© Richard Kowar, University of Innsbruck, August 2022
Lehrmittel für die Studienberechtigungsprüfung

Kurvendiskussion

A) Ein einfaches Beispiel

Zu Beginn diskutieren wir die Eigenschaften folgender Funktion:

$$f : D(\subset \mathbb{R}) \to \mathbb{R},\, x \mapsto \frac{1}{(x-1)\,(x+1)}\,.$$

wobei D (eine Telmenge von den reellen Zahlen) den Definitionsbereich der Funktion f bezeichnet. Die Vorschrift, welche die Funktion f definiert lautet

$$f(x) := \frac{1}{(x-1)\,(x+1)} \qquad \text{für alle} \qquad x \in D\,.$$

Weiter sehen wir aus $f : D \to \mathbb{R}$, dass die Funktion jedem $x \in D$ eine reelle Zahl zuordnet. Wenn man sich auf die obige Funktion bezieht kann man f oder $f : D \to \mathbb{R}$ verwenden. Oft spricht man auch nur von der Funktion die durch $f(x) := \frac{1}{(x-1)\,(x+1)}$ definiert ist. Unsere Aufgabe lautet nun: Bestimme D (eigentlich die größtmögliche Menge D) und diskutiere den Verlauf der Kurve (genauer Graphen von f).
Los geht's. Weil f durch einen Bruch definiert ist muss garantiert werden, dass niemals durch 0 dividiert wird, d.h.

$$(x-1)\,(x+1) \neq 0 \qquad \text{für alle} \qquad x \in D\,. \tag{1}$$

Wir verwenden nun den

Satz 1 *Ein Produkt von reellen (oder komplexen) Zahlen ist genau dann Null, wenn mindestens einer der beiden Faktoren Null ist.*

Das Produkt in (1) ist also genau dann Null, wenn[1] $x = 1$ oder $x = -1$ gilt und damit folgt $D = \mathbb{R}\backslash\{-1, +1\}$. Also alle reellen Zahlen außer -1 und $+1$. Damit haben wir gezeigt, dass f bei $x = -1$ und $x = 1$ je einen Pol besitzt. Für hinreichend kleine $\delta > 0$ gilt

$$f(1+\delta) = \frac{1}{\delta\,(2+\delta)} > 0 \qquad \text{und} \qquad f(1-\delta) = \frac{1}{-\delta\,(2-\delta)} < 0\,.$$

Damit folgt für $\delta \to 0$:

$$f(1+\delta) \to +\infty \qquad \text{und} \qquad f(1-\delta) \to -\infty\,.$$

Analog folgt

$$f(-1+\delta) = \frac{1}{(-2+\delta)\,\delta} < 0 \qquad \text{und} \qquad f(-1-\delta) = \frac{1}{(-2-\delta)(-\delta)} > 0\,.$$

also für $\delta \to 0$:

$$f(-1+\delta) \to -\infty \qquad \text{und} \qquad f(-1-\delta) \to +\infty\,.$$

Jetzt betrachten wir das Monotonieverhalten von f und dazu verwenden wir

Satz 2 *Eine stetig differenzierbare Funktion ist monoton (oder streng monoton) steigend auf der Menge M, genau dann wenn*

$$f'(x) \geq 0 \qquad (\textit{oder} \quad f'(x) > 0) \qquad \textit{für alle} \qquad x \in M$$

gilt. Ist $-f$ (streng) monoton steigend, so ist f (streng) monoton fallend.

[1] In der Mathematik gilt immer das 'und/oder' und nicht das 'entweder/oder'.

f ist stetig differenzierbar auf D, weil es eine rationale Funktion ist (eine Polynomfunktion dividiert durch eine Polynomfunktion).[2] Mit Hilfe der Quotientenregel (für das Differenzieren) folgt:

$$f'(x) = -\frac{(x+1)+(x-1)}{(x-1)^2\,(x+1)^2} = \frac{-2\,x}{(x-1)^2\,(x+1)^2}\,.$$

Zur Erinnerung:

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'\,g - f\,g'}{g^2} \qquad \text{bzw.} \qquad \left(\frac{1}{g}\right)' = -\frac{g'}{g^2}\,.$$

Wir sehen, dass der Nenner immer positiv ist, aber der Zähler für positives x negativ und für negatives x positive ist. Und natürlich $f'(0) = 0$. Damit folgt, dass f auf $]-\infty, 0[$ streng monoton steigend ist und f auf $]0, \infty[$ streng monoton fallend ist. Und es folgt noch, das f bei $x = 0$ ein Minimum hat mit Wert $f(0) = -1$, denn es gilt:

Satz 3 *Eine stetig differenzierbare Funktion f hat bei $x = a$ ein lokales (stricktes) Minimum, genau dann wenn es ein kleines $\delta > 0$ gibt, sodas f auf $]a-\delta, a[$ (streng) monoton steigend und f auf $]a, a+\delta[$ (streng) monoton fallend ist. Ist f zweimal stetig differenzierbar, dann ist dies äquivalent zu $f'(a) = 0$ und $f''(x) > 0$ für $x \in]a-\delta, a+\delta[$, falls $\delta > 0$ hinreichend klein ist.*

