1 Ein wenig Mengenlehre und einige ihre Anwendungen

Wir wiederholen nun ein wenig Mengenlehre und besprechen einige ihrer einfachen Anwendungen. Wir werden nur das besprechen was nötig ist um Mathematik *verstehen* und *praktizieren* zu können. Mengenlehre als solches wird nicht geprüft ist aber sehr wichtig für mathematische Formulierungen. Weiters geben wir einige Anwendungen an, welche für die Prüfung nützlich sein werden. Aber nur *leichte Kost*. Dieser Abschnitt ist ideal für den Einstieg ins lernen von Mathematik.

1.1 Der Begriff der Menge und Teilmenge

Eine 'Zusammenfassung' M von (wohlunterscheidbaren) Objekten wie 2, 3 und 1 wird als *Menge* bezeichnet, in Zeichen

$$M := \{2, 3, 1\}\,.$$

2, 3 und 1 werden die *Elemente der Menge* genannt. Der Doppelunkt : steht auf derjenigen Seite von = die definiert wird. Also M wird definiert als die Menge der Zahlen 2, 3, 1. Die Reihenfolge der Elemente in einer Menge ist nicht wichtig, d.h. die Mengen $\{2, 3, 1\}$ und $\{1, 2, 3\}$ sind gleich, in Zeichen

$$\{2, 3, 1\} = \{1, 2, 3\}\,.$$

Weiters kann ein Element mehrfach vorkommen ohne die Menge zu verändern, d.h.

$$M = \{1, 2, 3\} = \{2, 1, 2, 3\} = \{2, 1, 2, 3, 2, 2, 1\}\,.$$

Eine Menge kann auch aus unendlich vielen Elementen bestehen[1], zum Beispiel besteht die Menge der natürlichen Zahlen, in Zeichen $\mathbb{N}$, aus den unendlich vielen Zahlen

$$0,\quad 1\,,\quad 2,\quad 3\,,\qquad \dots \qquad \text{also} \qquad \mathbb{N} := \{0,\, 1\,, 2,\, 3,\, \,,\dots\}\,.$$

Liegt 3 in M so schreibt man $3 \in M$. Liegt 0 nicht in M so schreibt man $0 \notin M$, also 0 ist *nicht Element* von M. Zum Beispiel gilt:

$$1 \in M\,, \qquad 1,\, 2,\, 3 \in M\,, \qquad 4 \notin M \qquad \text{und} \qquad \pi, \sqrt{2} \notin M\,.$$

Wichtige Mengen sind z.B.[2] die Menge der *ganzen Zahlen* $\mathbb{Z}$, die Menge der *rationalen Zahlen* $\mathbb{Q}$, die Menge der *reellen Zahlen* $\mathbb{R}$ und die Menge der *komplexen Zahlen* $\mathbb{C}$.

Liegen alle Elemente einer Menge A in der Menge B, so ist A eine *Teilmenge* von B, in Zeichen $A \subseteq B$. Muss $A \neq B$ sein, dann schreibt man $A \subset B$. (Ähnlich wie bei $2 \leq 3$, $3 \leq 3$ und $2 < 3$.) Es gilt:

$$\emptyset \subset \{0\} \subset \mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}\,.$$

Für reelle Zahlen $a \leq b$ sind die Intervalle $[a, b]$ und $]a, b[$ definiert durch

$$[a, b] := \{x \in \mathbb{R} \,|\, a \leq x \leq b\} \qquad \text{und} \qquad]a, b[:= \{x \in \mathbb{R} \,|\, a < x < b\}$$

und erfüllen

$$(a+b)/2 \;\in\; \{(a+b)/2\} \;\subset\,]a, b[\, \subset\; [a, b] \;\subset\; \mathbb{R} \;=\,]-\infty, \infty[\,.$$

Statt $]a, b[$ schreibt man auch (a, b) (kein Paar!).
Beachte: $\{(a+b)/2\} \subset]a, b[$ ist äquivalent mit $a \leq \frac{a+b}{2} \leq b$, also $a \leq \frac{a+b}{2}$ und $a\frac{a+b}{2} \leq b$. (In der Tat

[1] Eine Menge A heißt endlich, falls es eine natürliche Zahl n gibt, sodass A und $\{1,\, 2,\, 3,\, \dots,\, n\}$ gleich viele Elemente enthält. Eine Menge die nicht endlich ist heißt *unendlich*.

