

Längenerhaltende Abbildungen

Aus der linearen Algebra bekannt ist, dass lineare Abbildungen des euklidischen Raumes, welche Längen erhalten, orthogonale Abbildungen sind.

Nun kann man die Frage etwas allgemeiner stellen, indem man die Voraussetzung "lineare Abbildung" weglässt. Also: Wie sehen Selbstabbildungen des euklidischen Raums aus, welche die Längen von Strecken erhalten (ohne dass sie als 'linear' vorausgesetzt sind). Und es zeigt sich, dass auch hier nur die orthogonalen Abbildungen diese Eigenschaft haben.

Verschärft man die Fragestellung noch einmal zu "Welche Selbstabbildungen des euklidischen Raums erhalten Strecken der Länge 1 (oder allgemeiner: Strecken der Länge c für ein fixes $c > 0$)?", so zeigt sich, dass nur orthogonale Abbildungen diese Eigenschaft haben, sofern die Dimension des Raums mindestens 3 ist. Für kleinere Dimensionen ist die Aussage falsch.

In diesem Fall sind die Beweise nicht ganz trivial, aber auch nicht allzu schwer.