GAR NICHT MENSCHENFERN.
PERSÖNLICHKEITS- UND GESELLSCHAFTSBILDENDE ELEMENTE IM MATHEMATIKUNTERRICHT.

FRANZ PAUER
INSTITUT FÜR FACHDIDAKTIK UND INSTITUT FÜR MATHEMATIK
UNIVERSITÄT INNSBRUCK

ZUSAMMENFASSUNG. Im Mathematikunterricht lernt man nicht nur nützliche Verfahren zum Lösen verschiedener Aufgaben, sondern auch vorurteilsfrei und kritisch zu denken. Für eine demokratische Gesellschaft ist es wichtig, dass möglichst viele Bürgerinnen und Bürger Behauptungen, Nachrichten oder Versprechungen nicht einfach für wahr halten, ohne Begründungen zu fordern oder zumindest „Ist das wirklich so?“ gefragt zu haben. Wenn im Mathematikunterricht erlernt wird, klar und genau zu denken, verständlich und präzise zu sprechen, Aufgaben systematisch abzuarbeiten, dann wird damit auch das Selbstbewusstsein der Kinder und Jugendlichen gestärkt. Wer erfahren hat, dass man mathematische Aufgaben durch Nachdenken und Diskussion lösen kann, wird das vielleicht auch auf den persönlichen Bereich übertragen und kann dann Konflikte mit anderen Schülerinnen und Schülern intelligenter lösen als durch Zuschlagen.

Inhalt

1. BILDUNGSZIELE EINST UND JETZT

Als im 18. Jahrhundert in Österreich die Schulpflicht eingeführt wurde, musste der Schulunterricht dem Bedarf eines autoritären Systems entsprechen. Den Schülerinnen und Schülern sollten einige Fertigkeiten und Kenntnisse vermittelt werden, die auf Zuruf ausgeführt werden konnten. Im 21. Jahrhundert muss der Schulunterricht den Anforderungen einer demokratischen Gesellschaft entsprechen. Dieser Unterschied muss auch im Mathematikunterricht deutlich spürbar sein.

Die österreichischen Lehrpläne der allgemeinbildenden höheren Schule und der Neuen Mittelschule (Stand: Februar 2019) verlangen im Abschnitt „Allgemeines Bildungsziel“ von allen Unterrichtsfächern (auch vom Unterrichtsfach Mathematik) ... *die Bereitschaft zum selbstständigen Denken und zur kritischen Reflexion besonders zu fördern*. Weiters: *Der Unterricht* *hat aktiv zu einer den Menschenrechten verpflichteten Demokratie beizutragen. ... Urteils- und Kritikfähigkeit sowie Entscheidungs- und Handlungskompetenzen sind zu fördern.*

Speziell vom Unterrichtsfach Mathematik wird darüber hinaus in diesen Lehrplänen erwartet: *Die Schülerinnen und Schüler sollen ... in Verfolgung entsprechender Lernziele produktives geistiges Arbeiten, Argumentieren und exaktes Arbeiten, kritisches Denken, Darstellen und Interpretieren als mathematische Grundtätigkeiten durchführen, ...*
Und: *Folgende mathematische Grundtätigkeiten sind zu entwickeln: Kritisches Denken, insbesondere: Überprüfen von Vermutungen; Überprüfen von Ergebnissen; Erkennen von Unzulänglichkeiten mathematischer Modelle; Erkennen von Mängeln in Darstellungen oder Begründungen, ...*

Es wird auch ausdrücklich auf die Wichtigkeit des Modellierens hingewiesen: *Das Bilden mathematischer Modelle und das Erkennen ihrer Grenzen soll zu einem verantwortungsvollen Umgang mit Aussagen führen, die mittels mathematischer Methoden entstanden sind.*

