

## Quadratische Gleichungen in $\mathbb{R}$

Wir betrachten nun folgendes Problem. Gegeben sind drei reelle Zahlen  $a, b, c \in \mathbb{R}$  mit  $a \neq 0$  und gesucht sind alle reellen Zahlen  $x$ , sodass

$$ax^2 + bx + c = 0$$

gilt. (Für  $a = 0$  wäre die obige Gleichung *affine* und nicht quadratisch.) Ohne Einschränkung der Allgemeinheit (oEdA) können wir, wegen  $a \neq 0$ , die obige Gleichung auch als  $x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$  bzw. als  $x^2 + px + q = 0$  mit  $p := \frac{b}{a}$  und  $q := \frac{c}{a}$  schreiben. Deshalb betrachten wir im folgenden das (normierte) Problem: Für gegebene  $p, q \in \mathbb{R}$  finde alle  $x \in \mathbb{R}$ , sodass

$$x^2 + px + q = 0 \tag{1}$$

gilt.

**Beispiel 1** Wir wollen die Gleichung  $x^2 = 1$  in  $\mathbb{R}$  bzgl.  $x$  lösen. 'Raten' ergibt, dass  $x = 1$  als auch  $x = -1$  Lösungen sind. Hier haben wir verwendet, dass 1 die einzige reelle Zahl ist, sodass  $a \cdot 1 = 1 \cdot a = a$  für alle  $a \in \mathbb{R}$  gilt. Insbesondere gilt dann  $1 \cdot 1 = 1$ . Weiters haben wir verwendet, dass  $(-a) \cdot (-b) = a \cdot b$  gilt, insbesondere  $(-1) \cdot (-1) = 1 \cdot 1 = 1$ . Sind das alle (reellen) Lösungen? Ja. Erstens, aus  $x > 1$  folgt<sup>1</sup>  $x^2 > 1^2 = 1$  und aus  $0 < x < 1$  folgt  $x^2 < 1^2 = 1$ , d.h. ist  $x$  positive und löst  $x^2 = 1$ , so muss  $x = 1$  sein. Zweitens, aus  $-1 < x < 0$  folgt<sup>2</sup>  $1 = (-1)^2 > x^2 > 0$  und aus  $x < -1 < 0$  folgt  $x^2 > (-1)(-1) = 1$ , d.h. ist  $x$  negativ und löst  $x^2 = 1$ , so muss  $x = -1$  sein. (Dieser Beweis wird nicht geprüft nur das Ergebnis!) qed

**Beispiel 2** Es sei  $a \geq 0$ . Wir wollen nun die Gleichung  $x^2 = a$  in  $\mathbb{R}$  (bzgl.  $x$ ) lösen. Ähnlich wie beim vorherigen Beispiel kann man zeigen, dass  $x = \sqrt{a}$  und  $x = -\sqrt{a}$  die einzigen Lösungen des Problems sind. Nur für  $a = 0$  stimmen 'beide' Lösungen überein.

Wir fassen zusammen:

**Satz 1** Für jede nichtnegative reelle Zahl  $a$ , d.h.  $a \geq 0$ , gilt:

$$x^2 = a \quad \Leftrightarrow \quad x_{1,2} = \pm\sqrt{a},$$

wobei  $\sqrt{a}$  die nichtnegative Wurzel von  $a$  (in  $\mathbb{R}$ ) bezeichnet. (Hier ist  $x_{1,2} = \pm\sqrt{a}$  die Kurzschreibweise für  $x_1 = \sqrt{a}$  und  $x_2 = -\sqrt{a}$ .)

**Bemerkung 1** Wir haben in der Schule 'gelernt', dass das Wurzelziehen aus  $x^2 = a$  (mit  $a > 0$ ) zu den Lösungen  $x = \pm\sqrt{a}$  führt. Stimmt das wirklich? Wir müssen zwei Fälle betrachten. Erster Fall:  $x \geq 0$ . Wurzelziehen aus  $x^2 = a$  ergibt  $\sqrt{x^2} = \sqrt{a}$  also

$$x = \sqrt{x^2} = \sqrt{a} > 0 \quad ,\text{weil} \quad x \geq 0.$$

Nun zum zweiten Fall:  $x < 0$ . Wir müssen nun  $x^2 = (-x)(-x) = (-x)^2$  verwenden, wobei  $-x > 0$  ist. Wurzelziehen aus  $(-x)^2 = a$  ergibt  $\sqrt{(-x)^2} = \sqrt{a}$  also