[2] z.B. bedeutet 'zum Beispiel'.

gilt z.B. $a \leq \frac{a+b}{2}$ ist äquivalent zu $2\,a \leq a+b$ was wiederum äquivalent ist zu $a \leq b$ (was laut unserer Voraussetzung wahr ist!).)

Für was benötigen wir beispielsweise Mengen? Zum Beispiel um die Lösungsmenge $\mathbb{L}$ von Gleichungen wie

$$1)\ x^2 = 4, \qquad 2)\ x^3 = -9 \qquad \text{bzw.} \qquad 3)\ \sqrt{x} = -2$$

anzugeben. Es gilt:[3]

$$\mathbb{L}_1 = \{-2, +2\}\,, \qquad \mathbb{L}_2 = \{-3\} \qquad \text{und} \qquad \mathbb{L}_3 = \emptyset\,.$$

Die letzte Gleichung hat keine Lösung, weil für die Wurzel immer $\sqrt{x} \geq 0$ gilt und für die rechte Seite $-1 < 0$ gilt, also ein Widerspruch. Die Gleichung $\sqrt{x} = 2$ hat hingegen die Lösungsmenge $\mathbb{L} = \{4\}$.

Weiters werden Mengen auch dazu benötigt um Funktionen zu definieren wie z.B. die Quadratfunktion

$$\text{quad} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\,, x \mapsto x^2$$

oder die Wurzelfunktion

$$\text{sqrt} : [0,\infty) \mapsto [0,\infty)\,, x \mapsto \sqrt{x}\,.$$

Die Wurzelfunktion ist durch die Gleichung $(\sqrt{x})^2 = x$ definiert, d.h.

$$\sqrt{x} \text{ ist jene positive Zahl für die } \sqrt{x} \text{ mal } \sqrt{x} \text{ gleich } x \text{ gilt.}$$

Zum Beispiel gilt

$$\text{quad}(2) = 2^2 = 4, \qquad \text{quad}(3) = 3^2 = 9\,, \qquad \text{quad}(2.5) = 2.5^2 = 6.25$$

und damit

$$\text{sqrt}(4) = \sqrt{4} = 2, \qquad \text{sqrt}(9) = \sqrt{9} = 3\,, \qquad \text{sqrt}(6.25) = \sqrt{6.25} = 2.5\,.$$

Funktionen werden an einer anderen Stelle genau definiert und besprochen.

1.2 Folgepfeil und Äquivalenzpfeil

Der *Folgepfeil* wird verwendet um eine Folgerung (Implikation) anzuzeigen. Zum Beispiel folgt aus $2.5 \cdot 2.5 = 6.25$, dass die Wurzel aus 6.25 die Zahl 2.5 ist, in Zeichen

$$2.5 \cdot 2.5 = 6.25 \qquad \Rightarrow \qquad \sqrt{6.25} = 2.5$$

oder wenn wir die Lösungsmenge der Gleichung $\sqrt{x} = -1$ suchen können wir schreiben:

$$0 \leq \sqrt{x} = -1 < 0 \qquad \Rightarrow \qquad 0 < 0 \quad \text{(Widerspruch)} \qquad \Rightarrow \qquad \mathbb{L} = \emptyset\,.$$

Die obige Definition der natürlichen Zahlen ist ungenau. Eigentlich sind die natürlichen Zahlen wie folgt definiert. 0 ist eine natürliche Zahl und ist n eine natürliche Zahl, dann ist auch $n+1$ eine natürliche Zahl. Also ist die Menge der natürlichen Zahlen $\mathbb{N}$ wie folgt definiert:

$$1) \quad 0 \in \mathbb{N} \qquad 2) \quad n \in \mathbb{N} \Rightarrow n+1 \in \mathbb{N} \qquad \text{(Axiome von Peano)}\,.$$

[3]Die leere Menge, also die Menge ohne einem Element, wir mit $\emptyset$ bzw $\{\}$ bezeichnet.

