ Linien, bekommen wir $x(n - x)$ neue Regionen zu den bereits existierenden $2x$ Regionen. Deshalb gilt für die Anzahl der Regionen:

$$M \geq 2x + x(n - x) = x(n + 2 - x).$$

Wir setzen $L = n+2-x$. Wenn wir davon ausgehen, dass die Ungleichung $3 < x < n - 1$ gilt, dann gilt für L , dass $3 < L < n - 1$ das ist dasselbe wie $4 \leq L \leq n - 2$ und damit gilt für die Anzahl der Regionen

$$M \geq 4(n - 2) = 4n - 8.$$

Gilt statt $3 < x < n-1$ nun $2 < x < n-1$, was dasselbe wie $3 \leq x \leq n-2$ ist, dann gibt es zusätzlich noch einen weiteren möglichen Wert für x und L. Es kann $x = 3$ sein und somit $L = n - 1$.
Damit gilt für die Anzahl der Regionen

$$M \geq 3(n - 1) = 3n - 3.$$

Fall 7. *Für $x = 2$, maximal zwei Linien schneiden sich in einem gemeinsamen Punkt, und für $2 \leq k \leq n-3$ parallele Linien, gilt für die Anzahl der erzeugten Regionen, dass $M \geq 3(n - 1)$ ist.*

Wenn k Linien aus n Linien zueinander parallel sind, dann wird jede der restlichen nicht parallelen $n - k$ Linie durch diese k parallelen Linien in $k + 1$ Teile geteilt. Zu den $k + 1$ Regionen, die von den parallelen Linien erzeugt wurden, kommen nun mindestens $(n - k)(k + 1)$ Regionen dazu. Die Anzahl der Regionen ist damit

$M \geq (k + 1) + (n - k)(k + 1) = (k + 1)L$ für $L = (1 + n - k)$.

Wenn wir davon ausgehen, dass die Ungleichung $2 \leq k \leq n - 3$ gilt, so haben wir $3 \leq L \leq n - 2$, $4 \leq L \leq n + 2 - 3 = n - 1$. Deshalb gilt wie im Fall 6 :

$M \geq (k + 1)L \geq 3(n - 1)$.

Fall 8. *Für $x = 2$ und $k = 1$, also es schneiden sich maximal zwei Linien in einem Punkt und es gibt keine parallelen Linien, dann ist die maximale Anzahl, die von n Linien erzeugten Regionen*

$$M = 1 + \frac{n(n + 1)}{2}$$

Diesen Fall haben wir bereits im Abschnitt 1.3 für den Satz 1 bewiesen.

Aus allen acht Fällen können wir nun den Beweise schrittweise zusammenfügen. Wenn wir $k \geq n-2$ parallele Linien haben, dann folgen die Aussagen des Satzes aus den Fällen 1,2 und 3.

Für $x > n - 2$ Linien die sich in einem Punkt schneiden, folgen die Aussagen aus den Fällen 4 und 5.

Für $k \leq n - 3$ und $3 < x < n - 1$, folgt aus dem Fall 6 (erster Teil), dass $M \geq 4n - 8$ ist. Somit ist $M \geq 3n - 3$, für $n > 5$. Für $k \leq n - 3$ parallele Linien und $x = 3$, folgt aus Fall 6 (zweiter Teil) die Aussagen des Satzes.

Für $x = 2$ und $2 \leq k \leq n - 3$ folgt aus Fall 7 die Aussagen des Satzes.

Für $x = 2$ und $k = 1$ folgt aus Fall 8 die Aussage des Satzes, da $M = 1 + \frac{n(n+1)}{2}$ größer oder gleich $3n - 2$ ist für $n \geq 3$.

Was noch fehlt ist der Fall wenn $n < 5$. Dieser Fall ist leicht nachzuprüfen.

> Für $n = 1$ und $n = 2$ folgt aus der Tabelle 1.1, dass jede Zahl M zwischen $n + 1 \leq M \leq 1 + \frac{n(n+1)}{2}$ angenommen werden kann, somit gilt die Aussage des Satzes.

Somit wurden alle möglichen Fälle nachgeprüft und der Satz ist bewiesen. □

Wir können nun den Satz auf ein paar Beispiel anwenden.

- Mit Hilfe dieses Satzes lässt sich also sagen, dass $n = 3$ Linien die Ebene nicht in $4 < M < 6$, also $M = 5$ Regionen teilen können, diese Aussage ist richtig (Siehe Tabelle 1.1).

- Aus dem Satz folgt auch, dass $n = 4$ Linien die Ebene nicht in $5 < M < 8$, also in $M = 6$ oder $M = 7$ Regionen teilen können, diese Aussage ist wiederum richtig (Siehe Tabelle 1.1).

- Für $n = 6$ Linien, besagt dieser Satz, dass diese Linien die Ebene nicht in $13 \leq M \leq 14$ Regionen teilen können. Diese Eigenschaft kann man auch wieder aus der Tabelle 1.1 entnehmen.

Bemerkung 1. Zudem ist klar, dass n Linien die Ebene in $2n$ Regionen teilen können.

1.5 Geknickte Linien in der Ebene

Bis hierhin haben wir uns nur gefragt, in wie viele Regionen n *gerade* Linien die Ebene teilen können und noch nicht, ob es Variationen der Problemstellung gibt. Eine Variation dieser, welche in [KGP94, S. 7] behandelt wird, beschäftigt sich mit nicht geraden Linien. Hier haben die Linien einen Knick wie in Abbildung 1.17 dargestellt. Wie schon bei den geraden Linien, gibt es für n geknickten Linien in der affinen Ebene auch eine maximale Anzahl an erzeugbaren Regionen Z_n.

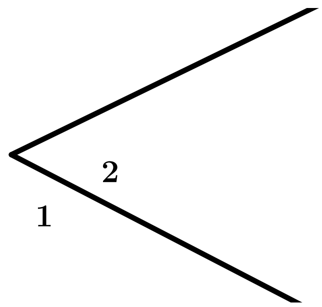


Abb. 1.17: Die mit $n = 1$ geknickten Linien erzeugbaren Regionen

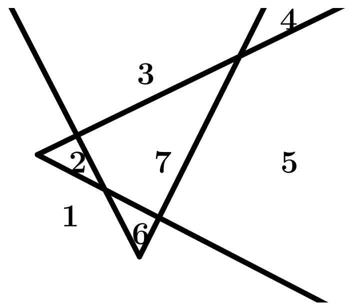


Abb. 1.18: Die mit $n = 2$ geknickten Linien erzeugbaren Regionen

Für $n = 1$ erhalten wir $Z_1 = 2$ Regionen, für $n = 2$ ist die maximale Anzahl von Regionen $Z_2 = 7$. Aber wie könnte es weiter gehen?

> Wenn wir uns diese geknickten Linien als zwei gerade Linien vorstellen, die bei ihrem gemeinsamen Schnittpunkt enden, so erhalten wir statt der eigentlichen 4 Regionen nur 2 Regionen, da drei der Regionen zu einer zusammenfallen, d.h. wir verlieren zwei Regionen. Wenn wir nun weitere Linien wie in Abbildung 1.18 hinzufügen, so dass der Schnittpunkt der geknickten Linien nicht einer der „Knick-Punkte“ ist, verlieren wir für jede Linie jeweils zwei Regionen.

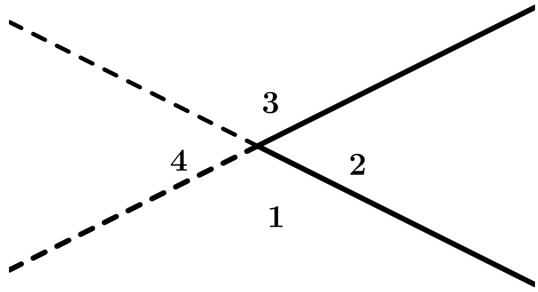


Abb. 1.19: Zusammenhang: Geknickte und gerade Linien

Präzisiert man diese Überlegung so lässt sich folgender Satz formulieren:

Satz 4 (Maximale Anzahl an Regionen für geknickte Linien)**.** *Die maximale Anzahl an Regionen, die von n geknickten Linien in der Ebene erzeugt werden kann ist*

$$\begin{aligned} Z_n =& L_{2n} - 2n \\ =& \frac{2n(2n+1)}{2} + 1 - 2n = 2n^2 - n + 1. \end{aligned}$$

Wobei L_{2n} *die maximale Anzahl an erzeugbaren Regionen von* $2n$ *geraden Linien ist.*

Die minimale Anzahl von Regionen, die mit n geknickten Linien erzeugbar ist, lässt sich leicht bestimmen. Wenn sich keine der geknickten Linien schneidet, so gilt für die Anzahl der Regionen $Z_n = n + 1$, genau wie für gerade Linien.

Satz 5 (Minimale Anzahl an Regionen für geknickte Linien)**.** *Die minimale Anzahl an Regionen, die von n geknickten Linien in der Ebene erzeugt werden kann ist*

$$Z_{min} = n + 1 \text{ für } n \geq 0.$$

1.6 Kreise in der Ebene

Eine weitere Variation der Problemstellung verwendet statt Linien Kreise in der Ebene. Wie schon bei den Linien, kann man auch die minimale und maximale Anzahl an erzeugbaren Regionen K_n für n Kreise in der affinen Ebene bestimmen. Für die maximale Anzahl kann man sich folgendes überlegen:

> Mit $n = 1$ Kreisen in der Ebene kann man $K_1 = 2$ Regionen erzeugen. Mit $n = 2$ Kreise, die zwei gemeinsame Schnittpunkte haben, ist die maximale Anzahl an Regionen $K_2 = 4$ und für $n = 3$ ist die maximale Anzahl an Regionen $K_3 = 8$.

Für die maximale Anzahl an erzeugbaren Regionen K_n gilt, dass sich die Kreise jeweils paarweise schneiden und sich maximal zwei Kreise in einem Schnittpunkt schneiden.

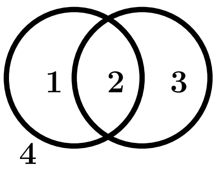


Abb. 1.20: Die mit $n = 2$ Kreisen erzeugbaren Regionen $K_2 = 4$

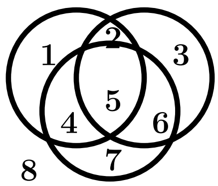


Abb. 1.21: Die mit $n = 3$ Kreisen erzeugbaren Regionen $K_3 = 8$

Wenn wir zu den $n - 1$ Kreisen einen n-ten Kreis dazugeben, so muss dieser alle anderen Kreise in zwei Punkten schneiden (siehe 1.20). Dadurch werden die Kreise in Kreisbögen geteilt und jeder von ihnen teilt zwei der bisherigen Regionen.

Da ein Kreis die Ebene in zwei Teile teilt, kann man folgenden Satz formulieren:

Satz 6 (Maximale Anzahl an Regionen für Kreise)**.** *Die maximale Anzahl an Regionen, die von n Kreisen in der Ebene erzeugt werden kann ist*

$$\begin{aligned} K_n =& 2 + 2 + 4 + 6 + \cdots + 2(n-1) \\ =& 2 + 2 \cdot \sum_{i=0}^{n-1} i = 2 + 2\frac{n(n-1)}{2} \\ =& n^2 - n + 2 \end{aligned}$$

Für die minimale Anzahl von Kreisen erzeugbaren Regionen gilt das selbe wie für die geraden und geknickten Linien.

Satz 7 (Minimale Anzahl an Regionen für Kreise)**.** *Die minimale Anzahl an Regionen, die von n Kreisen in der Ebene erzeugt werden kann ist*

$$K_{min} = n + 1 \text{ für } n \geq 0.$$

Beispielsweise können $n = 5$ Kreise in der affinen Ebene diese in mindestens $K_{min} = 6$ Regionen und in maximal $K_5 = 5^2 - 5 + 2 = 22$ Regionen teilen.

