Lineare Differenzengleichungen und Polynome

Franz Pauer

Institut für Mathematik, Universität Innsbruck,
Technikerstr. 13/7, A-6020 Innsbruck, Österreich.

Franz.Pauer@uibk.ac.at

Vortrag beim ÖMG-LehrerInnenfortbildungstag
2009 in Wien

17. April 2009

Einleitung

Lehrplan 8. Klasse AHS: „Beschreiben von Systemen mit Hilfe von . . . **Differenzengleichungen** oder Differentialgleichungen"
Lehrplan der Höheren Lehranstalt für **Elektrotechnik, III. Jahrgang**: **Differenzengleichungen**, Zahlenfolgen, . . .

Ziele dieses Vortrags:

- einfache Darstellung der Theorie der linearen Differenzengleichungen (in einer Variablen, mit konstanten Koeffizienten)

- Lösungsverfahren mit Hilfe der Division mit Rest von Polynomen

- Aus Zeitgründen leider **nicht**: Modellierung von interessanten Problemen aus Wirtschaft, Technik und Naturwissenschaften

Inhalt:

Folgen und ihre Darstellung, Rechnen mit Folgen

Lineare Differenzengleichungen: Definition, Beschreibung der Lösungsmenge, Existenz von Lösungen

Beschreibung von Differenzengleichungen mit Hilfe von Polynomen

Lösen von Differenzengleichungen mit Hilfe der Division mit Rest von Polynomen

Bemerkung: $\mathbb{R}$ könnte im weiteren immer durch $\mathbb{C}$ oder $\mathbb{Q}$ ersetzt werden.

Folgen

Eine *Folge* in $\mathbb{R}$ ist eine Funktion von $\mathbb{N}$ nach $\mathbb{R}$.

Darstellung von Folgen:

-

$$f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}\,,\ j \longmapsto f(j)$$

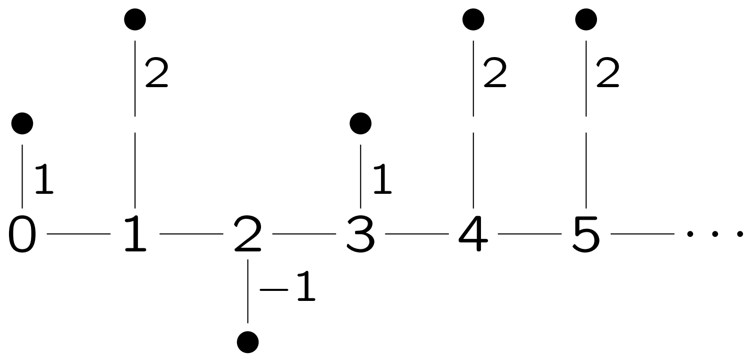
ODER

-

$$(f_0, f_1, f_2, f_3, \ldots) = (f_j)_{j\in\mathbb{N}} = (f(j))_{j\in\mathbb{N}}$$

ODER

-



(Genaue) Beschreibung von Folgen (durch endlich viele Daten)

- Durch Angabe eines Verfahrens, wie für jede Zahl $j \in \mathbb{N}$ das „j-te Folgenglied“ $f(j)$ berechnet werden kann.

  Zum Beispiel:
  Für alle $j \in \mathbb{N}$ sei $f(j) := j^2 - 3j + 2$.
  Oder:
  Für alle $j \in \mathbb{N}$ sei $f(j) := \frac{1}{j!}2^j$.

- Durch Angabe von Bedingungen, die von genau einer Folge f erfüllt werden.

  Zum Beispiel:
  $f(0) = 0$, $f(1) = 1$,
  und für alle $j \in \mathbb{N}$: $f(j+2) = f(j+1) + f(j)$.

Lineare Differenzengleichungen

Eine *lineare Differenzengleichung (der Ordnung n)* ist die folgende Aufgabe:

- Gegeben sind reelle Zahlen $c_0, c_1, \ldots, c_n$ mit $c_n \neq 0$ und eine Folge h in $\mathbb{R}$.

- Gesucht ist eine „gute Beschreibung“ der Menge $L(c_0, \ldots, c_n; h)$ aller Folgen f in $\mathbb{R}$ mit der Eigenschaft:
  für alle $j \in \mathbb{N}$ ist

  $$c_0 \cdot f(j) + c_1 \cdot f(j+1) + \ldots + c_n \cdot f(j+n) = h(j)\ .$$

  Diese Folgen f heißen *Lösungen der Differenzengleichung*.

