

# Die quadratische Gleichung $x^2 - a y^2 = 1$

Betrachten wir die angeführte Gleichung über den reellen Zahlen  $\mathbb{R}$  oder den komplexen Zahlen  $\mathbb{C}$ , so ist die Lösung klar. Interessant wird die Frage, wenn  $a$  eine ganze Zahl ist und wir nur ganzzahlige Lösungen suchen wollen.

Der einfache Fall, dass  $a$  eine Quadratzahl ist, kann beiseite gelegt werden.

Der andere Fall ist als Pell'sche Gleichung (nach John Pell, 1611 - 1685, benannt) in der Literatur bekannt. Es gibt unendlich viele Lösungen, die sich auf unterschiedliche Weise darstellen lassen:

- “direkt” als rekursiv gegebene Folge
- als Einheitengruppe eines geeigneten Rings
- mit Hilfe der Kettenbruchentwicklung von  $\sqrt{a}$

Bereits in der Antike taucht diese Gleichung beim Rinderproblem des Archimedes auf (in einer dichterischen Übersetzung: ‘Künde, mein Freund, mir genau die Zahl an Helios’ Rindern, ...’)