Der *Äquivalenzpfeil* wird z.B. dazu verwendet um zu zeigen, dass eine Umformung die Lösungsmenge nicht verändert.

$$x^2+2\,x=0 \quad\Leftrightarrow\quad (x^2+2\,x+1)-1=0 \quad\Leftrightarrow\quad (x+1)^2=1 \quad\Leftrightarrow\quad x+1=\pm 1 \quad\Leftrightarrow\quad x=-1\pm 1\,.$$

In Worten, die Gleichung $x^2+2\,x=0$ hat die gleiche Lösungsmenge wie die Gleichung $x=-1\pm 1$ und damit ergibt sich die Lösungsmenge $\mathbb{L}=\{-2,0\}$. Alternativ und kürzer wäre

$$x^2+2\,x=0 \quad\Leftrightarrow\quad x\,(x+2)=0 \quad\Leftrightarrow\quad x=0 \quad\text{oder}\quad x=-2\,,$$

denn ein Produkt von reellen Zahlen ist genau dann Null, wenn mindestens einer der Faktoren Null ist. Weiters gilt

$$a\le\frac{a+b}{2}\le b \qquad\Leftrightarrow\qquad 2\,a\le a+b\le 2\,b \qquad\Leftrightarrow\qquad 2\,a\le a+b \quad\text{und}\quad a+b\le 2\,b$$

und die letzten beiden Ungleichungen sind wahr bzw. korrekt, weil $a\le b$ vorausgesetzt wurde. Genauer

$$2\,a\le a+b \quad\text{und}\quad a+b\le 2\,b \qquad\Leftrightarrow\qquad a\le b \quad\text{und}\quad a\le b \qquad\Leftrightarrow\qquad a\le b\,.$$

1.3 Produktmengen und Paare

Die Menge aller Paare (a,b) für die $a\in A$ und $b\in B$ gilt, nennt man die *Produktmenge* $A\times B$, genauer:

$$A\times B:=\{(a,b)\,|\,a\in A,\,b\in B\}\,.$$

Für die Mengen $A\times A$, $A\times A\times A$, $\ldots$ schreibt man auch kurz A^2, A^3, $\ldots$.
Ergänzung: Wie könnte man ein Paar definieren? Ganz einfach durch $(a,b):=\{\{a\},\{a,b\}\}$. Es folgt

$$(b,a)=\{\{b\},\{a,b\}\}\neq\{\{a\},\{a,b\}\}=(a,b) \qquad\text{also}\qquad (b,a)\neq(a,b)\,.$$

Für was benötigen wir Produktmengen? Die Punkte der Ebene werden beispielsweise durch $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ bzw. $\mathbb{R}^2$ beschrieben. Weiters wird die Menge der Punkte im Raum durch $\mathbb{R}^3$ beschrieben also die Menge aller Tripel (x,y,z) mit x, y, $z\in\mathbb{R}$. Die Addition und die Multiplikation zweier Zahlen entsprechen den Funktionen

$$+:\mathbb{R}\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}\,,\ (x,y)\mapsto \text{zähle } y \text{ zu } x$$

und

$$\cdot:\mathbb{R}\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}\,,\ (x,y)\mapsto \text{multipliziere } x \text{ mit } y\,,$$

d.h. jedem Paar (x,y) wird die Summe $x+y$ und das Produkt $x\cdot y$ zugeordnet.