Im Abschnitt für den Mathematikunterricht in der 9.-12. Schulstufe (Oberstufe) verlangt der Lehrplan der allgemeinbildenden höheren Schule: *Mathematik entwickelt die Fähigkeit zum Argumentieren, Kritisieren und Urteilen und fördert die Fähigkeit, zugleich verständlich und präzise zu sprechen. Das mathematische Prinzip, dass Behauptungen begründet werden müssen, soll Vorbild für andere Fächer und gesellschaftliche Bereiche sein.*

2. Zuerst genau hinhören und hinsehen, dann urteilen und handeln

Wer erinnert sich noch an die Schlussrechnungen im Mathematikunterricht? Das sind Aufgaben wie die folgende: *„Simon zahlt für* 2 *kg Erdäpfel* 4 *Euro, wieviel hätte er für* 3 *kg und wieviel für* 1000 *kg zahlen müssen?“* Kosten dann ein kg Erdäpfel 2 Euro, drei kg 6 Euro und 1000 kg Erdäpfel 2000 Euro ?

Jeder weiß, dass dieser Preis für 1000 kg viel zu hoch wäre. Wenn eine Ware in ausreichendem Maß zur Verfügung steht, dann bekommen Kunden, die viel kaufen, üblicherweise Rabatt. Es ist auch nicht sicher, ob 3 kg Erdäpfel 6 Euro kosten. Wenn ein Händler das Sonderangebot „Nimm 3, zahl’ 2“ macht, wäre die Antwort „4 Euro“ richtig.

Umgekehrt steigt der Preis von knappen Gütern, wenn viel gekauft wird. Ein solches knappes Gut war zum Beispiel vor einigen Jahren die Parkzeit in der Innsbrucker Innenstadt: 30 Minuten Parkzeit kosteten 50 Cent, 90 Minuten kosteten nicht dreimal, sondern viermal so viel, nämlich 2 Euro.

Ist die Mathematik also nicht auf praktische Fragen anwendbar? Ganz im Gegenteil. In einem den heutigen Anforderungen entsprechenden Mathematikunterricht wird erklärt, dass man aus dem Preis von 2 kg Erdäpfeln allein nicht auf den von 1000 kg Erdäpfeln schließen kann, man muss dazu auch etwas über den Zusammenhang von Gewicht und Preis von Erdäpfeln wissen. Schülerinnen und Schüler lernen an Hand solcher Beispiele, dass man nicht vorschnell urteilen oder Schlüsse ziehen soll. Das ist auch im Alltagsleben wichtig: Zuerst genau hinhören und hinsehen, dann erst urteilen und handeln!

Für ein steuerpflichtiges Einkommen von 25 000 Euro im Jahr 2017 waren 4200 Euro Steuer zu zahlen. Daraus allein kann man nicht auf die Höhe der Steuer für ein steuerpflichtiges Einkommen von 50 000 Euro im Jahr 2017 schließen: Sie beträgt 14 280 Euro, das ist mehr als dreimal so viel wie für die Hälfte dieses Einkommens.

Zur Berechnung der Steuer ist „Expert/inn/enwissen“ nötig, das heißt, man muss den Zusammenhang zwischen Einkommen und Steuer kennen. In Österreich ist die Steuer nicht proportional zum Einkommen, sondern berücksichtigt die finanzielle Leistungsfähigkeit der Einkommensbezieher/innen: Für den für ein gutes Leben notwendigen Teil des Einkommens ist keine oder nur wenig Steuer zu zahlen, für den darüber hinaus gehenden mehr. Im Jahr 2017 wurde die Steuer so berechnet: für den Einkommensanteil bis 11000 Euro war keine Steuer zu zahlen, für den von 11000 bis 18000 Euro 25 Prozent, für den von 18 000 bis 31 000 Euro 35 Prozent, für den Einkommensanteil von 31 000 bis 60 000 Euro 42 Prozent, für 60 000 bis 90 000 Euro 48 Prozent, für den von 90 000 bis 1 000 000 Euro 50 Prozent und für den über einer Million Euro 55 Prozent.

