Die Baker-Campbell-Hausdorff-Formel und die Zassenhaus-Formel

Für zwei Matrizen $A, B \in \mathbb{R}^{d\times d}$ gilt bekanntlich im Allgemeinen nicht

$$\mathrm{e}^{t(A+B)} = \mathrm{e}^{tA}\mathrm{e}^{tB} \quad \text{für } t \in \mathbb{R}.$$

Es stellt sich die Frage, ob es eine Funktion $\Omega\colon [0,\infty) \to \mathbb{R}^{d\times d}$ gibt, sodass

$$\mathrm{e}^{\Omega(t)} = \mathrm{e}^{tA}\mathrm{e}^{tB}.$$

Eine positive Antwort auf diese Frage gibt die Baker-Campell-Hausdorff-Formel und diese kann etwa zur Analyse von Splitting-Verfahren verwendet werden. Hierbei lässt sich Ω in eine Potenzreihe entwickeln und die Koeffizienten ergeben sich als iterierte Kommutatoren.

Die Zassenhaus-Formel lässt sich aus der Baker-Campell-Hausdorff-Formel herleiten und liefert eine Darstellung der Form

$$\mathrm{e}^{t(A+B)} = \mathrm{e}^{tA}\mathrm{e}^{tB}C(t),$$

wobei sich C als unendliches Produkt von Exponentialen iterierter Kommutatoren ergibt.

In der entstehenden Bachelorarbeit sollte folgendes enthalten sein:

(1) Herleitung der Baker-Campell-Hausdorff-Formel

(2) Herleitung der Zassenhaus-Formel

(3) Analyse eines ausgewählten Splitting-Verfahrens