2 Problemstellung in der Projektiven Ebene

2.1 Projektive Geometrie

Neben der euklidischen und affinen Geometrie gibt es auch noch eine weitere Art, die projektive Geometrie. In der projektiven Geometrie wird die gewöhnliche affine (oder euklidische) Ebene durch Hinzunahme von Fernpunkten zur projektiven Ebene erweitern. Dies nennt man eine projektive Erweiterung. Dadurch lassen sich verschiedene Aussagen in einer allgemeineren Art beweisen. [Sch16]

Definition 2.1.1. Eine Gerade wird zur projektiven Geraden erweitert, indem zu den Punkten der Gerade noch ein zusätzlicher uneigentlicher Punkt F hinzugegeben wird. Dieser Punkt F beißt Fernpunkt der Geraden. Alle parallelen Geraden in der affinen Ebene besitzen den gleichen Fernpunkt. Eine Ebene wird zur projektiven Ebene erweitert, indem zu den Punkten der Ebene noch eine zusätzliche Gerade FG hinzugegeben wird, die alle Fernpunkte der Geraden dieser Ebene enthält. Diese Gerade FG wird Ferngerade der Ebene genannt. [Wag17, S. 120]

Die projektive Ebene über den Körper der reellen Zahlen ist die reelle projektive Ebene $\mathbb{R}P^2$.

Der entscheidende Unterschied zur Definition der Affinen Ebene ist der, dass sich in der projektiven Ebene immer je zwei Geraden schneiden. Das Parallelen-

Axiom, welches in der affinen und euklidischen Ebene gilt, gilt in der projektiven Ebene folglich nicht mehr. Stattdessen ist ein anderes Axiom von großer Bedeutung. Dieses besagt, dass je zwei Geraden, die in derselben projektiven Ebene liegen, einen gemeinsamen Schnittpunkt haben. Dieses Axiom kommt in einer ähnlichen Form auch in der affinen Ebene vor, gilt aber nicht für alle Geraden, da es dort auch parallele Geraden gibt, welche keinen gemeinsamen Schnittpunkt haben. In der projektiven Ebene dagegen, schneiden sich parallele Geraden in einem sogenannten *Fernpunkt.* [Cox55]

Aber welchen Vorteil bringt eine projektive Ebene im Gegensatz zu einer affinen (euklidischen) Ebene in unserem Fall?

> Wenn wir wie in [Iva10] zwei parallele Linien im $\mathbb{R}^2$ haben, die von einer dritten Linie geschnitten werden und eine Linie im Unendlichen dazunehmen, bekommen wir eine Konstellation mit vier Linien, von denen sich drei in einem Punkt P im Unendlichen schneiden, nur die vierte Linie nicht. Betrachtet man nun die Äquivalenzkonfiguration mit der vierten Linie im Unendlichen so besteht der Teil der reellen Ebene $\mathbb{R}^2$ lediglich aus drei sich schneidenden Linien.

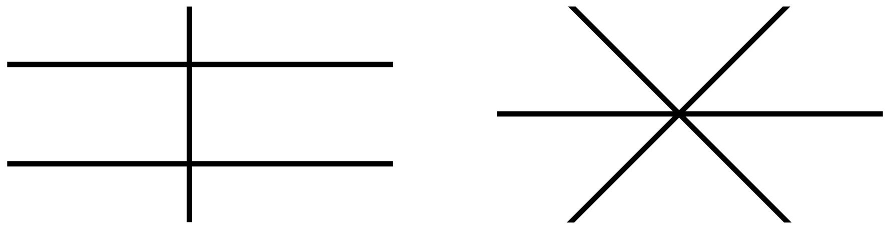


Abb. 2.1: In der Projektiven Ebene sind beide Konfigurationen gleich.

In der projektiven Ebene $\mathbb{R}P^2$ wird also nicht zwischen Geraden, die sich in genau einem Punkt schneiden, und parallelen Geraden unterschieden. Dadurch fallen einige Fallunterscheidungen bei den Beweisen weg.

Wenn wir n Linien in der reellen projektiven Ebene haben, dann teilen diese die Ebene in M Regionen. Ein paar Beispiele, welche Werte als Anzahl von M Regionen in Frage kommen [Arn13]:

n	1	2	3	4	5
M	1	2	3	4	5
			4	6	8
				7	9
					10
					11

Tabelle 2.1: erzeugbare Regionen für kleines n

Wir können das Linienproblem in der projektiven Ebene auf die in der Affinen Ebene zurückführen und umgekehrt. So kann man beispielsweise eine Linie im $\mathbb{R}P^2$ als die Linie im Unendlichen betrachten und erhaltet somit $n-1$ Linien im $\mathbb{R}^2$. Für die Anzahl M der Regionen heißt das dann:

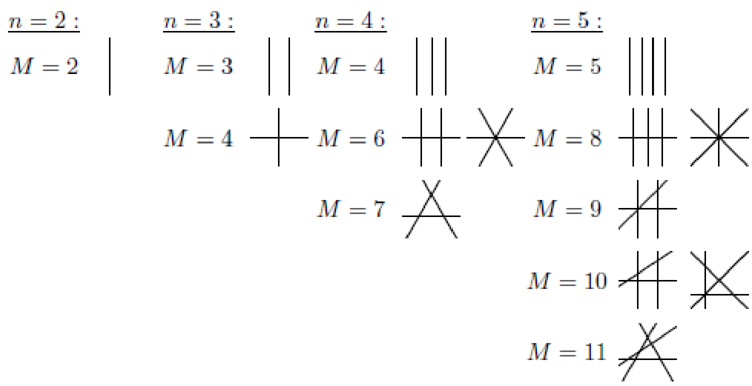


Abb. 2.2: mögliche Anzahl an Regionen aus [Arn13]

2.2 Minimale und Maximale Anzahl an Regionen

Wie schon in der affinen Ebene kann man auch in der projektiven Ebene die minimale und die maximale Anzahl an erzeugbaren Regionen M bestimmen, die von n Linien erzeugt werden.

Satz 8 (Minimale und Maximale Anzahl an Regionen)**.** *Die minimale Anzahl an Regionen, die von n Linien in der projektiven Ebene erzeugt werden kann ist*

$$M_{min} = n \ .$$

Die maximale Anzahl an Regionen, die von n Linien in der projektiven Ebene erzeugt werden kann ist

$$M_{max} = 1 + \frac{n(n-1)}{2} \ .$$

Dieser Satz folgt aus den beiden Sätzen 2 und 1 der affinen Ebene.[Arn13]

Beweis. Gegeben seien n Linien in der projektiven Ebene $\mathbb{R}P^2$.
Wir wollen nun zeigen, dass die minimale Anzahl an erzeugbaren Regionen $M_{min} = n$ ist. Dafür nehmen wir an, dass eine der n Linien, die Linie im Unendlichen ist und können nun die Aussage für $n-1$ Linien in der affinen Ebene zeigen, da sie den n Linien in der projektiven Ebene entsprechen. Für $n-1$ Linien in der affinen Ebene gilt:

$$M_{min} = (n-1) + 1 \ = n$$

Also folgt daraus, dass $M_{min} = n$ für n Linien in $\mathbb{R}P^2$.
Nun wollen wir noch zeigen, dass die maximale Anzahl an erzeugbaren Regionen $M_{max} = 1 + \frac{n(n-1)}{2}$ ist. Dafür nehmen wir wiederum an, dass eine der n Linien, die Linie im Unendlichen ist und können nun die Aussage für $n-1$ Linien in der affinen Ebene zeigen.

$$\begin{aligned} M_{max} &= 1 + \frac{(n-1)((n-1)+1)}{2} = \\ &= 1 + \frac{(n-1)n}{2} \end{aligned}$$

Also folgt daraus, dass $M_{max} = 1 + \frac{n(n-1)}{2}$ für n Linien in $\mathbb{R}P^2$.

$\square$

Wir wissen nun, dass für die von n Linien in der projektiven Ebene $\mathbb{R}P^2$ erzeugten Regionen M gilt :

$$n \leq M \leq 1 + \frac{n(n-1)}{2}.$$

In der affinen Ebene kann M nicht alle Werte zwischen der maximalen und minimalen Anzahl an erzeugbaren Regionen annehmen. Das gilt auch für die erzeugbaren Regionen in der projektiven Ebene. Viele Mathematiker haben bewiesen, dass es solche Löcher für M gibt und diese auch beschrieben. Zudem haben sie daraus weiter Merkmale für die Anzahl an Regionen herausgefunden. So hat sich z.B. Nicola Martinov [Mar93] in den 90igern damit beschäftigt und auch Merkmale und Erkenntnisse veröffentlicht, die dann später von Shnurnikov [Shn10] korrekt bewiesen wurden (siehe dazu [Shn10]). Einige dieser Merkmale und Erkenntnisse werden wir nun genauer erläutern.

Nehmen wir an, dass wir n Linien in der projektiven Ebene haben. Diese Linien schneiden sich in v Schnittpunkte. Wir kennen zudem die Anzahl der Linien, die sich in einem bestimmten Punkt schneiden. Mit diesen Informationen kann man die Anzahl der erzeugten Regionen leicht bestimmen.

Folgender Satz und auch der passende Beweis dazu stammen aus [Iva10]:

Satz 9. *Gegeben seien n Linien in der projektiven Ebene ($\mathbb{R}P^2$), welche sich in v Punkten schneiden und die Ebene in M Regionen teilen. Es sei x_i die Anzahl der Linien, die sich im i-ten Punkt der v Punkte schneiden.*
Dann gilt für die Anzahl der Regionen, dass

$$M = 1 + \sum_{i=1}^{v} (x_i - 1)$$

ist.

Beweis. Der Satz wird mit Hilfe der Euler-Charakteristik für CW-Komplexe bewiesen. Dafür sehen wir die Regionen als Zellen an. Dann zerlegen die Linien die projektive Ebene in Zellen. Nehmen wir nun an, dass es v null-dimensionale Zellen gibt, Eckpunkte genannt, und da die Anzahl e von eindimensionalen Zellen gleich die Hälfte der Summe der Wertigkeiten der Ecken ist, gilt dass

$$e = \sum_{i=1}^{v} x_i.$$

Die Anzahl der konstruierten zweidimensionalen Zellen ist M. Die reelle projektive Ebene $\mathbb{R}P^2$ hat die Euler-Charakteristik 1 und somit gilt

$$\begin{aligned} M &= 1 + e - v = 1 + \sum_{i=1}^{v} x_i - v \\ &= 1 + \sum_{i=1}^{v} (x_i - 1) \end{aligned}$$

□

Dieser Satz kann auch auf die affine Ebene angewendet werden, dort gilt dann für n Linien in der Ebene, dass

$$M = n + 1 + \sum_{i=1}^{v} (x_i - 1)$$

ist.

2.3 Einige Löcher in der Projektiven Ebene

Nach der minimalen und maximalen Anzahl an erzeugbaren Regionen machen wir uns jetzt, wie schon im Kapitel 1, auf die Suche nach Löchern bzw. Ausnahmen, hier aber im $\mathbb{R}P^2$. Es existieren also Werte für M, die nicht als erzeugte Anzahl an Regionen von n Linien in Frage kommen können. Ein solches Loch beschreibt folgender Satz aus [Arn13]:

Satz 10. *Es sei $n \in \mathbb{N}$. Dann können $n > 2$ Linien die projektive Ebene nicht in M Regionen teilen, wenn*

$$\begin{aligned} n < M \ &< \ 2(n-1) \text{ oder} \\ 2(n-1) < M \ &< \ 3(n-2) \text{ ist.} \end{aligned}$$

Nun müssen wir diesen Satz noch beweisen. Er wurde in [Arn13] etwas anders bewiesen als es hier der Fall ist. Dieser Satz ist aber ein gutes Beispiel dafür, dass Aussagen der projektiven Geometrie in die der affinen Geometrie übertragen werden können und auch umgekehrt. Deshalb wird für den Beweis dieses Satzes, der Satz 3 für die affine Ebene verwendet.