1.4 Mächtigkeit einer Menge

Die Anzahl der Elemente der Menge M, d.h. ihre *Mächtigkeit*, wird mit $\#(M)$ oder $|M|$ bezeichnet und es gilt

$$|M|=|\{1,2,3\}|=|\{2,1,2,3\}|=3 \qquad\text{und}\qquad |\mathbb{N}|=\infty\,.$$

Für was benötigen wir $|M|$? Zum Beispiel für einfache Rechnungen mit Wahrscheinlichkeiten. Wir würfeln zweimal und fragen uns wie groß ist die Wahrscheinlichkeit zwei Sechser (6 und 6) zu würfeln. Die Menge aller möglichen Ausgänge ist gegeben durch

$$\{(w_1,w_2)\,|\,w_1,\,w_2\in\Omega\} \qquad\text{also}\qquad \Omega^2\,, \qquad \text{wobei } \Omega:=\{1,\,2,\,3,\,4,\,5,\,6\}.$$

Es gilt natürlich $|\Omega \times \Omega| = |\Omega^2| = 6 \cdot 6 = 6^2 = 36$. Die Menge A des gewünschten Ausganges lautet

$$A = \{(6,6)\}$$

und die Wahrscheinlichkeit, das ein Element von A eintritt ist gegeben durch

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega^2|} = \frac{1}{36} \qquad \text{(falls der Würfel fair ist ...)}\,.$$

Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit die Augensumme 4 durch zweimaliges würfeln zu bekommen? Die Menge der gewünschten Ereignisse ist gegeben durch

$$B = \{(1,3),(2,2),(3,1)\} \qquad \text{also} \qquad P(B) = \frac{|B|}{|\Omega^2|} = \frac{3}{6 \cdot 6} = \frac{1}{2 \cdot 6} = \frac{1}{12}\,.$$

Zur Probe schreiben Sie sich die ganze Menge $\Omega \times \Omega$ auf und zeigen Sie $|\Omega \times \Omega| = 36$.

1.5 Vereinigung, Durchschnitt und Komplement

Die einfachsten 'Operationen' zwischen Mengen A, $B \subseteq X$ sind ihre *Vereinigung* $A \cup B$ und ihr *Durchschnitt* $A \cap B$, genauer

$$A \cup B := \{x \in X \,|\, x \in A \text{ oder } x \in B\}$$

und

$$A \cap B := \{x \in X \,|\, x \in A \text{ und } x \in B\}\,.$$

Es gilt:

$$\{1,\,2\} \cup \{3\} = \{1,\,2,\,3\}, \qquad \{1,\,2,\,4\} \cap \{1,\,3,4\} = \{1,\,4\}\,,$$
$$\{(6,6)\} \cup \{(1,3),(2,2),(3,1)\} = \{(1,3),(2,2),(3,1),(6,6)\}$$

und

$$\{(2,2),(3,3)\} \cup \{(1,3),(2,2),(3,1)\} = \{(2,2)\}\,.$$

Es sei $A \subseteq X$. Das *Komplement von A in X* ist definiert durch

$$X \backslash A := \{x \in X \,|\, x \notin A\}\,,$$

also die Menge aller $x \in X$ die nicht in A enthalten sind. Es gilt

$$(X \backslash A) \cup A = X \qquad \text{und} \qquad (X \backslash A) \cap A = \emptyset\,.$$

Nun wieder einige kleine Anwendungsbeispiele. Für die Wahrscheinlichkeitsfunktion P gilt:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) \qquad \text{falls} \qquad A \cap B = \emptyset$$

und

$$P(X \backslash A) = 1 - P(A)\,.$$

Die letzte Behauptung kann wie folgt gezeigt werden:

$$1 = P(X) = P((X \backslash A) \cup A) = P(X \backslash A) + P(A) \qquad \text{also} \qquad 1 - P(A) = P(X \backslash A)\,,$$

was zu zeigen war. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit keine zweimal eine Sechs zu würfeln? Aus $A = \{(6,6)\}$ und $B := \Omega^2 \backslash A$ folgt

$$P(A) = \frac{1}{36} \qquad \text{und} \qquad P(B) = P(\Omega^2 \backslash A) = 1 - P(A) = 1 - \frac{1}{36} = \frac{36-1}{36} = \frac{35}{36}\,.$$

Zur Probe schreiben Sie sich die ganze Menge B auf und zeigen Sie $|B| = 35$ und deshalb $\frac{|B|}{|\Omega^2|} = \frac{35}{36}$.

