Kettenregel, Substitution und Methode der Trennung der Variablen

Franz Pauer

Institut für Fachdidaktik
und
Institut für Mathematik

Universität Innsbruck

Lehrer/innen/fortbildungstag Wien 2015
11. April 2015

Einleitung: Integrieren durch Substitution

- Berechne $\int_{g(a)}^{g(b)} h(t)dt$ mit der Substitution t = g(s)!

- Merkregel: $g'(s) = \frac{dt}{ds}$, also ist $dt = g'(s)ds$ und

$$\int_{g(a)}^{g(b)} h(t)dt = \int_a^b h(g(s))g'(s)ds$$

- Aber: Was ist dt, ds und ist $\frac{dt}{ds}$ ein Quotient?

- Beispiel: $\int_0^1 sin(2t+1)dt =?$
  $s = 2t+1,\ t = g(s) = \frac{s}{2} - \frac{1}{2},\ g'(s) = \frac{1}{2}$
  $\int_0^1 sin(2t+1)dt = \int_1^3 \frac{1}{2} sin(s)ds = -\frac{1}{2}(cos(3) - cos(1))$

Einleitung: Methode der Trennung der Variablen

- Berechne eine differenzierbare Funktion y so, dass $y' = x \cdot y$ ist!

- Merkregel: $y' = \frac{dy}{dx}$, also ist $\frac{dy}{y} = xdx$ und

$$\int \frac{1}{y} dy = \int xdx + c_0$$

  Man weiß: $\int \frac{1}{y} dy = ln|y| + c_1$ und $\int xdx = \frac{x^2}{2} + c_2$, daher ist

$$ln|y| = \frac{x^2}{2} + c_3$$

  und

$$y(x) = c \cdot e^{\frac{x^2}{2}}$$

- Aber: Was ist dx, dy und ist $\frac{dy}{dx}$ ein Quotient?

Einleitung

Inhalt

- Rechnen mit reellwertigen Funktionen
- Verkettung (Zusammensetzung) von Funktionen
- Kettenregel der Differentialrechnung
- Integrieren durch Substitution
- Methode der Trennung der Variablen
- Vor- und Nachteile von Merkregeln

Nicht rechnen *oder* verstehen,
sondern Rechnen verstehen!

Rechnen mit reellwertigen Funktionen

Für Funktionen f, g von D nach $\mathbb{R}$ sind deren Summe $f + g : D \longrightarrow \mathbb{R}$ und deren Produkt $f \cdot g : D \longrightarrow \mathbb{R}$ durch

für alle $z \in D$ ist

$$(f+g)(z) := f(z) + g(z) \quad \text{und} \quad (f \cdot g)(z) := f(z) \cdot g(z)$$

definiert.
(Verschiedene Bedeutung von + bzw. $\cdot$ beachten!)

Pauer, F. und Stampfer, F.: Mit Funktionen rechnen - ein wichtiges Thema der Sekundarstufe 2.

Schriftenreihe zur Didaktik der Mathematik der ÖMG, 47, 2014, 62-67.

Rechnen mit reellwertigen Funktionen

- Summenregel der Differenzialrechnung: Sind zwei Funktionen f, g von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{R}$ differenzierbar, dann auch ihre Summe $f + g$. Es ist
$$(f + g)' = f' + g' \,.$$
- Produktregel der Differenzialrechnung: Sind zwei Funktionen f, g von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{R}$ differenzierbar, dann auch ihr Produkt $f \cdot g$. Es ist
$$(f \cdot g)' = f' \cdot g + f \cdot g' \,.$$

Rechnen mit reellwertigen Funktionen

Grundlegende Rechenregeln:

Für alle reellwertigen Funktionen f, g, h mit demselben Definitionsbereich ist

- $f + g = g + f$ und $f \cdot g = g \cdot f$
  (Kommutativgesetz)
- $(f + g) + h = f + (g + h)$ und $(f \cdot g) \cdot h = f \cdot (g \cdot h)$
  (Assoziativgesetz, Klammern weglassen)
- $(f + g) \cdot h = (f \cdot h) + (g \cdot h)$
  (Distributivgesetz, ausmultiplizieren und herausheben)
- $f + 0 = f$ und $f \cdot 1 = f$
  (neutrale Elemente)
- $f + (-f) = 0$

Rechenregeln eines „kommutativen Ringes“

Rechnen mit reellwertigen Funktionen

Bezeichnung:

- $x : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, für alle reellen Zahlen t ist $x(t) = t$, „identische Funktion“.
  Graph von x: erste Mediane, Ableitung $x' = 1$

- Potenzfunktion: x^n, $(n \in \mathbb{N})$,

- bezüglich der Multiplikation inverse Funktion:
  $\frac{1}{x} : \mathbb{R} \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{R}$, $\frac{1}{x}(t) = \frac{1}{t}$

Verkettung von Funktionen

Für Funktionen f und g von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{R}$ heißt die Funktion

$$f \circ g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \text{ mit } (f \circ g)(t) := f(g(t))$$

die *Verkettung* (oder *Zusammensetzung* oder *Hintereinanderausführung*) von f und g.
Sprechweise: „f nach g“.