Beweis. Gegeben seien n Linien in der projektiven Ebene $\mathbb{R}P^2$. Wir nehmen an, dass eine der n Linien die Linie im Unendlichen ist und können nun die Aussagen für $n-1$ Linien in der affinen Ebene zeigen.

Für $n-1$ Linien in der affinen Ebene gilt nach Satz 3, dass

$$\begin{aligned} (n-1)+1 < M < 2(n-1) &\Leftrightarrow \\ n < M < 2(n-1) & \end{aligned}$$

und dass

$$\begin{aligned} &2(n-1) < M < 3(n-1)-3 \Leftrightarrow \\ &2(n-1) < M < 3(n-2). \end{aligned}$$

Somit gilt für n Linien in der projektiven Ebene, dass diese die Ebene nicht in M Teile teilen können, wenn

$$\begin{aligned} n < M &< 2(n-1) \\ 2(n-1) < M &< 3(n-2) \end{aligned}$$

ist. $\square$

Bemerkung 2. Es ist leicht erkennbar, dass n Linien die projektive Ebene in $M = 2(n-1)$ und $M = 3(n-2)$ Regionen teilen können.

Wir haben nun zwei Beschreibungen für Löcher in der projektiven Ebene gefunden. Das erste Loch in der projektiven Ebene tritt schon bei $n = 4$ Linien auf, wie man aus der Tabelle 2.1 entnehmen kann. Nun können wir dieses erste Loch auch mithilfe des Satzes 10 beschreiben:

$$\begin{aligned} n < M &< 2(n-1) \quad \text{für } n = 4 \Rightarrow \\ 4 < M &< 6 \Rightarrow \\ M &= 5 \end{aligned}$$

Mit $n = 4$ Linien kann die projektive Ebene also nicht in $M = 5$ Regionen geteilt werden.
Für $n = 5$ Linien gilt dann, dass $5 < M < 8$ also die projektive Ebene kann nicht in $M = 6$ oder $M = 7$ Regionen geteilt werden usw.

Neben der Beschreibung von Löchern, können wir auch Intervalle zwischen der minimalen und maximalen Anzahl der erzeugbaren Regionen angeben, welche als Werte für M in Frage kommen. D.h. in diesen Intervallen kommt es nicht zu Löchern.

Der folgende Satz, der ursprünglich aus [Arn13] stammte, wird auch in [Iva10] nochmals in einer ähnlichen Weise behandelt. Beide Autoren beweisen den Satz unterschiedlich. Wir werden den Beweis an jenem aus [Iva10] anlehnen, da dieser einerseits kürzer ist, andererseits wieder die Parallelität zur affinen Ebene aufzeigt.

Satz 11. *Es sei $n \in \mathbb{N}$. n Linien können die projektive Ebene ($\mathbb{R}P^2$) in M Regionen teilen, wenn*

$$x(n+1-x) \leq M \leq x(n+1-x) + \frac{(n-x)(n-x-1)}{2}$$

wobei x die maximale Anzahl an Linien beschreibt, die einen gemeinsamen Schnittpunkt haben.

Beweis. Gegeben seien n Linien in der projektiven Ebene $\mathbb{R}P^2$. Wir wählen x fest und es sei eine der n Linien, die x schneiden, die Linie im Unendlichen. Die dazu gehörende affine Ebene $\mathbb{R}^2$ sei durch $x-1$ parallelen Linien in x Regionen geteilt. Wir nehmen nun nacheinander alle restlichen $n-x$ Linien dazu. Jedes mal wenn wir eine neue Linie dazunehmen, wird die Anzahl der Regionen um $a+1$ erhöht, wobei a die Schnittpunkte mit den anderen Linien beschreibt. Für die Schnittpunkte gilt dann:

$$\begin{aligned}
&a = a_1 = x-1 \\
&a = a_2 && \text{mit } x-1 \leq a_2 \leq x \\
&a = a_3 && \text{mit } x-1 \leq a_3 \leq x+1 \\
&\quad \dots \\
&a = a_{n-x} && \text{mit } x-1 \leq a_3 \leq x+(n-x)-1
\end{aligned}$$

dann gilt für die Anzahl an erzeugbaren Regionen M

$$\begin{aligned}
x + x(n-x) \leq \ M \ &\leq x + x + (x+1) + \dots + (n-1) \\
&= x(n-x+1) + 1 + \dots + (n-x-1) \\
&= x(n-x+1) + \frac{(n-x)(n-x-1)}{2}
\end{aligned}$$

□

Bemerkung 3. Wenn $x \geq \frac{n-1}{2}$ ist und der Satz 11 erfüllt ist, dann gilt für die Anzahl an erzeugbaren Regionen M, dass es eine Anordnung von n Linien gibt, die die Ebene genau in M Regionen teilt. Es gibt außerdem eine solche Anordnung, in welcher x die maximale Anzahl an Linien ist, die einen gemeinsamen Schnittpunkt haben. [Iva10]

In vielen Werken von unterschiedlichen Autoren werden Bedingungen für die Anzahl an erzeugbaren Regionen M aufgezeigt, verglichen und erforscht. So werden beispielsweise verschiedene Erkenntnisse von anderen Autoren im Paper [Shn10] von Shnurnikov verfeinert, präzisiert und auch neue Beweise geliefert.

Wir können nun die Aussage des vorherigen Satzes 11 noch etwas verfeinern. Und zwar definiert man ein $j \in \mathbb{N}$ zwischen $0 \leq j \leq n-2$. Dann kann die Anzahl der erzeugbaren Regionen M alle Werte im Intervall

$$(n-j)(j+1)+\frac{j(j-1)}{2}-min\{n-j,\frac{j(j-1)}{2}\} \leq M \leq (n-j)(j+1)+\frac{j(j-1)}{2}$$

annehmen. (aus [Mar93] und [Shn10])

Viele der Werte, die als erzeugbare Regionen in Frage kommen können, hängen von der Anzahl der Linien ab, die sich maximal in einem Punkt schneiden. Ist diese Anzahl bekannt, kann man weitere Bedingungen für die Anzahl der Regionen formulieren und dadurch die auftretenden Löcher einschränken.

Eine weitere Bedingung für die Anzahl an erzeugbaren Regionen liefert der folgende Satz aus [Arn13]. Der Satz ist nur nützlich wenn x die maximale Anzahl an Linien, die sich in einem Punkt schneiden bekannt ist. Andernfalls ist dieser Satz unbrauchbar.

Satz 12. *Es seien n Linien in der projektiven Ebene $\mathbb{R}P^2$ gegeben und es sei $x > 2$ das Maximum an Linien, die sich in einem Punkt schneiden. Dann gilt für die Anzahl an erzeugbaren Regionen M, dass*

$$M \geq \frac{n(n-1)}{2(x-1)}$$

und dass

$$M \geq 2\frac{n^2-n+2x}{x+3}$$

sein muss.

Wobei die zweite Bedingung des Satzes aus [Shn10] stammt.

Auch der folgende Satz beschreibt eine ähnliche Bedingung für die erzeugbaren Regionen M [Iva10]:

Satz 13. *Gegeben seien n Linien in der projektiven Ebene $\mathbb{R}P^2$ und maximal x von denen schneiden sich in einem Punkt. Dann gilt für die Anzahl an erzeugbaren Regionen, dass*

$$M \geq \frac{n(n-1)}{x} + 1$$

Mit Hilfe der Sätze 11, 12 und 13 können wir nun bestimmte Werte für die Anzahl an erzeugbaren Regionen M überprüfen. So können einige schon von Anfang an ausgeschlossen werden und andere wiederum können als mögliche Werte vorkommen.
Diese Sätze haben aber den Nachteil, dass ihre Anwendung nur Sinn ergibt, wenn die maximale Anzahl an Linien, die einen gemeinsamen Schnittpunkt haben, bekannt ist. Deshalb werden wir uns jetzt noch mit Sätzen befassen, für die wir nur die Anzahl n an Linien in der projektiven Ebene wissen müssen und dabei nicht wissen, wie viele und in wie vielen Punkten sich diese Linien schneiden.

Wenn wir uns die Tabelle 2.1 genauer ansehen, so scheint es, dass ab einer bestimmten Zahl alle Werte für M bis zur oberen Grenze M_{max} angenommen werden können. Wir zeigen nun, dass falls es solche positive ganze Zahl m_n gibt, alle Werte darüber als Anzahl an Regionen in Frage kommt. [Iva10]

Satz 14. *Es sei m_n eine positive ganze Zahl mit*

$$m_n = \begin{cases} \frac{(n+1)^2}{4} \textit{ falls } n \textit{ ungerade ist} \\ \frac{n(n+2)}{4} \textit{ falls } n \textit{ gerade ist} \end{cases}$$

Dann gibt es für jedes M, das

$$m_n \leq M \leq \frac{n(n-1)}{2} + 1 = M_{max}$$

erfüllt, eine Anordnung von n Linien in der projektiven Ebene $\mathbb{R}P^2$, die diese in M Regionen teilt.

Beweis. Die Aussage des Satzes wird durch Induktion bewiesen.
Induktionsanfang:

$$\begin{aligned}
&\text{Fall } n = 1 \text{ ungerade } : m_n = \frac{2^2}{4} = 1 \\
&\Rightarrow 1 \leq M \leq \frac{n(n-1)}{2} + 1 = 1 \\
&\Rightarrow m_n = M_{max}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\text{Fall } n = 2 \text{ gerade } : m_n = \frac{2(4)}{4} = 2 \\
&\Rightarrow 2 \leq M \leq \frac{n(n-1)}{2} + 1 = 2 \\
&\Rightarrow m_n = M_{max}
\end{aligned}$$

Induktionsschritt
Es sei nun $n \in \mathbb{N}$ fest und $n > 2$.

Fall 1: n ungerade

Es gibt für jedes M mit

$$\frac{(n+1)^2}{4} \leq M \leq \frac{n(n-1)}{2} + 1 = M_{max}$$

eine Anordnung der n Linien, die die projektive Ebene genau in M Regionen teilt.
Eine der n Linien sei nun die Linie im Unendlichen. Wenn wir jetzt eine neue Linie hinzufügen, die nicht durch einen der Schnittpunkte der ursprünglichen Linien verläuft, dann teilen die $n+1$ Linien die projektive Ebene in $M+n$ Regionen. Dadurch kann jeder Wert zwischen $\frac{(n+1)^2}{4} + n$

und $\frac{n(n-1)}{2} + 1$ als Anzahl von erzeugbaren Regionen angenommen werden, die von $n+1$ Linien in der projektiven Ebene erzeugt werden.

$n \longrightarrow n+1$

Wir nehmen an, dass $x = \frac{n+3}{2}$, damit die Bemerkung 3 erfüllt ist. So folgt aus dem Satz 11, dass jeder Wert zwischen

$$\frac{(n+1)(n+3)}{4} \text{ und } \frac{(n+1)(n+3)}{4} + \frac{(n-1)(n-3)}{8} = \\ = \frac{3n^2+4n+9}{8}$$

als M Anzahl der erzeugbaren Regionen für $n+1$ Linien in Frage kommt. Es muss gelten, dass

$$\frac{3n^2+4n+9}{8} + 1 \geq \frac{(n+1)^2}{4} + n \Leftrightarrow$$
$$3n^2 + 4n + 9 + 8 \geq 4(n+1)^2 + 8n \Leftrightarrow$$
$$n^2 - 8n + 15 \geq 0$$

und dies gilt für alle ungeraden n.