$$-x = \sqrt{(-x)^2} = \sqrt{a} > 0 \quad ,\text{weil} \quad -x > 0.$$

Daraus folgt aber tatsächlich die zweite Lösung  $x = -\sqrt{a}$ . Leider sagen viele Leute wir ziehen jetzt die Wurzel aus einer Gleichung und machen dabei mindestens einen Fehler. **Deshalb sagen Sie lieber nicht wir ziehen die Wurzel aus  $x^2 = a$ , sondern verwenden einfach Satz 1.**

<sup>1</sup>Gilt  $a > b > 0$ , dann folgt  $a^2 > b^2$ .

<sup>2</sup>Gilt  $a < b < 0$ , dann folgt  $a^2 > b^2 > 0$ , d.h. die Relationszeichen drehen sich um!

Für Mathe 2 haben wir noch die folgende

**Ergänzung 1** Für jede negative reelle Zahl  $a$ , d.h.  $a < 0$ , gilt:

$$x^2 = a \quad \Leftrightarrow \quad x_{1,2} = \pm i \sqrt{-a},$$

wobei  $i$  die sogenannte imaginäre Einheit ist, d.h. es gilt  $i^2 = -1$ . Beachte  $a < 0$  ist äquivalent mit  $-a > 0$ .

**Beispiel 3** Es seien  $a, b \in \mathbb{R}$ . Wann ist nun die Gleichung  $(x - a)^2 = b$  in  $\mathbb{R}$  lösbar und wie schaut die Lösungsmenge aus? Umformen ergibt.<sup>3</sup>

$$(x - a)^2 = b \quad \Leftrightarrow \quad x - a = \pm \sqrt{b} \quad \Leftrightarrow \quad x = a \pm \sqrt{b}.$$

Wenn also  $b \geq 0$  ist, dann sind alle Wurzeln reell (und nur dann) und alle reellen Lösungen sind durch  $x_{1,2} = a \pm \sqrt{b}$  gegeben. Die Lösungsmenge lautet  $L = \{a + \sqrt{b}, a - \sqrt{b}\}$ . Dies gilt wegen Satz 1 und den verwendeten Äquivalenzumformungen, welche die Lösungsmenge nicht verändern.

Jetzt kommt das 'allgemeinste' Beispiel.

**Beispiel 4** Es seien  $p, q \in \mathbb{R}$ . Wann ist die quadratische Gleichung  $x^2 + px + q = 0$  in  $\mathbb{R}$  lösbar und wie schauen die Lösungen aus? O.K. So einfach ist es in der Regel nicht. Betrachte, die Gleichung

$$-2 - x^5 + \pi x^2 - \sqrt{5} + \sqrt{2}x = -4x,$$

welche nichts anderes ist als

$$\pi x^2 + (\sqrt{2} - 1)x - (\sqrt{5} + 2) = 0,$$

also die ursprüngliche Gleichung (1) mit  $p = \frac{\sqrt{2}-1}{\pi}$  und  $q = -\frac{(\sqrt{5}+2)}{\pi}$ . Nun zurück zur ursprünglichen Gleichung mit Buchstaben und keinen konkreten Zahlen. Die Idee ist, dass wir eine quadratische Ergänzung machen, d.h. wir verwenden:

$$x^2 + px = x^2 + 2 \frac{p}{2} x = \left(x + \frac{p}{2}\right)^2 - \left(\frac{p}{2}\right)^2$$

was man durch genaues hinschauen erkennen kann. (Zur Probe, rechnen Sie das Quadrat  $(x + \frac{p}{2})^2$  aus und addieren  $-\left(\frac{p}{2}\right)^2$  dazu.) Mit quadratischer Ergänzung folgt also

$$0 = x^2 + px + q = \left(x + \frac{p}{2}\right)^2 - \left(\frac{p}{2}\right)^2 + q$$

was zu

$$\left(x + \frac{p}{2}\right)^2 = \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q$$

äquivalent ist. Jetzt verwenden wir Satz 1 wie im obigen Beispiel und erhalten

$$x_{1,2} + \frac{p}{2} = \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q} \quad \text{also} \quad x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}. \quad (2)$$

Damit folgt, dass die quadratische Gleichung (in  $\mathbb{R}$ ) lösbar ist falls  $\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q \geq 0$  gilt und dann sind durch  $x_1$  und  $x_2$  alle Lösungen gegeben. Was benötigten wir also? Quadratisches Ergänzen, Äquivalenzumformungen und Satz 1. Und natürlich den folgenden Satz.