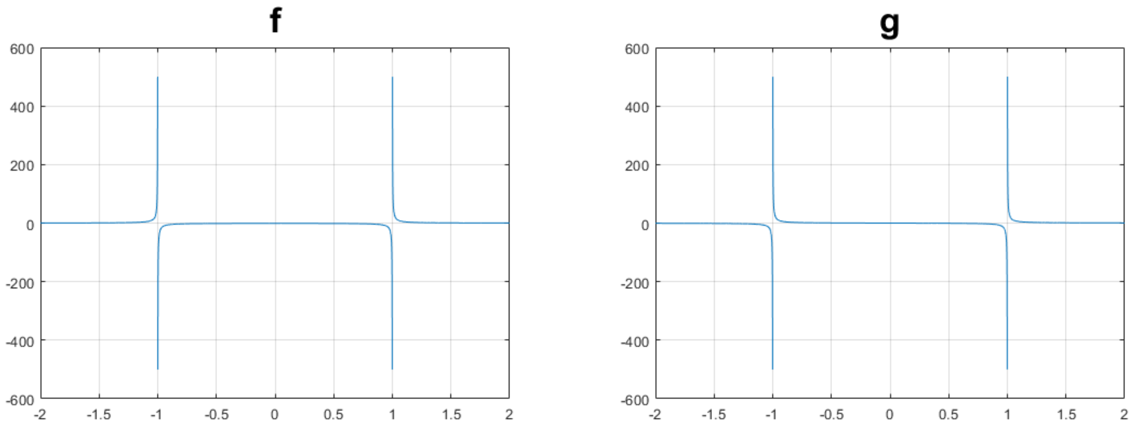

Figure 1: Darstellung der Graphen der Funktionen definiert durch $f(x) := \frac{1}{(x-1)\,(x+1)}$ und $g(x) := \frac{x}{(x-1)\,(x+1)}$ für $x \in \mathbb{R}\backslash\{-1, +1\}$. Wegen $g'(x) = -\frac{x^2+1}{(x-1)^2\,(x+1)^2} < 0$ ist g überall streng monoton fallend.

Wegen des Monotonieverhalten von f gibt es keine Sattelpunkte und keine Wendepunkte, also benötigen wir nicht mehr die zweite Ableitung auszurechen. Gibt es Nullstellen? Nein, den $1/a \neq 0$ für alle $a \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$. Bis auf das Zeichnen des Graphen haben wir nun alles was sinnvoll ist diskutiert. Der Graph von f ist in *Fig.* 1 dargestellt.

Aufgaben 1 *Führe eine Kurvendiskussion der Funktion*

$$g : D(\subset \mathbb{R}) \to \mathbb{R},\; x \mapsto \frac{x}{(x-1)\,(x+1)}$$

durch (vgl. Fig. 1).

[2] Damit ist f sogar unendlich oft stetig differenzierbar.

© Richard Kowar, University of Innsbruck, August 2022

B) Einige kurze Beispiele

Beispiel 1 *Es sei $a > 0$ und $b \in \mathbb{R}$. (Sie können sich auch bestimmte Zahlen wählen und das Beispiel durchrechen). Bestimme die Extremstellen der Funktion*

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto a\,(b-x)^2\,.$$

Die erste Ableitung von f ergibt sich als

$$f'(x) = 2\,a\,(b-x)\,(-1) = 2\,a\,(x-b) \qquad ((-1) \text{ durch die innere Ableitung!})$$

Wir sehen, dass $f'(x) > 0$ für $x > b$ und $f'(x) < 0$ für $x < b$ gilt. Zeichnen Sie sich den Graphen von f auf. Damit folgt, dass bei $x = b$ ein Minimum liegt. Für die erste Ableitung folgt $f'(b) = 0$ und für die zweite Ableitung folgt:

$$f''(x) = 2\,a > 0$$

was auch zeigt, dass bei $x = b$ ein Minimum liegt. Bemerkung: Für $a < 0$ folgt, dass bei $x = b$ ein Maximum liegt. Mehr noch für $a \neq 0$ haben wir genau ein Extremum und damit ein globales Extremum.

