1. Beispiel (10 Punkte)

Gegeben:
Ebenes schwingungsfähiges System lt. Skizze, welches sich in der dargestellten Lage im statischen Gleichgewicht befindet:

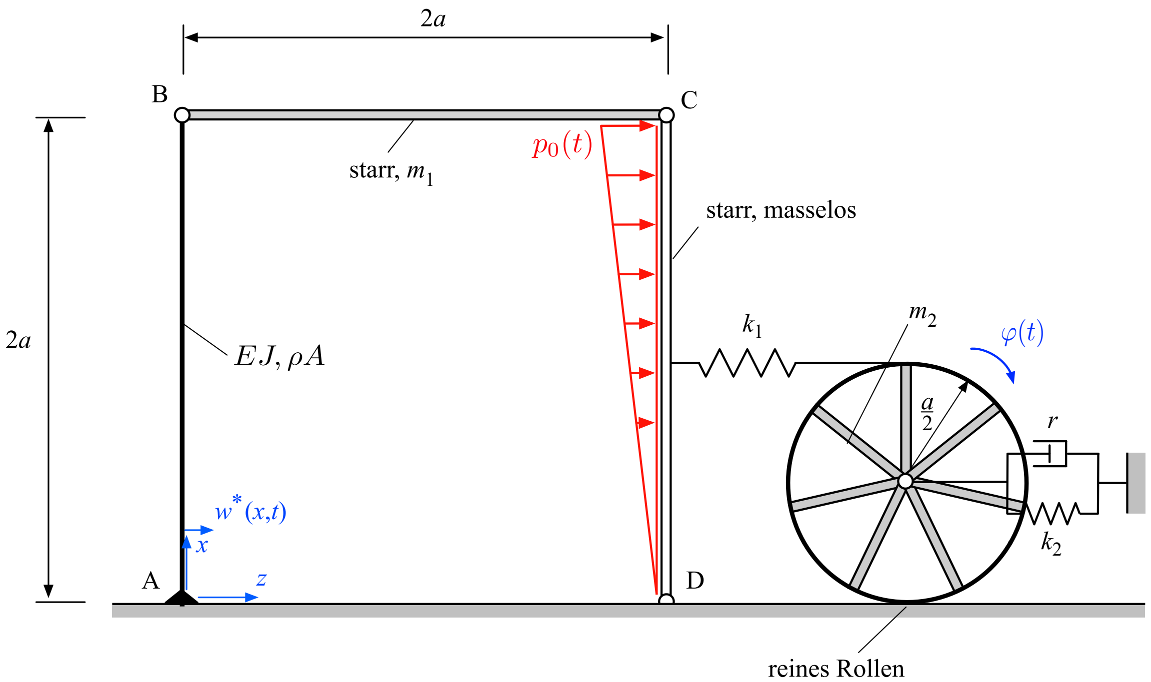
- Linear elastischer Biegestab AB: Länge $2a$, Biegesteifigkeit EJ, Masse pro Längeneinheit ρA
- Starrer Stab BC: Länge $2a$, Masse m_1
- Starrer Stab CD: Länge $2a$, masselos
- Starres Speichenrad: Speiche der Länge $a/2$, Masse m_2
- Linear elastische Federn: Federsteifigkeiten k_1 und k_2
- Geschwindigkeitsproportionaler Dämpfer: Dämpferkonstante r
- Dreieckslast im Bereich CD mit dem Maximalwert $p_0(t)$ in C

Gesucht:

1. Anzahl der Freiheitsgrade und Wahl der Lagekoordinate(n) des Ersatzsystems bei Verwendung des folgenden *Ritz*schen Ansatzes für die Durchbiegung w des Biegeträgers

   $w^*(x,t) = q(t)\left(1 - \cos\frac{\pi x}{4a}\right)$ für $0 \leq x \leq 2a$

2. a) Kinetische Energie
   b) Potentielle Energie
   c) Generalisierte Kräfte
   des diskretisierten Ersatzsystems für kleine Schwingungen
3. Bewegungsgleichung(en) des Ersatzsystems in *Lagrange*scher Form für kleine Schwingungen um die statische Gleichgewichtslage
4. Horizontale Verschiebung des Punktes C zufolge der statischen Belastung $p_0 = p_s$ und $k_1 = k_2 = k$



Lösung zum 1. Beispiel

1. Anzahl der Freiheitsgrade und Wahl der Lagekoordinaten

2 FHG; LK: $q(t)$ ($\rightarrow$) ... Durchbiegung w^* des Biegeträgers an der Stelle $x = 2a$

$\varphi(t)$ ($\circlearrowright$) ... Verdrehung des Speichenrades

2. Kinetische Energie, potentielle Energie, generalisierte Kräfte

$$T = \frac{1}{2}\left[\left(m_1 + \rho A a\left(3 - \frac{8}{\pi}\right)\right)\dot{q}^2 + \frac{7m_2a^2}{3}\dot{\varphi}^2\right]$$

$$V = \frac{1}{2}\left[\left(\frac{k_1}{4} + \frac{EJ\pi^4}{256a^3}\right)q^2 + (k_1 + \frac{k_2}{4})a^2\varphi^2 - k_1 a q\varphi\right] - \frac{2ap_0}{3}q$$

$$Q_\varphi = -\frac{ra^2}{4}\dot{\varphi}$$

3. Bewegungsgleichungen

$$\begin{bmatrix} m_1 + \rho A a\left(3 - \frac{8}{\pi}\right) & 0 \\ 0 & \frac{7m_2a^2}{3} \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \ddot{q} \\ \ddot{\varphi} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \frac{ra^2}{4} \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \dot{q} \\ \dot{\varphi} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{k_1}{4} + \frac{EJ\pi^4}{256a^3} & -\frac{k_1}{2}a \\ -\frac{k_1}{2}a & (k_1 + \frac{k_2}{4})a^2 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} q \\ \varphi \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{2ap_0}{3} \\ 0 \end{Bmatrix}$$