Fall 2: n gerade

Es gibt für jeden Wert von M zwischen

$$\frac{n(n+2)}{4} \leq M \leq \frac{n(n-1)}{2} + 1 = M_{max}$$

eine Anordnung der n Linien, die die projektive Ebene genau in M Regionen teilt.
Eine der n Linien sei die Linie im Unendlichen. Wenn wir jetzt eine neue Linie hinzufügen, die nicht durch einen der Schnittpunkte der ursprünglichen Linien verläuft, dann teilen die $n+1$ Linien die projektive Ebene in $M+n$ Regionen. Dadurch kann jeder Wert zwischen $\frac{n(n+2)}{4} + n$ und $\frac{n(n-1)}{2} + 1$ als Anzahl von erzeugbaren Regionen angenommen werden, die von $n+1$ Linien in der projektiven Ebene erzeugt werden.

$n \longrightarrow n+1$

Wir nehmen an, dass $x = \frac{n+3}{2}$, damit die Bemerkung 3 erfüllt ist. So folgt aus Satz 11, dass jeder Wert zwischen

$$\frac{(n+2)^2}{4} \text{ und } = \frac{3n^2+6n+8}{8}$$

als M Anzahl der erzeugbaren Regionen für $n+1$ Linien in Frage kommt. Es muss gelten, dass

$$\begin{aligned} \frac{3n^2+6n+8}{8}+1 &\geq \frac{(n+2)n}{4}+n \Leftrightarrow \\ 3n^2+6n+8+8 &\geq 4n^2+4n+8n \Leftrightarrow \\ n^2-6n+16 &\geq 0 \end{aligned}$$

und dies gilt für alle geraden n.

$\square$

Wir wollen nun einen letzten Satz und dessen Abwandlungen aufzeigen, der in ähnlichen Formen immer wieder in der Literatur vorkommt. Dieser Satz beschreibt nun wieder Löcher, also Werte die nicht als erzeugbare Regionen in Frage kommen können. Hierfür muss wieder die maximale Anzahl an Linien, die sich in einem Punkt schneiden bekannt sein. Um uns ein wenig Schreibarbeit zu sparen führen wir eine neue Notation ein. Wir setzen für ein sehr großes n $j = n - x$. Diese Zahl setzen wir in die Ober- und Untergrenzen des Satzes 11 ein und erhalten somit:

$$\begin{aligned} a_j &= x(j+1) = (n-j)(j+1) \text{ und} \\ b_j &= (n-j)(j+1) + \frac{j(j-1)}{2} \end{aligned}$$

Es sei $i \in \mathbb{N}$ und $i = 0 \cdots j$. Dann haben wir für die Grenzen a_i und b_i :

$$a_0 = b_0 < a_1 = b_1 < a_2 < b_2 < a_3 < \cdots < b_{j-1} < a_j$$

Mit diesen Grenzen können wir nun die Intervalle für unsere Löcher definieren:

$$\begin{aligned}
&D_1 = (b_0 < M < a_1)\\
&D_2 = (b_1 < M < a_2)\\
&\dots\\
&D_j = (b_{j-1} < M < a_j) =\\
&\quad = ((n-j-1)j + \frac{(j-2)(j-1)}{2} < M < (n-j)(j+1))
\end{aligned}$$

Anhand dieser Intervalle kann nun folgender Satz aus [Arn13] formuliert werden:

Satz 15. *Es seien n die Linien in der reellen projektiven Ebene $\mathbb{R}P^2$ und x die maximale Anzahl an Linien, die sich in einem Punkt schneiden. Zudem sei n genügend groß und $j = n - x$. Dann kann die Anzahl der erzeugbaren Regionen M keine der Werte im Intervall D_j annehmen.*

Aber was bedeutet n genügend groß? Ist $n > 100$ schon groß genug? Dies ist nicht eindeutig festgelegt. Die Anzahl der Linien n kann beispielsweise in Abhängigkeit der Zahl $j = n - x$ folgendermaßen festgelegt werden: [Iva10]

Für $j = 1, 2$ muss $n \geq \frac{j(j+1)}{2} + 3$ sein.
Für $j \geq 3$ soll $n \geq j^2$ sein.

Wir können nun den Satz 14 mit Hilfe der Zahl j erweitern indem wir für m_n eine andere Bedingung festlegen. Hierfür muss nicht zwischen einem geraden oder ungeraden n unterschieden werden.

Der passende Satz dazu sieht folgendermaßen aus:

Satz 16. *Gegeben seien n Linien in der projektiven Ebene $\mathbb{R}P^2$. Es sei $j_0 = min\{j|j(j+1) \geq 2(n-2)\}$. Dann gilt für M die Anzahl an erzeugbaren Regionen, dass M jeden Wert zwischen*

$$j_0(n+1-j_0) \leq M \leq \frac{n(n-1)}{2} + 1 = M_{max}$$

annehmen kann.

Die Aussage des Satzes ist nicht nur in der projektiven Ebene, sondern auch in der affinen Ebene nützlich. Wenn wir uns nochmal die Tabelle 1.1 aus dem Kapitel 1 in Erinnerung rufen ,sehen wir, dass es einen Wert für M gibt ab der alle größeren Zahlen als mögliche Werte für die Anzahl an erzeugbaren Regionen in Frage kommen.
Eine Verfeinerung dieser Erkenntnis liefert folgende Bemerkung.

Bemerkung 4. Für die affine Ebene setzt man $j_0 = min\{j|j(j+1) \geq 2(n-1)\}$. Dann gilt für M die Anzahl an erzeugbaren Regionen in der reellen affinen Ebene $\mathbb{R}^2$, dass M jeden Wert zwischen

$$j_0(n+2-j_0) \leq M \leq \frac{n(n+1)}{2} + 1 = M_{max}$$

annehmen kann.

Nun wollen wir noch ein kurzes Beispiel dieser Bemerkung aufzeigen. Hierfür wählen wir ein relativ kleines n, wodurch die oben angeführten Bedingungen aus [Iva10] nicht gelten. Wir nehmen an, dass wir $n = 5$ Linien in der reellen affinen Ebene haben und dass sich maximal $x = 2$ Linien in einem Punkt schneiden. Dann gilt für die Anzahl an erzeugbaren Regionen M, dass

$$\begin{aligned} j_0 &= min\{j|j(j+1) \geq 8\} \Rightarrow j_0 = 3 \\ j_0(n+2-j_0) = 3 \cdot 4 &\leq M \leq \frac{n(n+1)}{2} + 1 = 16 \\ 12 &\leq M \leq 16 \end{aligned}$$

Also kann M alle Werte zwischen 12 und 16 annehmen.

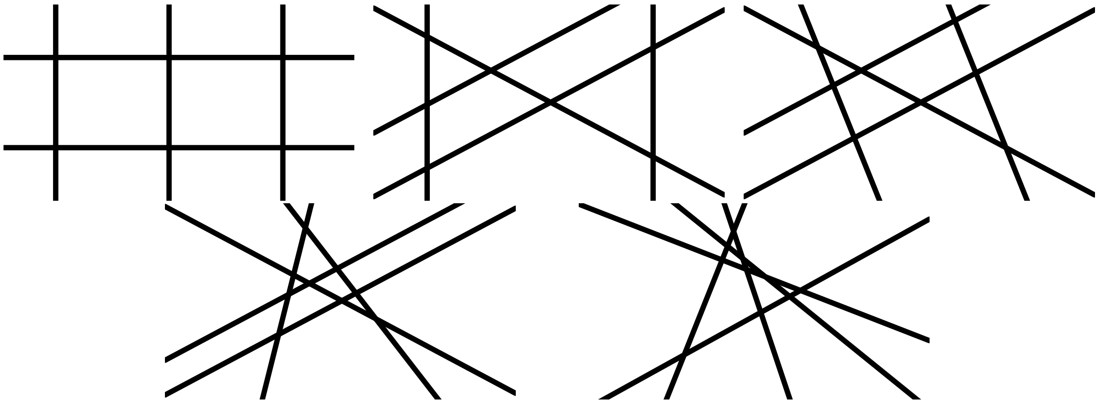


Abb. 2.3: Regionen von $n = 5$ Linien mit $x = 2$ Schnittpunkten

Aus dem Satz über die minimale Anzahl an Regionen aus dem Kapitel 1 folgt, dass n Linien die affine Ebene in mindestens $M = n + 1 = 6$ Regionen teilt. Aus dem Satz 3 folgt, dass $n = 5$ Linien die affine Ebene nicht in M Regionen teilen können wenn,

$$
\begin{aligned}
n + 1 = 6 <& M < 2n = 10 \text{ oder} \\
2n = 10 <& M < 3n - 3 = 12 \text{ ist.}
\end{aligned}
$$

Mit Hilfe dieser Sätze lässt sich also sagen, dass $n = 5$ Linien, die affine Ebene $\mathbb{R}^2$ in $M = 6, 10, 12, \cdots, 16$ Regionen teilen können.

Beispiel in der Projektiven Ebene

Schauen wir uns noch ein zusätzliches Beispiel an, welches einige der Sätze zur projektiven Ebene beinhaltet.
Nehmen wir an, dass wir $n = 20$ Linien in der projektiven Ebene $\mathbb{R}P^2$ haben und dass wir weder wissen wie viele dieser Linien sich schneiden noch wie viele Schnittpunkte es gibt.

Die minimale Anzahl an Regionen, die von diesen n Linien erzeugt werden kann ist

$$M_{min} = 20$$

und für die maximale Anzahl an Regionen ist

$$M_{max} = 1 + \frac{20(20-1)}{2} = 191$$

Wir wissen also, dass 20 Linien im $\mathbb{R}^2$ erzeugten Regionen gilt:

$$20 \leq M \leq 191$$

Es gibt nun eine bestimmte Zahl, ab der alle Werte für M angenommen werden können. Dies beschreibt Satz 14:

$$n \text{ gerade: } m_n = \frac{20(20+2)}{4} = 110$$
$$\text{also } 110 \leq M \leq 191$$

Nach Satz 16: $j_0 = 6$ Dann kann M jeden Wert zwischen

$$6(20+1-6) \leq M \leq 191$$
$$90 \leq M \leq 191$$

annehmen.

Nun verwenden wir den Satz 10, um herauszufinden welche Werte als erzeugbare Regionen nicht in Frage kommen können.

$$\begin{aligned} 20 <& M < 2(20-1) = 38 \\ 38 <& M < 3(20-2) = 54 \end{aligned}$$

Zusammenfassend lässt sich sagen, dass $n = 20$ Linien die projektive Ebene $\mathbb{R}P^2$ in

$$20, 38, 90, 91, \cdots, 110, \cdots, 191$$

Regionen sicher teilt.

3 Das Linienproblem im Schulunterricht

In diesem Kapitel wird das Linienproblem in den Kontext Schule eingeordnet. Dabei wird zuerst die Geometrie und deren Anwendung im Schulunterricht erklärt, danach der Lernplan dahingehen analysiert und zum Schluss ein eigenes Konzept für die Schule zum Thema dieser Arbeit erstellt.

3.1 Geometrie im Schulunterricht

Die Mathematik ist eines der Kernfächer jeder Schule. Die Themen des Mathematikunterrichts setzen sich dabei aus mehreren Teilgebieten und Schwierigkeitsgraden zusammen. Eines dieser Teilgebiete ist die Geometrie. Die Ziele des Geometrieunterrichts sind einerseits, dass die Schüler und Schülerinnen selbstständig die Umwelt erschließen können. Zudem sollen sie die Grundlagen des wissenschaftlichen Denkens und Arbeitens kennenlernen und andererseits sollten die Schüler und Schülerinnen das Prinzip hinter den Problemlösen verstehen und verschiedene Problemlösestrategien anwenden können. Im Geometrieunterricht sollen den Schülern und Schülerinnen die Objekte und ihre Eigenschaften vermitteln werden, wie z.B. was ein Punkt, eine Strecke, eine Gerade oder ein Kreis ist oder wie Winkel gemessen werden. Zum anderen auch die Denk und Arbeitsweisen der Mathematik, wie z.B. sind Begriffe definiert und wie gelangt man zu Ergebnissen. [WFH+09, S. 17 ff.]