Beispiel 2 *Was sollen wir tun falls wir dei Bedingungern eines Sattelpunkt vergessen haben? Der Prototyp eines Sattelpunktes (bei $x = 0$) ist durch die Funktion*

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto x^3$$

gegeben. Die ersten drei Ableitungen sind gegeben durch

$$f'(x) = 3\,x^2 \geq 0\,, \qquad f''(x) = 2 \cdot 3 \cdot x = 6\,x \qquad \text{und} \qquad f'''(x) = 6 > 0\,.$$

Der Sattelpunkt liegt bei $x_0 = 0$ und dort gilt:

$$f'(x_0) = 0\,, \qquad f''(x) = 0 \qquad \text{und} \qquad f'''(x) \neq 0\,.$$

Beispiel 3 *Wie ist ein Wendepunkt definiert? Geben Sie ein einfaches Beispiel an. Ein Wendepunkt bei x_0 ist <u>fast</u> ein Sattelpunkt bei x_0, der Unterschied besteht darin, dass $f'(x_0) \neq 0$ gilt. Keine horizontale Tangente also man kann es nicht mit einem Extrempunkt verwechseln. Wir machen den Ansatz eines Polynoms vom Grad 3 also*

$$f(x) = a_0 + a_1\,x + a_2\,x^2 + a_3\,x^3\,.$$

Die Anbleitung unseres Ansatzes lautet:

$$f'(x) = a_1 + 2\,a_2\,x + 3\,a_3\,x^2\,.$$

Angenommen $x_0 = 0$ ist eine Stelle eines Wendepunktes, dann muss $f'(x_0) = f'(0) \neq 0$ gelten also $a_1 \neq 0$. a_0 und a_2 setzen wir Null, damit es möglichst einfach ist, also $f(x) = a_1\,x + a_3\,x^3$ mit $a_1,\ a_3 \neq 0$. Für dieses Beispiel gilt:

$$f'(x_0) = a_1 + 3 \cdot a_3 \cdot 0^2 = a_1 \neq 0\,, \qquad f''(0) = 2 \cdot 3 \cdot a_3 \cdot 0 = 0 \qquad \text{und} \qquad f'''(x) = 6 \cdot a_3 \neq 0\,,$$

weil wir $a_1,\ a_3 \neq 0$ angenommen haben. Damit liegt bei $x = 0$ tatsächlich ein Wendepunkt. Konkrete Beispiele sind gegeben durch

$$f(x) := 3\,x + 5\,x^3\,, \qquad f(x) := -3\,x + 5\,x^3\,, \qquad f(x) := 3\,x - 5\,x^3 \qquad \text{und} \qquad f(x) := -3\,x - 5\,x^3\,.$$

Beispiel 4 *Zeige, dass die Exponentialfunktionen*

$$\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\, x \mapsto e^x \qquad \textit{und} \qquad f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\, x \mapsto a^x \qquad (a \neq 1)$$

kein Extrema, keine Sattelpunkte und keine Wendepunkte besitzen. Wegen[3] $\exp(x) > 0$ *und* $\exp'(x) = \exp(x)$ *folgt*

$$\exp'(x) = \exp(x) > 0\,, \qquad \exp''(x) = \exp(x) > 0\,, \qquad \exp'''(x) = \exp(x) > 0\,, \qquad \dots$$

also kann bei keinem $x \in \mathbb{R}$ *eine Extremstelle, ein Sattelpunkt oder ein Wendepunkt liegen. Jetzte zum zweiten Fall für den wir folgende Identität verwenden:*

$$a^x = e^{\log a^x} = e^{x\,\log(a)}\,.$$

Hier bezeichnet $\log$ *den Logarithmus zur Basis e auch mit* $\log_e$ *bezeichnet.*[4] *Jetzt ist alles trivial. Es folgt sofort*

$$a^x > 0 \qquad \textit{und} \qquad (a^x)' = \log(a)\, e^{x\,\log(a)} = \log(a)\, a^x\,.$$

Wegen $a \neq 0$ *gilt entweder* $a > 1$ *oder* $a < 1$ *also entweder* $\log(a) > 0$ *oder* $\log(a) < 0$*. Insgesamt folgt für die* $n-$*te Ableitung von* $x \mapsto a^x$

$$\frac{d^n a^x}{dx^n} = (\log(a))^n\, a^x \neq 0$$

also gibt es auch keine Extremstellen, Sattelpunkte oder Wendepunkte. Frage: Für welche a *is* $x \mapsto a^x$ *streng monoton steigend?*

Zum Abschluß gibt es noch ein typisches Testbeispiel, welches Sie unbedingt selber Rechnen sollten.

Aufgaben 2 *Führe eine Kurvendiskussion der Funktion*

$$f : D(\subset \mathbb{R}) \to \mathbb{R},\, x \mapsto \frac{x^2 - 1}{x^2 + 2}$$

durch. (Hinweis: Es gibt keine Maxima und Minima, aber einen Sattelpunkt bei $x = 0$*. ....)*

Aufgaben 3 *Wie lautet die Definition einer monoton steigenden Funktion. (Damit ist nicht Satz 2 gemeint, welcher aus der Definition folgt.)*

Aufgaben 4 *Formuliere den Satz 3 für ein lokales Maximum.*

Aufgaben 5 *Welches Monotonieverhalten hat die Logarithmusfunktion* $\log$*? Zeichen ihren Graphen auf.*

[3] $f(x) > 0$ bedeutet $f(x) > 0$ für alle x aus dem Definitionsbereich von f.

[4] International wird der natürliche Logarithmus mit log und in Europa mit ln bezeichnet. Zur Sicherheit kann man natürlich $\log_e$ schreiben.