<sup>3</sup>Viele Leute haben mit dem Buchstabenrechnen Probleme. Leicht ist z.B.: aus  $3x = 2x$  folgt durch Umformen  $(3-2)x = 0$  also  $x = 0$ . Aber folgendes scheint sehr viel schwerer zu sein. Aus  $ax = bx$  folgt  $(a-b)x = 0$  und somit  $x = 0$ , falls  $a-b$  nicht Null ist. Ist  $a-b = 0$ , dann kann  $x$  jede beliebige reelle Zahl sein.)

**Satz 2** Die (positive) reelle Wurzel  $\sqrt{d}$  aus einer reellen Zahl  $d$  existiert genau dann, wenn  $d$  nicht-negativ ist.

**Bemerkung 2 Zusammenfassend: Quadratisches Ergänzen führt zu den Lösungen (insbesondere zur Lösungsformel).** In der Regel ist beim Rechnen mit konkreten Zahlen die quadratische Ergänzung besser (oder gleich gut) wie das Verwenden einer der beiden Lösungsformeln! Sehr viele Leute bestimmen  $p$  oder  $q$  falsch oder machen beim Einsetzen in die Formel oder beim Rechnen mit der Formel einen Fehler. Das Verwenden einer der Formeln reduziert leider nicht die Anzahl der Fehler! Welche Methode Sie letztlich benützen liegt natürlich alleine bei ihnen!

Für Mathe 2 haben wir noch die folgende

**Ergänzung 2** Die Rechnung in Beispiel 4 gilt immer für alle  $p, q \in \mathbb{R}$ , falls die komplexe Wurzel verwendet wird. Für  $D := \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q < 0$  gilt:

$$\sqrt{D} = \sqrt{-(-D)} = i\sqrt{-D},$$

wobei wir  $\sqrt{-1} = i$  und  $-D > 0$  verwendet haben. Damit folgt für die Lösungen der quadratischen Gleichung  $x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm i\sqrt{-\left(\frac{p}{2}\right)^2 + q}$  falls  $D < 0$ .

Aus (2) folgt mit Hilfe einer Nebenrechnung:

**Satz 3 (Vietascher Wurzelsatz)** Für gegebene  $p, q \in \mathbb{R}$  seien  $x_1$  und  $x_2$  die reellen (oder komplexen) Lösungen von  $x^2 + px + q = 0$ . Dann gilt  $x_1 + x_2 = -p$  und  $x_1 x_2 = q$ .

Ein letztes Beispiel.

**Beispiel 5** Wir wählen  $a = 2$ ,  $x_1 = -\frac{\pi}{2}$  und  $x_2 = \frac{3\pi}{2}$ . Dann ist  $f(x) = 0$  mit  $f(x) := a(x - x_1)(x - x_2)$  eine dazugehörige quadratische Gleichung. Ausmultiplizieren ergibt:

$$2x^2 - 2\pi x - \frac{3\pi^2}{2} = f(x) = 0.$$

Die lösen wir nun. Die folgende Rechnung ist sehr knapp gehalten, d.h. der Leser wird mehr (und soll auch mehr) Zwischenschritte machen! Zuerst 'normieren' wir die Gleichung ohne die Lösungsmenge zu verändern:

$$x^2 - \pi x - \frac{3\pi^2}{4} = 0 \quad \left( p = -\pi, q = -\frac{3\pi^2}{4} \right).$$

Quadratische Ergänzung führt zu

$$\left(x - \frac{\pi}{2}\right)^2 - \left(\frac{\pi}{2}\right)^2 - \frac{3\pi^2}{4} = 0.$$

Dies ist äquivalent zu

$$\left(x - \frac{\pi}{2}\right)^2 = \left(\frac{\pi}{2}\right)^2 + \frac{3\pi^2}{4} = \frac{\pi^2 + 3\pi^2}{4} = \frac{4\pi^2}{4} = \pi^2.$$