In den Unterhaltungsseiten von Zeitungen und leider auch in verschiedenen Aufnahmeprüfungen oder Intelligenztests sind Aufgaben zu finden, bei welchen (endliche) Zahlenfolgen, Buchstabenfolgen, … fortzusetzen sind. Die Fragestellung legt nahe, dass es dafür nur eine „richtige“ Möglichkeit gäbe. Zumeist gibt es aber mehrere (manchmal auch beliebig viele) sinnvolle Möglichkeiten zur Fortsetzung.

Zum Beispiel: *S*etze die Buchstabenfolge c, d, e, f, g, … fort ! Bei dieser Aufgabe wird eine Klavierschülerin an die Tonleiter c, d, e, f, g, a, h, c, … denken, ein Volksschüler, der gerade das Alphabet gelernt hat, aber eher an c, d, e, f, g, h, i, j, … .
Ein Walzertänzer wird die Zahlenfolge 1, 2, 3, … vielleicht mit $1, 2, 3, 1, 2, 3, 1, 2, 3, \ldots$ periodisch fortsetzen, und nicht wie vermutlich die meisten mit $1, 2, 3, 4, 5, 6, \ldots$.

Auch in der folgenden Geschichte soll man aus wenigen Daten auf weitere schließen (und scheitert zumeist daran): In einer durch eine hohe Stadtmauer geschützten Stadt wurde ein Wächter vor das einzige Stadttor gestellt. Dieser soll nur die Personen einlassen, die seine Frage richtig beantworten konnten. Allen Bewohnerinnen und Bewohnern der Stadt wurde mitgeteilt, wie die Frage richtig beantwortet wird. Ein Fremder versteckte sich in der Nähe des Wächters und hörte zu: Der Wächter nannte den Eintritt suchenden eine Zahl und diese antworteten immer mit einer Zahl und durften passieren. Der Fremde hörte nur 3-mal zu: Auf die Fragen 28?, 16? und 8? wurden jeweils die Antworten 14!, 8! und 4! gegeben. Er meinte, dass immer die Hälfte der genannten Zahl als Antwort gegeben werden müsse.

Auf die Frage 20? antwortete er daher mit 10!, richtig wäre aber 7! gewesen. Warum? In der Stadt war vereinbart worden, als Antwort die Anzahl der Buchstaben des vom Wächter genannten Zahlwortes zu geben. Achtundzwanzig hat 14 Buchstaben, sechzehn 8, acht 4 und zwanzig 7 Buchstaben.

Man kann zeigen, dass es für jede endliche Folge von Zahlen beliebig viele sinnvolle Bildungsgesetze gibt (die nur Addition und Multiplikation verwenden) und diese Folgen daher auf beliebig viele Weisen „sinnvoll" fortgesetzt werden können. Zum Beispiel sind die ersten 5 Folgenglieder der Folge, die nach der Regel

„Bilde für alle positiven natürlichen Zahlen n das Produkt der fünf Vorgänger $(n-1)\cdot(n-2)\cdot\ldots\cdot(n-5)$ und addiere dann n"
gebildet wird, die Zahlen $(-4)\cdot(-3)\cdot(-2)\cdot(-1)\cdot 0+1=1,\ 2,\ 3,\ 4$ und $0\cdot 1\cdot 2\cdot 3\cdot 4+5=5$. Das nächste (sechste) Folgenglied ist aber nicht 6, sondern $1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5+6=126$ und das siebte Folgenglied 727.

Man mag einwenden, dass „die meisten" die Folge $1,2,3,4,5$ mit 6 fortsetzen werden. Das weckt aber die Vermutung, dass bei solchen Tests nicht die Intelligenz der Testperson überprüft wird, sondern ob diese so wie die meisten denkt. Querdenker/innen und Kreative können so „herausgefiltert" werden.

3. Klar und genau denken, verständlich und präzise sprechen

Möchte man auf eine Frage eine eindeutige Antwort haben, muss man die Frage klar und für den Gesprächspartner verständlich formulieren. Im Mathematikunterricht kann die Fähigkeit zum klaren und genauen Denken sowie zum verständlichen und präzisen Sprechen entwickelt werden.