Konstruktive Zugänge zur Geometrie

Ein wichtiger Zugang in der Mathematik ist der konstruktive Zugang. Dafür eignet sich die Geometrie besonders gut. Das Arbeiten mit Werkzeugen, wie Zirkel und Lineal, und das Arbeiten auf der begrifflichen Ebene sind wichtige Teile des Geometrieunterrichts. Mit Hilfe dieser Werkzeuge können genauere Konstruktionen als auch kleinere Skizzen erstellt werden, um die Ausgangssituationen von Objekten oder um die Beziehungen zwischen gegebenen Objekten darzustellen. [WFH+09, S. 55]

Schon seit Euklid (ca. 300 v. Chr.) wird die Elementargeometrie der Ebene auf Zirkel und Lineal aufgebaut. Wie oben schon erwähnt spielen sie im heutigen Geometrieunterricht noch eine wichtige Rolle, werden aber zusätzlich durch Hilfsmittel wie z.B. Geometrie-Software ergänzt. [WFH+09, S. 59]

Geometrie und Problemlösen

Eine der mathematischen Kompetenzen, die Schüler und Schülerinnen beherrschen sollen, ist die des Lösens von Problemen. Ein Problem ist hierbei eine Aufgabenstellung in einem mathematischen Kontext, die nicht durch einfaches Hinschauen von den Schülern und Schülerinnen gelöst werden kann, da ihnen kein schematisiertes Lösungsverfahren bekannt ist bzw. zur Verfügung steht.

Einige Probleme aus der Geometrie eignen sich besonders gut für das Problemlösen. Beispielsweise lassen sich viele Probleme gut graphisch veranschaulichen (Punkte, Geraden, Kreise, Konstruktionsprobleme) und die Handlungsschritte dabei sind für viele Schüler und Schülerinnen gut nachvollziehbar. Aber generell können jegliche Art von Probleme in allen Bereichen des Mathematikunterrichts und in allen Jahrgangsstufen behandelt werden und müssen nicht nur auf den Geometrieunterricht beschränkt werden. [WFH+09, S. 83]

Das Problemlösen ist aus der heutigen Mathematikdidaktik und auch aus anderen naturwissenschaftlichen Didaktiken, wie Informatikdidaktik etwa, nicht mehr wegzudenken. So beinhalten auch die neueren österreichischen Bildungs-

standards für die 4. Schulstufe “Problemlösen (AK4)„ als eine eigene allgemeine mathematische Kompetenz. [Bif]
Auch in den Rahmenrichtlinien der Südtiroler Fachoberschulen wird das Lösen von mathematischen Problemen als eine eigene Kompetenz beschrieben, die die Schüler und Schülerinnen am Ende des Bienniums (1. und 2. Klasse) und der 5. Klasse (Maturaklasse) besitzen sollen. Am Ende des Bienniums sollen die Schüler und Schülerinnen folgende Kompetenzen haben

> *Probleme mathematisch lösen:*
>
> - *geeignete Lösungsstrategien für Probleme finden, auswählen und anwenden*
> - *vorgegebene und selbst formulierte Probleme bearbeiten [...][SdAPBS]*

Am Ende der 5. Klasse Oberstufe, also nach der Matura, sollen die Schüler und Schülerinnen in der Lage sein auch selbst mathematische Probleme zu formulieren und für diese dann auch geeignete Lösungsverfahren auszuwählen, anzuwenden, vergleichen und auch die Verfahren hinsichtlich Effizienz bewerten zu können. [SdAPBS]

Um ein Problem zu lösen, gibt es verschiedene Herangehensweisen. Die meisten dieser verschiedenen Problemlöseprozesse folgen aber stets den selben zugrundeliegenden Muster. Dabei wird als allererstes das Problem erfassen und analysieren, danach wird ein erster Entwurf oder auch Lösungsplan genannt, entwickelt, dieser wird dann getestet und ausgeführt und zum Schluss wird dieser und die Ergebnisse evaluiert. Konkret kann ein solcher Problemlöseplan folgendermaßen aussehen :

1. **P**roblem verstehen und in eigenen Worten fassen
2. **A**nsatz suchen und Vermutung formulieren, einen Lösungsplan entwickeln
3. **D**urchführen des Plans
4. **E**rgebnis auswerten und erklären
5. **K**ontrollieren des Ergebnisses, des Rechenvorgangs und des Ansatzes

Wobei diese Schritte als Hilfe beim Planen des Problemlöseprozesses verstanden werden sollen. Dies ist der sogenannte **PADEK** Problemlöseplan, der seinen Namen den Anfangsbuchstaben der Schrittreihenfolge zu verdanken hat. [HLRS16]

Problemlösen und genetisches Prinzip

Man kann das alltägliche Leben, wie „Was ist der kürzeste Weg zur Arbeit während der Rushhour “, „Wie kann ich die Produktivität meines Staubroboters verbessern “, als andauerndes Problemlösen betrachten.

Die Schüler und Schülerinnen sollen das Lösen von Problemen lernen und dies kann am besten in einem begrenzten und überschaubaren Übungsfeld passieren. Wie die Schüler und Schülerinnen das Gelernte dann auf andere vergleichbare Situationen anwenden, muss eigens gelernt werden. Das genetische Prinzip kommt aus dem human historischen Bereich.

Beim genetischen Prinzip wird an Vorverständnis und an die Erfahrungswelt der Schüler und Schülerinnen angeknüpft. Dabei werden die neuen Lerninhalte auf Basis des Entwicklungsstandes und die Verständnisstufe der Schüler und Schülerinnen angepasst. Beim genetischen Prinzip wird die Überzeugung vermittelt, dass Mathematik nicht als fertiges, eigenständiges Produkt gelernt werden kann. Schüler und Schülerinnen sollen stattdessen einen Einblick in den Entstehungsprozess von Mathematik erhalten. Sie sollen selbst forschen und entdecken, Probleme lösen und erfinden können, auch wenn es keine Neuentdeckungen sind. [Wei]

Ziele des Problemlösens

Die Ziele des Problemlösens im Mathematikunterrichts setzen sich aus den mathematikbezogenen Zielen und den allgemeinen Zielen zusammen. Zum ersteren zählt das erkennen und formulieren von mathematischen Fragestellungen und das situationsgerechte einsetzen von mathematischen Vorgehensweisen zur Bearbeitung dieser. Zu den allgemeinen Zielen zählt u.a. das Reflektieren des eigenen Handelns und das Entwickeln von Lösungsplänen in der Gruppe. [WFH+09, S. 87]

Probleme sind nicht an einer einzigen Unterrichtsphase gebunden, sondern können als Anlass zur Einführung von neuen Begriffen oder deren Erweiterungen, als Entwicklung von Lösungsverfahren und auch in Übungsphasen eingesetzt werden.

Will man Problemlösen in Übungsphasen einsetzen, so müssen geeignete Fragestellungen ausgewählt werden, da ansonsten der Kern des Übens verloren gehen kann. Kennzeichnend für das Problemlösen ist, dass den Schülern und den Schülerinnen noch kein Verfahren bekannt ist um das Problem lösen zu können. Deshalb bietet es sich an das Lösungsverfahren eines Problems an vielen ähnlichen Problemen anzuwenden und zu üben. Dabei können die Schüler und Schülerinnen auch Entdeckungen machen, die über die eigentliche Fragestellung hinausgehen. [HLRS16]

Ein Beispiel um das Üben und Problemlösen zu verbinden, welches die Thematik dieser Arbeit beinhaltet ist die folgende :

> Die Zeichenebene wird durch zwei Kreise in drei oder vier Teile zerlegt, abhängig davon, wie die beiden Kreise zueinander liegen.

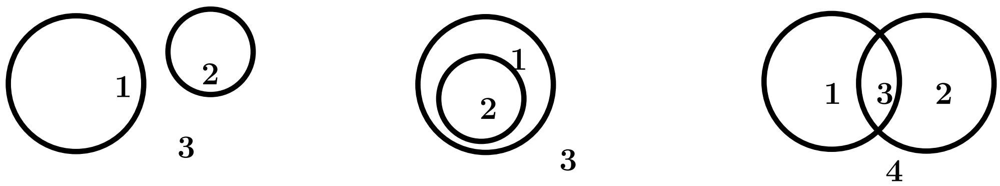


Abb. 3.1: Verschiedene Anordnung der Kreise in der Ebene

> Die Schüler und Schülerinnen sollen nun untersuchen in wie viele verschiedene Teile drei Kreise die Zeichenebene zerlegen können. Dabei sollen sie möglichst systematisch vorgehen und ihre Entdeckungen protokollieren.

Die Schüler und Schülerinnen lernen hier den Umgang mit dem Zirkel

> im Sinne einer Automatisierungsübung. Zudem müssen die Schüler und Schülerinnen ein Problem bearbeiten, das ein in einem unterschiedlichem Umfang und unterschiedlichen Grad der Formulierung auftritt.

Das ist ein gutes Beispiel dafür, dass das Problemlösen als Aspekt eines allgemeinbildenden Mathematikunterrichts nicht mehr wegzudenken ist. Schüler und Schülerinnen sollen nicht nur Probleme aus der Geometrie bearbeiten, sondern sich anhand von mathematischen Problemen orientieren können was zu vielfältigen Aktivitäten anregen. [WFH+09, S. 88]

3.2 Analyse und Lehrplanbezug

Der Geometrieunterricht ist nicht auf eine spezielle Schulstufe oder ein speziell zu behandelndes Themengebiet beschränkt. Er ist Teil des Mathematikunterrichts an jeder Schule und nicht mehr aus diesem wegzudenken.

Wenn man sich die Lehrpläne der verschiedenen Schulen in Italien und Österreich für den Mathematikunterricht anschaut, lässt sich die Problemstellung dieser Arbeit, dem Bereich „Algebra und Geometrie“ in Österreich und „Ebene und Raum“ in Südtirol zuordnen.
Die Problemstellung kann sowohl in der Oberstufe als auch in einer abgeschwächteren Version in der Unterstufe behandelt werden. Beispielsweise steht im Lehrplan der Allgemeinbildenden Höheren Schulen (AHS) in Österreich für die 6. Klasse Unterstufe folgendes:

„Lehrstoff:

- *Schneiden von Geraden und Ebenen*
- *Untersuchen von Lagebeziehungen [...] “[fBÖ]*

Man könnte also beispielsweise den Schülern und Schülerinnen die Aufgaben geben, welche verschiedenen Lagen zwei Geraden in der Zeichenebene haben können und daraus können sie dann schließen in wie viele Teile die Geraden die Zeichenebene teilen.

In den Höheren Technischen Lehranstalten (HTL) ist die Analyse des Lehrplans etwas schwieriger als für die AHS, da es in dieser Schulform viele verschiedene Fachrichtungen und somit unterschiedliche Lehrpläne gibt. Es gibt nur einen Grundlehrstoff der für alle Fachrichtungen gleich ist, der übrige Stoff ist spezifisch auf die unterschiedlichen Fachrichtungen abgestimmt.

