Mit Funktionen rechnen - ein wichtiges Thema der Sekundarstufe 2

Franz Pauer

Institut für Fachdidaktik
und
Institut für Mathematik

Universität Innsbruck

Lehrer/innen/fortbildungstag Wien 2014
25. April 2014

Einleitung

Inhalt

- Rechnen mit Zahlen (Sekundarstufe 1)
- Rechnen mit Funktionen (Sekundarstufe 2)

Wiedererkennen von Strukturen erleichtert Lernen,
Erkennen von Gemeinsamkeiten vertieft Verständnis

Rechnen mit Zahlen

- Zahlbereiche: $\mathbb{Z} \subset \mathbb{D} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$
  (ganze , Dezimal-, rationale , reelle , komplexe Zahlen)
- mit Rechenoperationen: Addition (+) und Multiplikation ($\cdot$)
- Subtraktion: $a - b := a + (-b)$

Rechnen mit Zahlen

Grundlegende Rechenregeln:

Für alle Zahlen a, b, c ist

- $a + b = b + a$ und $a \cdot b = b \cdot a$
  (Kommutativgesetz)
- $(a + b) + c = a + (b + c)$ und $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$
  (Assoziativgesetz, Klammern weglassen)
- $(a + b) \cdot c = (a \cdot c) + (b \cdot c)$
  (Distributivgesetz, ausmultiplizieren und herausheben)
- $a + 0 = a$ und $a \cdot 1 = a$
  (neutrale Elemente)
- $a + (-a) = 0$

Rechenregeln eines „kommutativen Ringes“

Rechnen mit Zahlen

Abgeleitete Rechenregeln:

Für alle Zahlen a, b ist

- $-(a+b) = -a - b$
- $(a+b) \cdot (a-b) = a^2 - b^2$
- $(a+b)^2 = a^2 + 2a \cdot b + b^2$

Zum Beispiel:
$(a+b)\cdot(a-b) = a\cdot(a-b)+b\cdot(a-b) = a\cdot a-a\cdot b+b\cdot a-b\cdot b = a^2-b^2$

Anwendungen der Rechenregeln:

- Umformen von Gleichungen
- $91^2 - 89^2 = (91 - 89) \cdot (91 + 89) = 2 \cdot 180 = 360$

Funktionen

das Thema der Sekundarstufe 2

beschreiben Zusammenhänge zwischen Mengen

Gegeben durch zwei Mengen (Definitionsbereich D und Wertebereich W) und eine Zuordnungsvorschrift, die jedem Element von D genau ein Element von W zuordnet.

$$f : D \longrightarrow W,\ d \longmapsto f(d)$$

„Familienschreibweise“ $(f(d))_{d \in D}$ statt f auch üblich, darf aber nicht zu $f(d)$ verkürzt werden!!

Funktionen

Beispiele für Funktionen:

- Jeder Ware in einem Kaufhaus wird ihr Preis in Euro zugeordnet.
- Jeder bei einer Umfrage befragten Person wird ihre Lieblingsfarbe zugeordnet.
- Jeder reellen Zahl wird das Dreifache ihres Quadrates zugeordnet.
- Jedem Zeitpunkt wird die Geschwindigkeit (in km/h) eines bestimmten Autos zu diesem Zeitpunkt zugeordnet.

Rechnen mit reellwertigen Funktionen

Für Funktionen f, g von D nach $\mathbb{R}$ sind deren Summe $f + g : D \longrightarrow W$ und deren Produkt $f \cdot g : D \longrightarrow W$ durch

für alle $z \in D$ ist

$$(f+g)(z) := f(z) + g(z) \quad \text{und} \quad (f \cdot g)(z) := f(z) \cdot g(z)$$

definiert.
(Verschiedene Bedeutung von + bzw. $\cdot$ beachten!)

Schreibweisen:
Ist c eine reelle Zahl, schreiben wir c auch für die („konstante“) Funktion von D nach $\mathbb{R}$, die jedem Element von D die Zahl c zuordnet.
Für $f \cdot f$ schreiben wir auch f^2.

Rechnen mit reellwertigen Funktionen

Beispiele:

- Summenregel der Differenzialrechnung: Sind zwei Funktionen f, g von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{R}$ differenzierbar, dann auch ihre Summe $f + g$. Es ist $(f + g)' = f' + g'$.
- Produktregel der Differenzialrechnung: Sind zwei Funktionen f, g von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{R}$ differenzierbar, dann auch ihr Produkt $f \cdot g$. Es ist $(f \cdot g)' = f' \cdot g + f \cdot g'$.
- Ist F eine Stammfunktion einer stetigen Funktion von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{R}$, so ist jede Stammfunktion dieser Funktion die Summe $F + c$ von F und einer konstanten Funktion.
- Die Summe und das Produkt von zwei konvergenten Folgen (Funktionen von $\mathbb{N}$ nach $\mathbb{R}$) sind wieder konvergent.
- Die Summe und das Produkt von zwei stetigen Funktionen ist wieder stetig.