Im nächsten Schritt erhalten wir

$$x_{1,2} - \frac{\pi}{2} = \pm\pi \quad \text{also} \quad x_{1,2} = \frac{\pi \pm 2\pi}{2}.$$

Damit ist die Lösungsmenge gegeben durch  $L = \{\frac{3}{2}\pi, -\frac{1}{2}\pi\}$ . Weiters folgt  $x_1 + x_2 = \frac{3}{2}\pi - \frac{1}{2}\pi = \frac{2}{2}\pi = \pi = -p$  und  $x_1 x_2 = \frac{3}{2}\pi \left(-\frac{1}{2}\pi\right) = -\frac{3}{2 \cdot 2}\pi^2 = -\frac{3}{4}\pi^2 = q$ . Als letzte Probe zeigen Sie, dass

$$(x - x_1)(x - x_2) = \left(x - \frac{3}{2}\pi\right) \left(x + \frac{1}{2}\pi\right) = \dots = 0$$

gilt.

**Tip 1** Erstellen Sie sich eigene Beispiele (leichte und schwere), die Sie mit Bleistift lösen (sodass Sie ihre Lösung wieder ausradieren können). Solche Übungen sind sehr sinnvoll und als Folge wird ihre Konzentrationsfähigkeit und Aufmerksamkeit gestärkt. Wichtig ist, dass Sie ihre Fehler wirklich finden und darüber reflektieren. Oh, ein kleiner Fehler, minus ein halber Punkt. Ahh, ein kapitaler Fehler, mindestens die Hälfte der Punkte sind weg. So etwas blödes, das rechne ich später oder Morgen noch einmal mit mehr Konzentration. An einem anderen Tag. Ihh, die Rechnung ist richtig, aber falsch abgeschrieben, Null Punkte ... Ruhig bleiben und konzentrieren, Pause machen und die Rechnung zwischendurch kontrollieren. O.K. Jetzt noch die Probe machen. ...

Ja, mehr gibt es über quadratische Gleichungen in  $\mathbb{R}$  nicht zu sagen.

**Aufgaben 1** Lösen Sie folgende quadratische Gleichungen in  $\mathbb{R}$  und führen Sie die Probe durch.

$$47 = x^2, \quad 49 = x^2, \quad \frac{1}{x^2} = 81, \quad \left(\frac{x}{4}\right)^2 = 0, \quad \left(\frac{x}{-4}\right)^2 = 9 \quad \text{und} \quad \frac{x^2}{4} = 9.$$

*Bemerkung:* Die ersten drei Gleichungen sind von der Gestalt  $(x - a)(x + b) = 0$  mit  $a - b = 0$ . Überzeugen Sie sich selbst davon! Die vorletzte ist von der Gestalt  $\left(\frac{x}{c} - a\right) \left(\frac{x}{c} + b\right) = 0$  mit  $a - b = 0$  und  $c \neq 0$ .

**Aufgaben 2** Löse die quadratische Gleichung  $\left(\frac{x}{3} + \frac{2}{9}\right)^2 = \frac{49}{9}$  in  $\mathbb{R}$  und mache die Probe, d.h. zeige  $(x - x_1)(x - x_2) = 0$ . Wenn Sie in Stimmung sind, können Sie noch zeigen, dass  $x_1 + x_2 = -p$  und  $x_1 x_2 = q$  gilt. Ja, dann müssen Sie auch noch die Werte von  $p$  und  $q$  bestimmen.

**Aufgaben 3** Zeige, dass die Gleichung  $(x - \pi)(\sqrt{2} + x) = 0$  äquivalent ist zu

$$x^2 + (\sqrt{2} - \pi)x - \sqrt{2}\pi = 0.$$

Löse die letzte Gleichung in  $\mathbb{R}$  und mache die Probe.

**Aufgaben 4** Löse die quadratische Gleichung

$$x^2 - (\pi - \sqrt{2})x - \sqrt{2}\pi = 0$$

in  $\mathbb{R}$  und mache die Probe.

**Aufgaben 5** Erstellen Sie sich selbst eine Aufgabe zum Lösen einer quadratischen Gleichung und lösen Sie diese dann. Tip: Fangen Sie mit etwas Leichtem an.