Der Grundlehrstoff für alle Fachrichtungen besagt, dass die Schüler und Schülerinnen in den Bereichen „Algebra und Geometrie“ und „Komplexe Zahlen und Geometrie“ für eine passende Fragestellung mit Hilfe von Algebra und Geometrie ein geeignetes Lösungsverfahren finden können. Zudem sollen die Schüler und Schülerinnen mit algebraischen und geometrischen Objekten arbeiten, diese in ihrem Kontext interpretieren und in der Fachsprache der Mathematik argumentieren können. Die Problemstellung dieser Arbeit könnte man in diesen Bereichen im Unterricht einordnen. [TL]

An den Höheren Schulen in Italien,wobei sich diese Arbeit auf Südtirol beschränkt, ist die Analyse des Lehrplans auch etwas schwieriger, da es so etwas wie einen spezifischen Lehrplan für eine bestimmte Schule, Fachrichtung usw. nicht gibt. In Südtirol gibt es lediglich die sogenannten Rahmenrichtlinien für die Gymnasien und für die Fachoberschulen, die zum Teil viele verschiedene Fachrichtungen haben. Dabei unterscheidet sich der Inhalt und Ablauf des Mathematikunterrichts an Gymnasien nicht von denen an Fachoberschulen, obwohl sich der zeitliche Umfang der Wochenstunden unterscheidet. Das lässt für manche Punkte viel Interpretationsspielraum was den Umfang und die Dauer der Stoffbehandlung angeht.

In den Südtiroler Rahmenrichtlinien für die 1. und 2. Klasse der Fachoberschulen im Bereich „Ebene und Raum“ [SdAPBS] steht beispielsweise:

„Fertigkeiten:

- *die wichtigsten geometrischen Objekte der Ebene und des Raums erkennen und beschreiben[...]*
- *grundlegende geometrische Konstruktionen händisch und auch mit entsprechender Software durchführen, Konstruktionsabläufe dokumentieren [...]*
- *in einfachen realen Situationen geometrische Fragestellungen entwickeln und Probleme geometrischer Art lösen [...]*

Kenntnisse:

- *Grundbegriffe der euklidischen Geometrie*
- *Lagebeziehungen von Geraden zueinander [...] “*

In einem späterem Abschnitt der Rahmenrichtlinien, der für die 3. und 4. Klasse Oberstufe, findet sich im Bereich „Ebene und Raum“ folgendes:

> *„Fertigkeiten:*
>
> - *Probleme aus verschiedenen realen Kontexten mit Hilfe von linearen Gleichungssystemen und Ungleichungssystemen beschreiben und lösen können[...] “ [SdAPBS]*

Da die von n Linien erzeugbaren Regionen M in einem Intervall liegen, welches mithilfe einer Ungleichung beschrieben werden kann, würde die Problemstellung hier auch hineinpassen.

Wir sehen also, dass die Problemstellung „In wie viele Regionen teilen n Linien die Ebene?“ auch im Lehrplan verankert ist, da man diese in all den aufgezählten Punkten einbringen kann.

3.3 Eigenes Konzept

Um mein eigenes Konzept mit einer Schulstufe und Schultyp in Verbindung zu setzen habe ich mich für die 2. Klasse einer Fachoberschule in Südtirol entschieden. Das Konzept ist aber auch in einen andere Schultyp und in eine höhere Schulstufe ohne Probleme übertragbar. Die Überlegungen in diesem Abschnitt sind besonders im Sinne des genetischen Prinzips von großer Bedeutung. Die Schüler und Schülerinnen sollen dabei selbstständig Aufgaben lösen, indem sie an ihr Vorwissen anknüpfen und dabei auch mal einen falschen Weg einschlagen können. Auch die Kompetenz der Schüler und Schülerinnen zum Problemlösen soll durch diesen Abschnitt geübt und verbessert werden. Falls das Problemlösen noch nie im Unterricht eingesetzt wurde sollte zuerst das Prinzip des Problemlösens und die Ziele den Schüler und Schülerinnen erklärt werden, damit diese nicht überfordert sind und damit sie wissen welche Schritte beim Problemlösen wichtig sind.

Voraussetzungen, Wiederholungen und Auffrischungen

Damit die Schüler und Schülerinnen gut an ihr Vorwissen anknüpfen können, sollten alle Voraussetzungen zuvor noch einmal behandelt werden. Voraussetzungen für das Thema dieser Arbeit sind die reelle Ebene $\mathbb{R}^2$, bzw. wenigstens die Zeichenebene, und deren geometrische Objekte, hauptsächlich die Geraden und Kreise. Sollten die Schüler und Schülerinnen diese Voraussetzungen noch nicht beherrschen, weil man beispielsweise dieses Konzept früher verwenden will, muss man den Schülern und Schülerinnen zunächst erklären was mit Ebene und deren Objekte gemeint ist.

> Als Wiederholung und Einführung für jüngere Schüler und Schülerinnen könnte man erklären, dass man sich die mathematische Ebene als ein Blatt Papier vorstellen kann, welches so glatt und eben ist, dass sich keinerlei Täler und Berge darauf finden lassen. Diese Blatt Papier ist aber nicht in DIN A4 sondern unendlich breit und lang in alle Richtungen. Das Blatt ist so dünn, dass es keine Dicke hat, es hat auch keine Farbe. Die Ebene besteht nur aus unendlich vielen Punkten, aus denen beste-

hen die unterschiedlichsten geometrische Figuren, wie z.B. Geraden und Kreise.

Falls vorher nicht schon behandelt, kann man die reelle Ebene $\mathbb{R}^2$ anhand der Zeichenebene einführen. In den Schulbüchern wird dies meist so gemacht:

> *„Wir schreiben $\mathbb{R}^2$ für die Menge aller Paare von reellen Zahlen. Die Zeichenebene betrachten wir als Menge ihrer Punkte. Nach Wahl eines Koordinatensystems fassen wir die Zeichenebene und $\mathbb{R}^2$ als gleich auf. “* [PSWS13, S. 108]

Die Gerade in der Ebene durch den Nullpunkt wird in den meisten Schulbüchern so eingeführt:

> *„Für einen Punkt $P = (p_1|p_2) \neq (0|0)$ bezeichnen wir die Menge*
>
> $$\{c \cdot P | c \in \mathbb{R}^2\} = \{c \cdot (p_1|p_2) | c \in \mathbb{R}^2\}$$
>
> *aller Vielfachen eines Punktes P als die Gerade durch 0 und P. “* [PSWS13, S. 108]

Danach sollten noch die Geraden, die nicht durch den Nullpunkt gehen behandelt werden. Anschließend sollte auch noch die gegenseitige Lage zweier und mehrerer Geraden im $\mathbb{R}^2$ wiederholt werden.

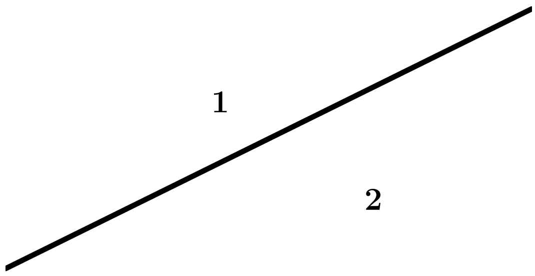
> Zwei Geraden $g, h \in \mathbb{R}^2$ können sich in einem gemeinsamen Punkt schneiden, können parallel zueinander liegen und verschieden sein oder können parallel zueinander liegen und gleich sein.

Den Schülern und Schülerinnen sollte vor Beginn der Übung klar gemacht werden, dass sie für die folgenden Aufgaben kein Koordinatensystem wählen müssen. Falls es eine höhere Klasse ist könnte man auch kurz das Thema der affinen Ebene anschneiden und erklären was der Unterschied zur euklidischen Ebene ist.

Problemstellung und Übungsphase

Nach einer kurzen Wiederholung oder eben der neuen Einführung der Begriffe kann man mit der Einführung in die eigentliche Problemstellung beginnen. Als erstes wird nur darauf eingegangen in wie viele Regionen, im weiterem Verlauf Teile genannt, n Geraden die Ebene teilen können, später dann wird die minimale und maximale Anzahl behandelt.
Die erste Aufgabenstellung lautet wie folgt:

Wenn wir in der Zeichenebene eine Gerade haben, so teilt diese die Ebene in zwei Teile.



Überlege dir in wie viele Teile wird die Ebene von zwei Geraden geteilt?
In wie viele von drei Geraden?
Mache dir zu allen Überlegungen eine Skizze und protokolliere deine Entdeckungen und deine Vorgehensweise!

Nachdem die Schüler und Schülerinnen die Aufgabe erhalten haben, sollen sie diese selbstständig lösen. Dafür sollen sie die Aufgabe anhand ihres eigenen Problemlöseplans analysieren und aufarbeiten. Die Schüler und Schülerinnen sollen dabei die verschiedenen Lagebeziehungen der Geraden in der Ebene im Hinterkopf haben. Später sollen sie in der Lage sein ihren Lösungsweg und deren Lösung zu präsentieren. Dabei wäre es wünschenswert, dass die Schüler und Schülerinnen eigene und alternative Zugänge zur Lösung haben, damit sie für sich selbst den perfekten Weg gefunden haben. Vielleicht haben einige Schüler und Schülerinnen schon herausgefunden, dass es einen Zusammenhang zwischen der Anzahl an Geraden und der Anzahl an Regionen gibt. Anschließend würde ich mit den Schülern und Schülerinnen gemeinsam die Aufgabe folgendermaßen aufarbeiten:
Als erstes sollte man sich nochmal die verschiedenen Lagebeziehungen von zwei

Geraden in der Ebene in Erinnerung rufen.

> *Zwei Geraden können entweder parallel zueinander sein oder sich in einem Punkt schneiden.*

Anschließend kann man die zwei verschiedenen Lagebeziehungen in der Ebene zeichnen. Um die Teile besser voneinander abzuheben kann man diese entweder beschriften oder farblich hervorheben.

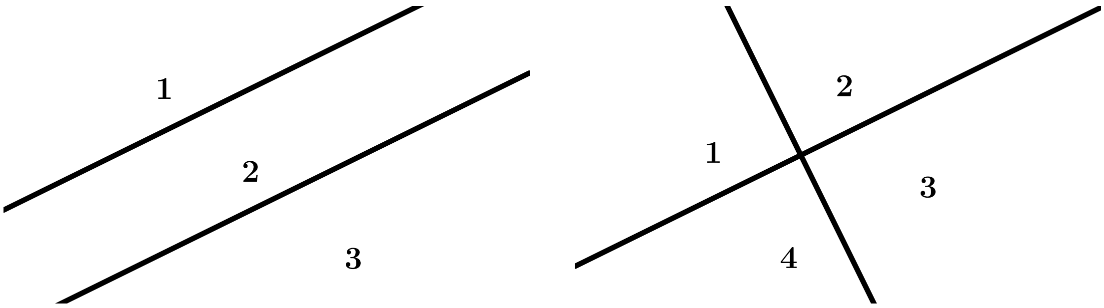


Abb. 3.2: Anzahl der Teile, die zwei Geraden erzeugen können

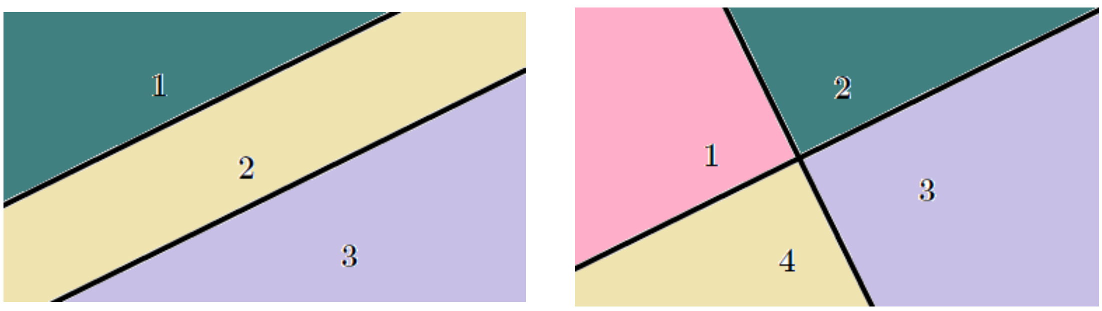


Abb. 3.3: Farbliche Hervorhebung der Anzahl der Teile, die zwei Geraden erzeugen können

Im Anschluss daran würde ich gemeinsam mit den Schülern und Schülerinnen die verschiedenen Lagebeziehungen dreier Geraden in der Ebene genauer anschauen.