Verkettung von Funktionen

Beispiel:

$$\frac{1}{(x+1)^2} = \frac{1}{x} \circ x^2 \circ (x+1)$$

Von rechts gelesen:

- Addiere 1!
- Quadriere!
- Invertiere!

Verkettung von Funktionen

Beispiel: f mit $f(t) = 2 \cdot t + 1$, g mit $g(t) = 3 \cdot t$, Sinusfunktion sin.

$$(g \circ sin \circ f)(t) = 3 \cdot sin(2 \cdot t + 1)$$

- Multipliziere mit 2 und addiere 1!
- Berechne Sinus von dieser Zahl!
- Multipliziere mit 3!

allgemeine Sinusfunktion: Verkettung einer homogenen linearen Funktion mit einer Sinusfunktion und einer linearen Funktion

Verkettung von Funktionen

Grundlegende Rechenregeln:

Für alle reellwertigen Funktionen f, g, h von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{R}$ ist

- $(f \circ g) \circ h = f \circ (g \circ h)$ (Assoziativgesetz)
- $(f + g) \circ h = (f \circ h) + (g \circ h)$
  (Distributivgesetz von rechts)
- $f \circ x = x \circ f = f$
  (x ist neutrales Element)

Verkettung von Funktionen

Vorsicht, die folgenden Rechenregeln gelten *nicht*:

- $f \circ g = g \circ f$
  (Kommutativgesetz)
- $h \circ (f + g) = (h \circ f) + (h \circ g)$
  (Distributivgesetz von links)

Die Menge aller reellwertigen Funktionen von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{R}$ mit Addition und Verkettung ist kein Ring, sondern nur ein *Fastring*.

Verkettung von Funktionen

Zerlegung von Funktionen nicht eindeutig:

$$\sqrt{1-x^2} = \sqrt{} \circ (1-x) \circ x^2$$

$$\sqrt{1-x^2} = cos \circ arcsin$$

Denn: für alle reellen Zahlen t mit $-1 \leq t \leq 1$ ist

$$(\sqrt{1-x^2})(t) = \sqrt{1-t^2}$$

und $(cos \circ arcsin)(t) =$

$$= cos(arcsin(t)) = \sqrt{1 - sin^2(arcsin(t))} = \sqrt{1-t^2}$$

Kettenregel der Differentialrechnung

- Sind zwei Funktionen f, g von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{R}$ differenzierbar, dann auch ihre Verkettung $f \circ g$. Es ist

$$(f \circ g)' = (f' \circ g) \cdot g'$$

- Denn:

$$(f \circ g)'(a) = lim_{t \to a} \frac{f(g(t)) - f(g(a))}{t - a} =$$

$$= lim_{t \to a} \left(\frac{f(g(t)) - f(g(a))}{g(t) - g(a)} \cdot \frac{g(t) - g(a)}{t - a} \right) =$$

$$= lim_{t \to a} \frac{f(g(t)) - f(g(a))}{g(t) - g(a)} \cdot lim_{t \to a} \frac{g(t) - g(a)}{t - a} =$$

$$= f'(g(a)) \cdot g'(a) = (f' \circ g)(a) \cdot g'(a) \,.$$

Kettenregel der Differentialrechnung

- Für eine differenzierbare Funktion f von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{R}$ heißt die homogene lineare Funktion $d_a f$ mit $d_a f(1) = f'(a)$ das Differential von f an der Stelle a.

- Es ist
$$d_a(f \circ g) = d_{g(a)} f \circ d_a g.$$
„Das Differential der Verkettung ist die Verkettung der Differentiale".