Rechnen mit reellwertigen Funktionen

Beispiele:

- Sind X und Y diskrete reelle Zufallsvariable, dann auch ihre Summe $X + Y$. Der Erwartungswert von $X + Y$ ist die Summe der Erwartungswerte von X und von Y.
- Ist X eine diskrete reelle Zufallsvariable und $E(X)$ ihr Erwartungswert, dann ist ihre Varianz $Var(X)$ als Erwartungswert der Zufallsvariablen $(X - E(X))^2$ definiert. Es ist $Var(X) = E(X^2) - E(X)^2$.
- $sin^2 + cos^2 = 1$
- Die Lösungsmenge der Differenzialgleichung $f'' + f = 0$ ist $\{a \cdot cos + b \cdot sin \mid a, b \in \mathbb{R}\}$.

Rechnen mit reellwertigen Funktionen

Grundlegende Rechenregeln:

Für alle reellwertigen Funktionen f, g, h mit demselben Definitionsbereich ist

- $f + g = g + f$ und $f \cdot g = g \cdot f$
  (Kommutativgesetz)
- $(f + g) + h = f + (g + h)$ und $(f \cdot g) \cdot h = f \cdot (g \cdot h)$
  (Assoziativgesetz, Klammern weglassen)
- $(f + g) \cdot h = (f \cdot h) + (g \cdot h)$
  (Distributivgesetz, ausmultiplizieren und herausheben)
- $f + 0 = f$ und $f \cdot 1 = f$
  (neutrale Elemente)
- $f + (-f) = 0$

Rechenregeln eines „kommutativen Ringes“

Rechnen mit Funktionen

Abgeleitete Rechenregeln:

Für alle Zahlen f, g ist

- $-(f+g) = -f - g$
- $(f+g) \cdot (f-g) = f^2 - g^2$
- $(f+g)^2 = f^2 + 2f \cdot g + g^2$

Zum Beispiel:
$(f+g)\cdot(f-g) = f\cdot(f-g)+g\cdot(f-g) = f\cdot f-f\cdot g+g\cdot f-g\cdot g = f^2-g^2$

Rechnen mit Funktionen

Unterschied zum Rechnen mit Zahlen:

Das Produkt von zwei Funktionen, die beide nicht die Nullfunktion sind, kann die Nullfunktion sein!

Beispiel: f, g von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{R}$ mit $f(z) = |z| + z$ und $g(z) = |z| - z$

$$(f \cdot g)(z) = f(z) \cdot g(z) = (|z| + z) \cdot (|z| - z) = |z|^2 - z^2 = 0$$

Kürzen (durch Funktionen $\neq 0$) ist daher nicht immer erlaubt!

Es gibt daher (im Unterschied zu $\mathbb{Z}$!) keinen „Quotientenkörper“ des Ringes der reellwertigen Funktionen (mit vorgegebenen Definitionsbereich)!

Polynomfunktionen

Identische Funktion

$$x : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\; z \longmapsto z$$

k-te Potenzfunktion (k-faches Produkt von x, $k \in \mathbb{N}$)

$$x^k : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\; z \longmapsto z^k$$

Polynomfunktion

$$\sum_{k=0}^{n} c_k x^k : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\; z \longmapsto \sum_{k=0}^{n} c_k z^k$$

Die identische Funktion x ist differenzierbar ($x' = 1$), dasselbe gilt daher für jede Polynomfunktion.

Polynomfunktionen

Summen und Produkte von Polynomfunktionen sind Polynomfunktionen

Menge aller Polynomfunktionen mit $+$ und $\cdot$ ist kommutativer Ring

Ist das Produkt zweier Polynomfunktionen die Nullfunktion, dann muss einer der Faktoren auch die Nullfunktion sein. Konstruktion des „Quotientenkörpers“ (analog der Konstruktion von $\mathbb{Q}$ aus $\mathbb{Z}$) ist möglich, ergibt „Körper der rationalen Funktionen“

Beispiel: $\frac{x-1}{x^2+2x+3}$ rationale Funktion

Hintereinanderausführung von Funktionen

Für Funktionen f, g von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{R}$ ist deren Hintereinanderausführung $f \circ g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ durch

für alle reelle Zahlen z ist

$$(f \circ g)(z) := f(g(z))$$

definiert.

Vorsicht: $f \circ g \neq g \circ f$ und $f \circ (g + h) \neq (f \circ g) + (f \circ h)$.
Die Menge aller Funktionen von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{R}$ ist kein Ring!

Kettenregel der Differenzialrechnung: Sind die Funktionen f, g von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{R}$ differenzierbar, dann auch deren Hintereinanderausführung $f \circ g$ und

$$(f \circ g)' = (f' \circ g) \cdot g'$$

„Termrechnung“?

Gelten binomische Formeln beim Rechnen mit Termen?

Termrechnung = Rechnen in kommutativen Ringen?

Im Schulunterricht nur zwei Beispiele: Rechnen mit Zahlen und Rechnen mit Funktionen

Matrizenmultiplikation nicht kommutativ,
Vektorprodukt im $\mathbb{R}^3$ nicht kommutativ und nicht assoziativ.

Danke für die Aufmerksamkeit!
http://www.uibk.ac.at/mathematik/personal/pauer/

franz.pauer@uibk.ac.at