Ein Beispiel: In der 8. oder 9. Schulstufe werden Aufgaben wie

„Mache den Nenner von

$$\frac{2\sqrt{5}+7}{3\sqrt{5}-2}$$

wurzelfrei!"
besprochen. Dabei muss zuvor genau erklärt werden, was damit gemeint ist. Wird das nicht getan, wären die einfachsten Lösungen dieser Aufgabe

$$\frac{\left(\frac{2\sqrt{5}+7}{3\sqrt{5}-2}\right)}{1}$$

oder, nach Eintippen in einen Taschenrechner,

$$2,43662682 (= \frac{243662682}{100000000}) .$$

An der Formulierung „Mache den Nenner wurzelfrei!" irritiert zuallererst, dass $3\sqrt{5}-2$ keine ganze Zahl ist, daher nicht Nenner einer Bruchzahl sein kann. Es handelt sich hier um den Quotienten der reellen Zahlen $2\sqrt{5}+7$

und $3\sqrt{5}-2$, der „Bruchstrich“ ist daher ein Divisionszeichen. Eine mögliche präzise Formulierung der Aufgabe ist:
Berechne rationale Zahlen (Bruchzahlen) a und b so, dass

$$\frac{2\sqrt{5}+7}{3\sqrt{5}-2} = a\sqrt{5}+b$$

ist.

Wurde ein Problem klar formuliert, liegt oft schon die Vorgangsweise zu dessen Lösung nahe: Multipliziert man auf beiden Seiten des Gleichheitszeichens mit $3\sqrt{5}-2$, so erhält man

$$2\sqrt{5}+7 = (3\sqrt{5}-2)\cdot(a\sqrt{5}+b)$$

und daraus

$$2\sqrt{5}+7 = (3b-2a)\sqrt{5}+(-2b+15a)\,.$$

Wir erhalten daraus das Gleichungssystem

$$3b-2a = 2 \quad \text{und} \quad -2b+15a = 7\,.$$

Dessen Lösung ist $a = \frac{25}{41}$ und $b = \frac{44}{41}$.

Wer die „binomischen Formeln“ kennt, hätte die Aufgabe auch schneller so lösen können: Multipliziert man Divisor und Dividend mit $3\sqrt{5}+2$, erhält man

$$\frac{2\sqrt{5}+7}{3\sqrt{5}-2} = \frac{(2\sqrt{5}+7)\cdot(3\sqrt{5}+2)}{(3\sqrt{5}-2)\cdot(3\sqrt{5}+2)} = \frac{25\sqrt{5}+44}{41} = \frac{25}{41}\sqrt{5}+\frac{44}{41}\,.$$

In beiden Fällen kann die Aufgabe gelöst werden, ohne vorher zu wissen, dass es eine Lösung gibt und dass diese eindeutig bestimmt ist. Man kann aber zeigen, dass das bei Aufgaben dieses Typs immer der Fall ist.

4. Mündige Bürger/innen oder Untertanen?

Die Aufgabe „Finde alle (reellen) Zahlen x so, dass $x^2+6x-1=0$ ist!“ nennt man eine quadratische Gleichung. Man kann sie durch einfache Überlegungen schrittweise lösen:

- Weil $(x+3)^2 = x^2+3x+3x+3\cdot 3 = x^2+6x+9$ ist, schreiben wir x^2+6x zu $(x+3)^2-9$ um.
- Wir suchen also alle (reellen) Zahlen x so, dass $(x+3)^2-9-1=0$ ist. Das sind alle reellen Zahlen x so, dass $(x+3)^2=10$ ist.
- Links und rechts des Gleichheitszeichens stehen positive Zahlen, wir können daher aus beiden die Wurzel ziehen und erhalten $x+3=\pm\sqrt{10}$.
- Daraus folgt, dass die gesuchten Zahlen $-3+\sqrt{10}$ und $-3-\sqrt{10}$ sind.