  Denn:
$$d_a(f \circ g)(1) = (f \circ g)'(a)$$
und
$$(d_{g(a)} f \circ d_a g)(1) = (d_{g(a)} f)(g'(a)) = f'(g(a)) \cdot g'(a).$$

Kettenregel der Differentialrechnung

Beispiel:
g von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{R}^+$ differenzierbar

$$(ln \circ g)' = (ln' \circ g) \cdot g' = (\frac{1}{x} \circ g) \cdot g' = \frac{g'}{g}$$

Oder: für alle $t \in \mathbb{R}$ ist

$$(ln \circ g)'(t) = ln'(g(t)) \cdot g'(t) = \frac{g'(t)}{g(t)}$$

Kettenregel der Differentialrechnung

Beispiel:
f von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{R}$ differenzierbar, Umkehrfunktion f^{-1} differenzierbar

$$f \circ f^{-1} = x$$

$$(f' \circ f^{-1}) \cdot (f^{-1})' = (f \circ f^{-1})' = x' = 1$$

$$(f^{-1})' = \frac{1}{f' \circ f^{-1}}$$

Oder: für alle $t \in \mathbb{R}$ ist

$$(f^{-1})'(t) = \frac{1}{f'(f^{-1}(t))}$$

Kettenregel der Differentialrechnung

Beispiel:

$$(sin \circ (2 \cdot x + 1))' = (sin' \circ (2 \cdot x + 1)) \cdot (2 \cdot x + 1)' =$$

$$= (cos \circ (2 \cdot x + 1)) \cdot 2 = 2 \cdot (cos \circ (2 \cdot x + 1))$$

Oder: für alle $t \in \mathbb{R}$ ist

$$(sin \circ (2 \cdot x + 1))'(t) = 2 \cdot cos(2 \cdot t + 1)$$

Integrieren durch Substitution

- $\int h(t)dt$ ist eine Stammfunktion von h.
- $\int h(t)dt$ *durch Substitution berechnen* heißt:
  Finde differenzierbare Funktionen f und g so, dass
  $$h = (f' \circ g) \cdot g' \; (= (f \circ g)')$$
  ist. Dann ist $\int h(t)dt = f \circ g + c$
- Wird g gewählt (und hat eine Umkehrfunktion g^{-1}), dann ist $f' = \frac{h}{g'} \circ g^{-1}$.
- Wähle also g so, dass eine Stammfunktion von $\frac{h}{g'} \circ g^{-1}$ berechnet werden kann!

Integrieren durch Substitution

Beispiel: $\int sin(2t+1)dt =?$

$$g = 2x+1,\ g' = 2,\ sin \circ (2x+1) = \frac{1}{2}(sin \circ g) \cdot g' = -\frac{1}{2}(cos \circ g)'$$

$$\int sin(2t+1)dt = -\frac{1}{2} cos \circ (2x+1) + c$$

Integrieren durch Substitution

Beispiel: $\int \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} dt = ?$

$$\sqrt{1-t^2} = cos(arcsin(t)), g = arcsin$$

$g' = ?$

$$sin \circ arcsin = x, \; (cos \circ arcsin) \cdot arcsin' = (sin \circ arcsin)' = 1$$

$$arcsin' = \frac{1}{cos \circ arcsin}$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} dt = arcsin + c$$

Methode der Trennung der Variablen

Berechne eine differenzierbare Funktion y so, dass $y' = x \cdot y$ ist!

- $\frac{y'}{y} = x$, also ist

$$\int \frac{y'(t)}{y(t)} dt = \int x(t) dt + c_0$$

Man weiß(Kettenregel) :

$$\int \frac{y'(t)}{y(t)} dt = ln \circ |y| + c_1$$

und $\int x(t)dt = \int tdt = \frac{x^2}{2} + c_2$, daher ist

$$ln \circ |y| = \frac{x^2}{2} + c_3$$

und y ist die Funktion mit

$$y(t) = c \cdot e^{\frac{t^2}{2}}$$

- Beachte: dx, dy und $\frac{dy}{dx}$ werden nicht gebraucht.

Methode der Trennung der Variablen

Berechne eine differenzierbare Funktion y so, dass $y' = x \cdot y^2$ ist!
$\frac{y'}{y^2} = x$, also ist

$$\int \frac{y'(t)}{y^2(t)} dt = \int x(t) dt + c_0$$

Man weiß(Kettenregel) :

$$\int \frac{y'(t)}{y^2(t)} dt = -\frac{1}{x} \circ y + c_1$$

und $\int x(t) dt = \int t dt = \frac{x^2}{2} + c_2$, daher ist

$$-\frac{1}{y} = \frac{x^2}{2} + c_3 \text{ und } \; y = \frac{-2}{x^2 + c}$$

Vor- und Nachteile von Merkregeln

- Vorteil: erleichtern mechanisches Operieren
  (wird durch CAS relativiert)
- Nachteil: fördern Verständnis nicht
  (kein nachhaltiges Wissen)
- Nachteil: legen falsche Vorstellungen nahe

Danke für die Aufmerksamkeit!
http://www.uibk.ac.at/mathematik/personal/pauer/

franz.pauer@uibk.ac.at