4. Horizontale Verschiebung des Punktes C zufolge der statischen Belastung

$$u_\mathrm{C} = \frac{2ap_0}{3\left(\frac{k}{20} + \frac{EJ\pi^4}{256a^3}\right)}$$

2. Beispiel (10 Punkte)

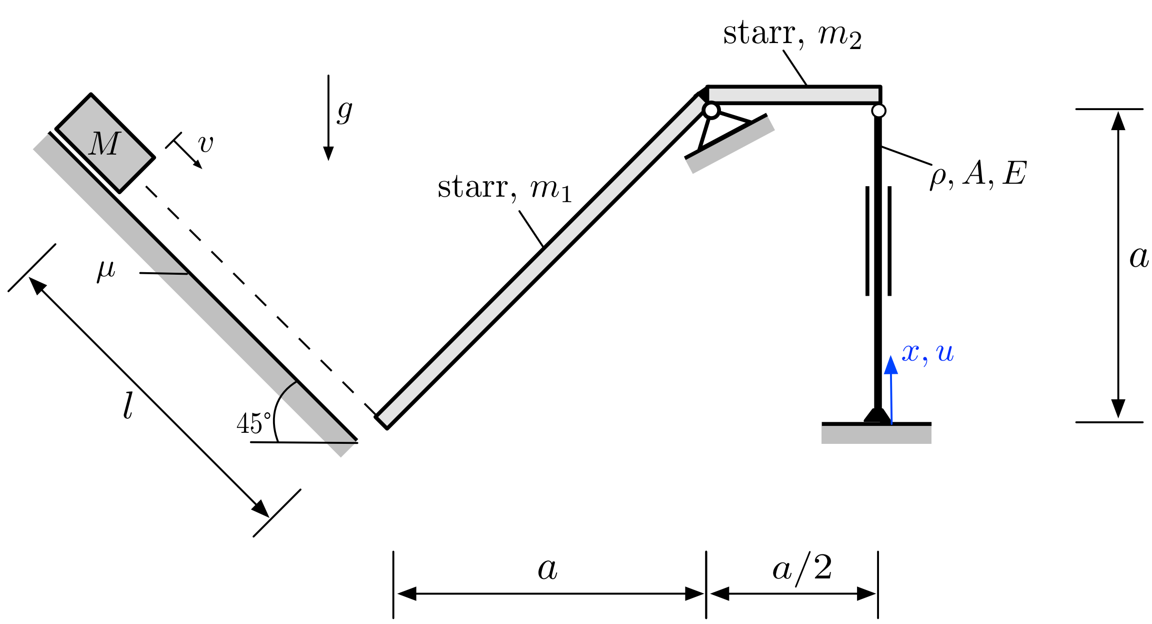
Gegeben:

Ein Klotz rutscht auf einem reibungsbehafteten Untergrund aus der Ruhelage auf ein ebenes schwingungsfähiges System lt. Skizze, das sich in gezeichneter Lage im statischen Gleichgewicht befindet:

- Klotz: Masse M
- Linear elastischer Dehnstab: Länge a, Dehnsteifigkeit EA, Masse pro Längeneinheit ρA
- Starre Stäbe: Längenmaß a und Masse m_1 bzw. Masse m_2
- Gleitreibungskoeffizient μ des Untergrunds

Gesucht:

1. Geschwindigkeit v der Punktmasse unmittelbar vor dem Stoß
2. Geschwindigkeiten v' und $\dot{q}'$ unmittelbar nach einem vollkommen elastischen Stoß unter Annahme der folgenden Geschwindigkeitsverteilung im Dehnstab:
   $\dot{u}'(x) = \dot{q}'\varphi(x)$, $\varphi(x) = \frac{2x}{a}$, $0 \leq x \leq a$
3. Eigenkreisfrequenz ω des gestoßenen Systems unter Annahme des folgenden *Ritz*schen Ansatzes für die Verformung des Dehnstabs:
   $u^*(x,t) = q(t)\varphi(x)$



Lösung zum 2. Beispiel

1. Geschwindigkeiten des Klotzes unmittelbar vor dem Stoß

$$v = \sqrt{\frac{2gl}{\sqrt{2}}\,(1-\mu)}$$

2. Geschwindigkeiten unmittelbar nach einem vollkommen elastischen Stoß

$$v' = \frac{32M - m^*}{32M + m^*}v \ , \ \dot{q}' = \frac{8\sqrt{2}M}{32M + m^*}v \text{ mit } m^* = \rho A a + \frac{32}{3}m_1 + \frac{4}{3}m_2$$

3. Eigenkreisfrequenz des gestoßenen Systems

$$\omega = \sqrt{\frac{k^*}{m*}} \text{ mit } k^* = \frac{4\,EA}{a}$$