Tip 1 *Dieser Abschnitt ist einfach, aber trotzdem auch komplex, weil er verschiedene Themen (die Sie mehr oder weniger gut kennen) miteinander verknüft. Diese Verknüfungen ermöglichen es ihnen zu verstehen für was Sie Mengenlehre usw. benötigen. Sie müssen nicht definieren können was eine Menge ist oder wann genau eine Menge unendlich ist, aber Sie müssen damit umgehen können. Weiters müssen Sie die jeweilige Anwendung verstehen und damit arbeiten können. Deshalb ist es sinnvoll später diesen Abschnitt wieder zu lesen und weitere Anwendungsbeispiel zu finden und korrekt aufzuschreiben. Dies kann sehr aufwendig sein, aber auch ungeheuerlich nützlich. Bei Erwachsenen funktioniert dies natürlich am besten.*

1.6 Die Potenzmenge

Wir geben jetzt noch ein komplizierters Besipiel an, für das wir die Potenzmenge benötigen. Beim ersten Lesen können Sie den Rest dieses Abschnittes ruhig auslassen.

Die *Potenzmenge von A* ist definiert als

$$\mathcal{P}(A) := \{B \,|\, B \subseteq A\}\,,$$

d.h. $\mathcal{P}(A)$ besteht aus allen Teilmengen von A einschließlich $\emptyset$ und A. Zum Beispiel ist die Potenzmenge von $S := \{1, 2, 3\}$ gegeben durch

$$\mathcal{P}(S) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{2, 3\}, \{1, 3\}, \{1, 2, 3\}\}\,.$$

Wir verwenden nun die Potenzmenge von Ω^2 um die obige Wahrscheinlichkeitsfunktion genau zu definieren. Ihr Definitionsbereich besteht aus allen Teilmengen von Ω^2, d.h. Sie ist die Potenzmenge von Ω^2, in Zeichen $\mathcal{P}(\Omega^2)$. Ihr Zielbereich ist das Intervall $[0, 1]$, denn die Wahrscheinlichkeit kann nur die reellen Zahlen zwischen (und einschließlich) 0 und 1 annehmen. Damit gilt also

$$P : \mathcal{P}(\Omega^2) \to [0, 1],\ A \mapsto \frac{|A|}{|\Omega^2|}\,.$$

Wir können auch sagen die Wahrscheinlichkeitsfunktion $P : \mathcal{P}(\Omega^2) \to [0, 1]$ (aus obigen Beispiel) ist definiert durch $P(A) := \frac{|A|}{|\Omega^2|}$. Die Menge A ist also eine Teilmenge von Ω^2 und zugleich ein Element von der Potenzmenge, die ja alle Teilmengen von Ω^2 als Elemente enthält. (Denken Sie darüber noch einmal nach und schreiben Sie sich $\mathcal{P}(\Omega^2)$ auf.)

Wenn wir dreimal würfeln gilt für die Wahrscheinlichkeitsfunktion

$$P : \mathcal{P}(\Omega^3) \to [0, 1],\ A \mapsto \frac{|A|}{|\Omega^3|} \qquad \text{mit} \qquad \Omega := \{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6\}$$

und wenn wir dreimal eine Münze werfen gilt $\Omega := \{0, 1\}$ oder weniger mathematisch $\Omega := \{\text{Kopf}, \text{Zahl}\}$.

So jetzt ist wirklich Schluss mit der Mengenlehre (,aber nicht mit ihrer Anwendung.)