Wir haben dabei vorausgesetzt, dass bekannt ist, was das Quadrat einer reellen Zahl und was die Wurzel einer positiven reellen Zahl ist. Weiters die üblichen Rechenregeln beim Rechnen mit reellen Zahlen, wie zum Beispiel: man darf ausmultiplizieren und herausheben, beim Addieren und Multiplizieren kommt es nicht auf die Reihenfolge der Summanden und Faktoren an, usw. Wer das weiß, kann mit den Erklärungen oben verstehen, wie man quadratische Gleichungen löst.

Im Mathematikunterricht ist es wichtig, alle Rechenverfahren und Behauptungen ausreichend zu begründen. So wird den Lernenden die für eine demokratische Gesellschaft sehr wichtige Eigenschaft vermittelt, Aussagen (im politischen und im persönlichen Bereich) nicht fraglos zu akzeptieren, sondern immer nach Begründungen zu fragen. Die Fragen „Ist das so?“ oder „Warum?“ müssen in einer demokratischen Gesellschaft der Zustimmung zu einer Behauptung vorangehen.

Der Unterricht zu quadratischen Gleichungen in einer autoritären Gesellschaft (in der Vorgesetzte nicht nach Begründungen gefragt werden dürfen), könnte so aussehen:

- Die quadratische Gleichung $x^2+6x-1=0$ ist wie folgt zu lösen:
- Lerne die Lösungsformel $-\frac{p}{2}\pm\sqrt{\frac{p^2}{4}-q}$ auswendig!
- Setze 6 für p und -1 für q in die Lösungsformel $-\frac{p}{2}\pm\sqrt{\frac{p^2}{4}-q}$ ein!
- Dann sind $-\frac{6}{2}\pm\sqrt{\frac{6^2}{4}-(-1)}=-3\pm\sqrt{10}$ die zwei Lösungen.

Die Lösungsformel wird nicht hergeleitet (das ginge ganz einfach, wenn man wie beim ersten Zugang oben für $x^2+px+q=0$ anstatt für $x^2+6x-1=0$ vorgeht), sondern „vorgesetzt“ und dann müssen vorgegebene Handlungen ausgeführt werden. Die Schülerinnen und Schüler in einer autoritären Gesellschaft sollen ja nicht zu mündigen Bürgerinnen und Bürgern, sondern zu guten Untertanen erzogen werden, die auf Zuruf in Formeln einsetzen, genau vorgegebene Rechenschritte ausführen oder andere Befehle ausführen. Es steht die Behauptung „So ist das!“und nicht die Frage „Ist das so?“ im Vordergrund.

5. Schlussbemerkungen

Soll der Mathematikunterricht den Bedürfnissen unserer den Menschenrechten verpflichteten demokratischen Gesellschaft entsprechen, müssen die folgenden Aspekte beachtet werden:

- Die Sprache im Mathematikunterricht muss einfach und verständlich sein und möglichst wenige Fachbegriffe verwenden.Die notwendigen Fachbegriffe müssen sorgfältig und präzise eingeführt werden.
- Die Inhalte sollen so dargestellt werden, dass sie für die Schüler/innen (in der jeweiligen Altersstufe und mit ihrem jeweiligen Wissensstand) gut verständlich sind.

- Möglichst viele Inhalte sollen nachvollziehbar hergeleitet werden.
- Die Übungsaufgaben müssen zugleich einfach und präzise formuliert werden. Sie sollen das kritische und vorurteilsfreie Denken, Modellieren und Problemlösen trainieren.

Natürlich erfordern diese Ansprüche Lehrpersonen mit hoher fachlicher und didaktischer Kompetenz. Seit einigen Jahren dauert daher die Ausbildung für *alle* Lehrpersonen in den Schulen der Sekundarstufe insgesamt 6 Jahre, unterteilt in ein 4-jähriges Bachelor- und ein 2-jähriges Masterstudium. Es ist zu erwarten, dass dieser bildungspolitisch wichtige Schritt in den nächsten Jahrzehnten viel zur Qualitätsentwicklung des Mathematikunterrichts beitragen wird.