Die drei Geraden in der Ebene können:

1. *alle parallel zueinander sein*
2. *zwei parallel zueinander sein und die dritte schneidet beide Geraden*
3. *keine der Geraden ist parallel zueinander und je zwei Geraden schneiden sich in einem Schnittpunkt*
4. *alle Geraden schneiden sich in einem gemeinsamen Schnittpunkt*

Bevor man die Skizzen dafür vorzeigt, oder auch währenddessen, sollte man die Schüler und Schülerinnen fragen, ob ihnen etwas aufgefallen ist. Wünschenswert wäre, wenn ihnen aufgefallen ist, dass für Punkt 2 und Punkt 4 man die Ebene in gleich viele Teile teilen kann.

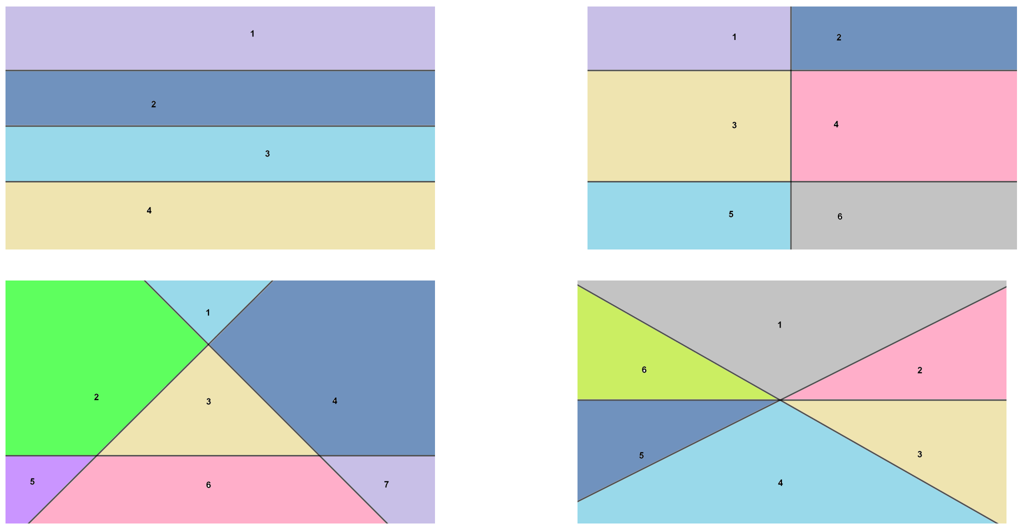


Abb. 3.4: Verschiedene Teile in die 3 Geraden die Ebene zerlegen

Danach sollen einige Schüler und Schülerinnen ihre Lösungswege vorstellen und dabei auch ihre Erkenntnisse über den Zusammenhang der Anzahl der Geraden in der Ebene und die daraus erzeugbaren Teile vortragen.

Einige Schüler und Schülerinnen können auch eine Entdeckung gemacht haben, die über die eigentliche Fragestellung hinausgeht. Vielleicht haben sie herausgefunden, dass die Ebene von n parallelen Geraden immer in $n+1$ Teile zerlegt wird, dies also die minimale Anzahl an erzeugbaren Teilen ist.

Vielleicht ist auch schon einigen aufgefallen, dass man mit 3 Geraden die Ebene nicht in 5 Teile teilen kann. Falls ihnen das bei dieser Aufgabenstellung noch nicht aufgefallen ist, sollte es ihnen spätestens bei der nächsten auffallen.

Nachdem die erste Aufgabenstellung besprochen wurde, sollen die Schüler und Schülerin noch eine ähnliche Aufgabe lösen. Dadurch können sie ihre Vorgehensweise nochmals überdenken und üben. Dabei wurde der Schwierigkeitsgrad ein wenig erhöht.

> *Untersuche nun in wie viele verschiedene Teile vier Geraden die Ebene zerlegen können. Mache dir wieder zu allen Überlegungen eine Skizze und protokolliere deine Entdeckungen und deine Vorgehensweise!*
>
> *Überlege dir, gibt es eine minimale Anzahl von Teilen, in die die Geraden die Ebene zerlegen können, in Abhängigkeit der Anzahl der Geraden? Vergleiche dafür alle bisher gelösten Aufgaben und versuche damit eine Formel für eine beliebige Anzahl n an Geraden zu bestimmen!*
> *Falls es eine minimale Anzahl gibt, gibt es dann auch eine maximale Anzahl?*

Dass es eine minimale Anzahl von erzeugbaren Teilen gibt, sollte jeder Schüler und jede Schülerin sehen. Sie sollten auch zum Schluss kommen, dass die minimale Anzahl immer eines mehr ist als die Anzahl der Geraden in der Ebene. Dabei sollen sie ihr Ergebnis in einer mathematischen Schreibweise festhalten.

Dies könnte beispielsweise so aussehen:

> Für $n \in \mathbb{N}$ Geraden in der Ebene $\mathbb{R}^2$ gilt, dass
>
> $Teile_{min} = n + 1$
>
> ist, wobei $Teile_{min}$ die minimale Anzahl der zerlegbaren Teile ist.

Bei der maximalen Anzahl wird es schon schwieriger. Hier ist es wichtig, dass die Schüler und Schülerinnen verstanden haben, dass es einen Zusammenhang zwischen der Anzahl an Linien und die der maximalen Anzahl an Teile gibt. Ob sie zum richtigen Ergebnis kommen ist nur zweitrangig. Nachdem die Schüler und Schülerinnen zu ihren Ergebnissen gekommen sind würde ich mit ihnen die Fragestellung über die maximale Anzahl an Teile folgendermaßen aufarbeiten:

Es bietet sich an die Erkenntnisse der Aufgaben davor in einer Tabelle festzuhalten. Die folgende Tabelle würde ich bis $n = 6$ erweitern, damit die Schüler und Schülerinnen mehr Informationen zur Verfügung haben und dadurch ein Muster besser erkennen können.

n	1	2	3	4	5	6
minimale Anzahl	2	3	4	5	6	7
maximale Anzahl	2	4	7	11	16	22

Wenn wir also eine Gerade haben kann man die Ebene in maximal $Teile_{max} = 2$ Teile zerlegen, mit zwei Geraden in maximal $Teile_{max} = 4$, mit drei Geraden in maximal $Teile_{max} = 7$ usw.. Ein altes Teil der Ebene kann von einer Geraden in maximal zwei neue Teile zerlegt werden. Wir können uns deshalb überlegen, wenn wir zwei Geraden in der Ebene haben, die die Ebene in vier Teile zerlegen und eine dritte Gerade hinzufügen, so kann diese maximal drei der alten Teile zerlegen, nicht alle vier. Wenn wir bei drei Geraden in der Ebene eine vierte Gerade hinzufügen, so zerlegt diese maximal vier der alten Teile.

Für 3 Geraden: $Teile_{max} = 4 + 3 = 7$
Für 4 Geraden: $Teile_{max} = 7 + 4 = 11$

Wir haben also ein Konstruktionsmuster herausgefunden! Wir können daher die maximale Anzahl der Teile in die n Geraden die Ebene zerlegen wie folgt bestimmen:

$$Teile_{max_1} = 2 \qquad \textbf{Rekursionsanfang}$$

Für $1 < n \in \mathbb{N}$ Geraden: $Teile_{max_n} = Teile_{max_{n-1}} + n$ **Rekursionsschritt**

Um die maximale Anzahl der von n Geraden erzeugbaren Teile zu bestimmen müssen wir die maximale Anzahl der von $n-1$ Geraden der vorherigen Teile wissen. Wir haben eine rekursive Formel für die Berechnung der maximalen Anzahl gefunden.

Wenn wir nun für eine beliebige Anzahl an Geraden in der Ebene die maximale Anzahl an Teile bestimmen, so ist das mit dieser Formel nicht möglich. Wir können diese Formel aber auch umformen und erhalten dann:

$$Teile_{max_n} \frac{n(n+1)}{2} + 1 \text{ für } n \geq 0$$

Wir zeigen nun, dass die neue Formel gilt mithilfe eines Beweises.

Induktionsanfang:
Für $n = 1 : Teile_{max_1} = 2 = \dfrac{1 \cdot 2}{2} + 1$
Für $n = 2 : Teile_{max_2} = Teile_{max_1} + 2 = 4 = \frac{2 \cdot 3}{2} + 1$
Induktionsschritt:
Es sei nun $n \in \mathbb{N}$ fest und es gelte $Teile_{max_n} = \dfrac{n(n+1)}{2} + 1$ (**IV**).
$n \longrightarrow n + 1$
Da wir nach der Induktionsvoraussetzung bereits $Teile_{max_n}$, die maximale Anzahl an Teile für n Geraden kennen, gilt für $Teile_{max_{n+1}}$ folgendes:

$$\begin{aligned} Teile_{max_{n+1}} &= [\text{ Anwendung des Rekursionsschritts }] = \\ &= Teile_{max_n} + (n+1) = \\ &= [\text{ Anwendung der (IV) }] = \frac{n(n+1)}{2} + 1 + (n+1) = \\ &= \frac{(n+1) \cdot (n+2)}{2} + 1 \end{aligned}$$

und damit ist der Induktionsschritt gezeigt.

Somit haben wir nun auch eine Formel, die für eine beliebige Anzahl an Geraden in der Ebene gilt.

Ich würde mit den Schüler und Schülerinnen auch noch kurz besprechen, dass nicht alle Werte zwischen der minimalen und maximale Anzahl der Teile der Ebene als mögliche Anzahl überhaupt in Frage kommen können. Dafür sollen sich die Schüler und Schülerinnen nochmal kurz das Problem mit den drei Geraden in der Ebene in Erinnerung rufen. Da sollte ihnen auffallen, dass drei Geraden die Ebene nicht in fünf Teile zerlegen können, egal wie man die Geraden anordnet. Dafür sollten sie sich kurz zeitnehmen und in Eigenarbeit die folgende Fragestellung beantworten:

> *Ist es möglich die Ebene in fünf Teile zu zerlegen, wenn man nur drei Geraden zur Verfügung hat?*
> *Wie sieht es für vier Geraden in der Ebene aus? Kann ich die Ebene in* $5, 6, 7, 8, 9, 10, 11$ *Teile zerlegen?*

Diese Aufgabenstellung sollte den Schüler und Schülerinnen ein besseres Verstehen hinsichtlich der Beziehungen zwischen den Geraden ermöglichen. Ich würde den Schülern und Schülerinnen erklären, dass sich einige der heutigen Mathematiker mit der Frage beschäftigen in wie viele Teile n Geraden die Ebene zerlegen können bzw. das sie versuchen die Löcher durch Ungleichungen zu beschreiben. Das Linienproblem ist also ein Problem was noch nicht vollständig gelöst wurde und mit der sich die Mathematik immer noch beschäftigen. Dies zeigt den Schülern und Schülerinnen, dass sich die Mathematik immer wieder mit neuen Problemen beschäftigt und dass das Behandelte im Schulunterricht auch zeitgemäß ist.

