

Die quadratische Gleichung $x^2 - a y^2 = 1$

Betrachten wir die angeführte Gleichung über den reellen Zahlen \mathbb{R} oder den komplexen Zahlen \mathbb{C} , so ist die Lösung klar. Interessant wird die Frage, wenn a eine ganze Zahl ist und wir nur ganzzahlige Lösungen suchen wollen.

Der einfache Fall, dass a eine Quadratzahl ist, kann beiseite gelegt werden.

Der andere Fall ist als Pell'sche Gleichung (nach John Pell, 1611 - 1685, benannt) in der Literatur bekannt. Es gibt unendlich viele Lösungen, die sich auf unterschiedliche Weise darstellen lassen:

- “direkt” als rekursiv gegebene Folge
- als Einheitengruppe eines geeigneten Rings
- mit Hilfe der Kettenbruchentwicklung von \sqrt{a}

Bereits in der Antike taucht diese Gleichung beim Rinderproblem des Archimedes auf (in einer dichterischen Übersetzung: ‘Künde, mein Freund, mir genau die Zahl an Helios’ Rindern, . . . ’)