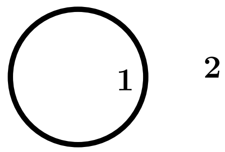
In den Südtiroler Rahmenrichtlinien der Fachoberschulen werden rekursive Folgen erst in der dritten und vierten Oberstufe behandelt und noch nicht in der zweiten Klasse. [SdAPBS] Deshalb könnte man die Aufgabenstellung über die maximale Anzahl der zerlegbaren Teile nochmals in der dritten Klasse aufgreifen und die rekursive Formel in eine explizite Formel umformen. Es wäre natürlich auch möglich das gesamte Konzept erst in der dritten bzw. vierten Klasse zu behandeln. Dafür müsste man nur kleiner Änderungen an der kalkulierten Zeit und Umfang vornehmen. Man könnte dieses Konzept dann einerseits als Wiederholung für die Ebene und ihre geometrischen Objekte und andererseits als Einstieg für das Thema „Rekursion, Folgen und Reihen“ verwenden, oder auch für beides.

Für die Skizzen der Geraden und später auch für die der Kreise würde ich, falls dies in der Schule möglich ist, eine Dynamische-Geometrie-Software (DGS) wie GeoGebra verwenden, da die Schüler und Schülerinnen dadurch die Geraden ganz einfach verschieben und neu anordnen können.

Weitere Beispiele und Transfer

Um das Gelernte noch besser zu vertiefen wird jetzt noch die selbe Problemstellung mit Kreisen statt Geraden behandelt. Die Schüler und Schülerinnen sollen diese Aufgaben eigenständig lösen und wieder anhand des Problemlöseplans analysieren und aufarbeiten. Dadurch wird die Kompetenz des Problemlösens gefestigt.

Wenn wir in der Zeichenebene einen Kreis haben, so teilt dieser die Ebene in zwei Teile.



Überlege dir in wie viele Teile wird die Ebene von zwei Kreisen zerlegt? In wie viele von drei Kreise?
Mache dir zu allen Überlegungen eine Skizze und protokolliere deine Entdeckungen und deine Vorgehensweise! Verwende dafür schon deine Entdeckungen zu den Geraden in der Ebene.

Die Schüler und Schülerinnen sollen am Ende dieser Aufgabe in der Lage sein ihr Ergebnis zu präsentieren, weshalb es wichtig ist, dass sie schematisch vorgehen und alle Entdeckungen protokollieren. Sie können bei dieser Aufgabenstellung an ihr Vorwissen anknüpfen und damit sollten sie auf folgende ähnliche Ergebnisse kommen:

Mit zwei Kreisen wird die Ebene in drei oder vier Teile zerlegt, abhängig davon, wie die beiden Kreise zueinander liegen. Mit drei Kreisen wird die Ebene in vier, fünf, sechs oder acht Teile zerlegt.

Die Teile der Ebene können die Schüler und Schülerinnen wieder farblich hervorheben oder beschriften.

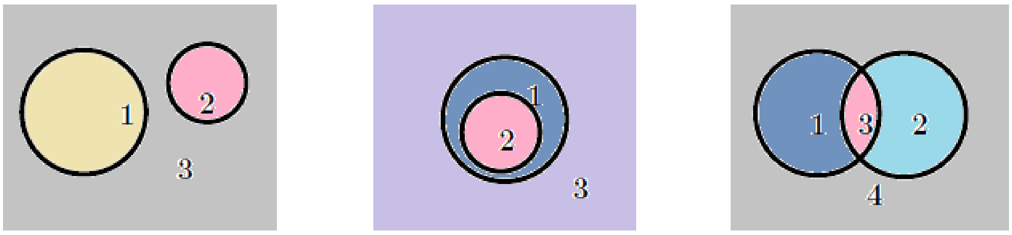


Abb. 3.5: Verschiedene Teile in die zwei Kreise die Ebene zerlegen

Nachdem die Schüler und Schülerinnen diese Aufgabenstellung behandelt haben können sie nun, wie schon bei den Geraden, die minimale Anzahl und die maximale Anzahl der Teile bestimmen. Die Aufgabenstellung dafür lautet:

> *Überlege dir, gibt es eine minimale Anzahl von Teilen, in die die Kreise die Ebene zerlegen können? Kannst du dafür eine Formel für eine beliebige Anzahl n an Geraden bestimmen? Vergleiche hierfür alle deine gelösten Aufgaben und versuche deine Formeln auf die vorherige Aufgabenstellung anzuwenden.*
>
> *Falls es eine minimale Anzahl gibt, gibt es dann auch eine maximale Anzahl?*

Jedem Schüler und jeder Schülerin sollte bewusst sein, dass es auch bei den Kreisen eine minimale und maximale Anzahl an erzeugbaren Teilen gibt. Sie sollten auch zum Schluss kommen, dass die minimale Anzahl bei den Kreisen und bei den Geraden gleich ist. Das Ergebnis könnten sie folgendermaßen festhalten:

> Für die Kreise gilt das selbe wie für die Geraden. Die minimale Anzahl ist $Teile_{min_n} = n + 1$.

Für $n \in \mathbb{N}$ Kreise in der Ebene $\mathbb{R}^2$ gilt, dass

$Teile_{min_n} = n + 1$

ist, wobei $Teile_{min}$ die minimale Anzahl der zerlegbaren Teile ist.

n	1	2	3	4	5	6
minimale Anzahl	2	3	4	5	6	7
maximale Anzahl	2	4	8	14	22	32

Bei der Frage zur maximalen Anzahl kann man wieder gleich vorgehen wie bei den Geraden in der Ebene. Wenn wir also einen Kreis in der Ebene haben, so kann dieser die Ebene in maximal $Teile_{max} = 2$ Teile zerlegen, zwei Kreise in maximal $Teile_{max} = 4$, drei Kreise in maximal $Teile_{max} = 8$ usw.. Wenn wir also zu den drei Kreisen einen vierten dazugeben, so muss dieser alle anderen Kreise in zwei Punkten schneiden. Dadurch werden die Kreise in Kreisbögen geteilt und jeder von ihnen zerlegt zwei der alten Teile.

Das Konstruktionsmuster für die maximale Anzahl der Teile in die n Kreise die Ebene zerlegen:

$$Teile_{max_1} = 2 \qquad \textbf{Rekursionsanfang}$$

$$\text{Für } n \in \mathbb{N} \text{ Kreise: } Teile_{max_n} = Teile_{max_{n-1}} + 2(n-1) \qquad \textbf{Rekursionsschritt}$$

Man könnte den Schülern und Schülerinnen auch noch die explizite Formel (siehe dazu Kapitel 1.6 Kreise in der Ebene) bereitstellen, wie schon bei den Geraden. In diesem Fall würde ich die Formel allerdings nicht bereitstellen, da die Schüler und Schülerinnen auch mit der rekursiven Formel arbeiten können und dies ansonsten zu viel Zeit in Anspruch nehmen würde.

Am Ende der gesamten Übungsphase, als Abschluss, sollen die Schüler und Schülerinnen ihre Ergebnisse und Entdeckungen präsentieren. Damit jeder die

Möglichkeit hat seine Ergebnisse vorzustellen bietet sich die Methode Museumsrundgang an. Dabei sollen die Schüler und Schülerinnen in Zweier- oder Dreiergruppen ihre Ergebnisse als Poster zusammentragen. Ihr Poster können sie dann aufhängen und im Rundgang der Klasse präsentieren.

Literaturverzeichnis

[Arn13] Vladimir I Arnold. *Real Algebraic Geometry*, volume 66. Springer Science & Business Media, 2013.

[Bif] Bifie. Bildungsstandards für Mathematik, 4. Schulstufe. `https://www.bifie.at/wp-content/uploads/2017/06/Deskriptoren_BiSt_M4.pdf`. zugegriffen am 06.03.2018.

[Cox55] Harold Scott Macdonald Coxeter. *Reelle projektive Geometrie der Ebene*, volume 3. R. Oldenbourg, 1955.

[fBÖ] Bundesministerium für Bildung Österreich. Lehrplan AHS Oberstufe. `https://www.bmb.gv.at/schulen/unterricht/lp/lp_neu_ahs_07_11859.pdf`. zugegriffen am 06.03.2018.

[Fis11] Gerd Fischer. *Lernbuch Lineare Algebra und Analytische Geometrie*. Springer, 2011.

[HLRS16] Lars Holzäpfel, Timo Leuders, Benjamin Rott, and René Schelldorfer. Schritte zum Problemlösen. *Praxis der Mathematik in der Schule*, 58:2–8, 2016.

[Iva10] Oleg A Ivanov. On the Number of Regions into which n Straight Lines divide the Plane. *American Mathematical Monthly*, 117(10):881–888, 2010.

[KGP94] Donald Erwin Knuth, Ronald L Graham, and Oren Patashnik. *Concrete mathematics: a foundation for computer science*, volume 2. Adison Wesley, 1994.

[KK00] Max Koecher and Aloys Krieg. *Ebene Geometrie*, volume 2. Springer-Lehrbuch, 2000.

[Mar93] Nicola Martinov. Classification of arrangements by the number of their cells. *Discrete & Computational Geometry*, 9(1):39–46, 1993.

[Net16] Tim Netzer. *Reelle Algebra und Geometrie*. Universität Innsbruck, 2016.

[PSWS13] Franz Pauer, Martina Scheirer Weindorfer, and Andreas Simon. *Mathematik HAK 2*, volume 2. Auflage. Österreichischer Bundesverlag Schulbuch GmbH und Co, Wien, 2013.

[Pur80] George Purdy. On the number of regions determined by n lines in the projective plane. *Geometriae Dedicata*, 9(1):107–109, 1980.

[Sch16] Hans-Peter Schröcker. *Geometrie für Lehramtsstudierende*. Universität Innsbruck, 2016.

[SdAPBS] Deutsches Schulamt der Autonomen Provinz Bozen Südtirol. Rahmenrichtlinien für die Fachoberschulen in Südtirol. `http://www.provinz.bz.it/schulamt/kinder-schueler-eltern/oberschule.asp`. zugegriffen am 06.03.2018.

[Shn10] IN Shnurnikov. Into how many regions do n lines divide the plane if at most n- k of them are concurrent? *Moscow University Mathematics Bulletin*, 65(5):208–212, 2010.

[TL] Höhere Technische Lehranstalt. Allgemeine Bildungsziele. `http://www.htl.at/fileadmin//content/Lehrplan/HTL_VO_262_2015/BGBl_II_Nr_262_2015_Anlage_1.pdf`. zugegriffen am 06.03.2018.

[Toe17] Fridtjof Toenniessen. *Topologie*. Springer, 2017.

[Wag17] Jürgen Wagner. *Einblicke in die euklidische und nichteuklidische Geometrie*. Springer, 2017.

[Wei] H.-G. Weigand. Didaktische Prinzipien. http://www.didaktik.mathematik.uni-wuerzburg.de/fileadmin/10040500/dokumente/Texte_zu_Grundfragen/weigand_didaktische_prinzipien.pdf. zugegriffen am 20.03.2018.

[WFH+09] Hans-Georg Weigand, Andreas Filler, Reinhard Hölzl, Sebastian Kuntze, Matthias Ludwig, Jürgen Roth, Barbara Schmidt Thieme, and Gerald Wittmann. *Didaktik der Geometrie für die Sekundarstufe I.* Springer, 2009.

Abbildungsverzeichnis

Eidesstattliche Erklärung

Ich erkläre hiermit an Eides statt durch meine eigenhändige Unterschrift, dass ich die vorliegende Arbeit selbständig verfasst und keine anderen als die angegebenen Quellen und Hilfsmittel verwendet habe. Alle Stellen, die wörtlich oder inhaltlich den angegebenen Quellen entnommen wurden, sind als solche kenntlich gemacht.
Die vorliegende Arbeit wurde bisher in gleicher oder ähnlicher Form noch nicht als Diplomarbeit eingereicht.

Ort, Datum Unterschrift