Wenn $h = 0$ ist, heißt die Differenzengleichung *homogen*.

Interpretation als System von linearen Gleichungen mit „unendlich vielen Unbekannten und unendlich vielen Gleichungen“:

$$\begin{array}{ccccccc}
c_0 \cdot f(0)+ & c_1 \cdot f(1)+ & c_2 \cdot f(2)+ & c_3 \cdot f(3)+ & \ldots = & h(0) \\
 & c_0 \cdot f(1)+ & c_1 \cdot f(2)+ & c_2 \cdot f(3)+ & \ldots = & h(1) \\
 & & c_0 \cdot f(2)+ & c_1 \cdot f(3)+ & \ldots = & h(2) \\
 & & & c_0 \cdot f(3)+ & \ldots = & h(2) \\
 & & & & \ldots = & \ldots
\end{array}$$

In jeder Zeile nur endlich viele Summanden $\neq 0$!
„Unbekannte“: $f(0), f(1), f(2), \ldots$.

Einschub 1:

Rechnen mit Folgen

Sei $\mathcal{F}$ die Menge aller Folgen in $\mathbb{R}$. Für

$f = (f_0, f_1, f_2, \ldots) \in \mathcal{F}, g = (g_0, g_1, g_2, \ldots) \in \mathcal{F}$

und
$b \in \mathbb{R}$ ist

$$f + g := (f_0 + g_0, f_1 + g_1, f_2 + g_2, \ldots)$$

und

$$b \cdot f := (bf_0, bf_1, bf_2, \ldots).$$

Für $+$ und $\cdot$ in $\mathcal{F}$ gelten die Rechenregeln eines Vektorraums, also: **Folgen sind Vektoren**.

Wichtige Beobachtungen

Gegeben seien reelle Zahlen $c_0, c_1, \ldots, c_n$ mit $c_n \neq 0$. Wir betrachten die dadurch gegebene homogene lineare Differenzengleichung.

- Wenn f und g Lösungen dieser Differenzengleichungen sind, dann auch $f + g$.

- Wenn f eine Lösung ist und b eine reelle Zahl, dann ist auch $b \cdot f$ eine Lösung.

Also:
$L(c_0, \ldots, c_n; 0)$ ist ein Untervektorraum von $\mathcal{F}$!
Er kann also durch Angabe (irgend)einer *Basis* „gut beschrieben“ werden.

Gegeben seien reelle Zahlen $c_0, c_1, \ldots, c_n$ mit $c_n \neq 0$ und eine Folge h. Wir betrachten die dadurch gegebene lineare Differenzengleichung.

- Wenn f und g Lösungen dieser Differenzengleichung sind, dann ist $f - g$ eine Lösung der entsprechenden homogenen Differenzengleichung.

- Wenn f (irgend)eine Lösung dieser linearen Differenzengleichung ist, dann erhält man alle Lösungen, indem man beliebige Lösungen der entsprechenden homogenen linearen Differenzengleichung zu f addiert.

Also:
$L(c_0, \ldots, c_n; h)$ kann durch Angabe *(irgend)einer Lösung* f und *(irgend)einer Basis* $g_1, \ldots, g_k$ von $L(c_0, \ldots, c_n; 0)$ beschrieben werden.
Dann ist

$$L(c_0, \ldots, c_n; h) = \{ f + \sum_{i=1}^{k} b_i g_i \mid b_1, \ldots, b_k \in \mathbb{R} \} .$$

Existenz von Lösungen

Es seien $a_0, \ldots, a_{n-1}$ reelle Zahlen („Anfangsbedingungen"). Dann gibt es genau eine Folge f so, dass

- $f(i) = a_i$, $0 \leq i \leq n-1$, und
- $c_0 \cdot f(j) + c_1 \cdot f(j+1) + \ldots + c_n \cdot f(j+n) = h(j)$, $j \in \mathbb{N}$, ist.

Insbesondere:
$L(c_0, \ldots, c_{n-1}; h)$ ist nicht leer und $L(c_0, \ldots, c_n; 0)$ ist ein n-dimensionaler Vektorraum.

Also:
Der Lösungsraum einer linearen Differenzengleichung der Ordnung n ist n-dimensional. Zu vorgegebenen n Anfangsbedingungen gibt es genau eine Lösung einer linearen Differenzengleichungen.

Berechne f induktiv:

- $f(0) = a_0, \ldots, f(n-1) = a_{n-1}$,
- $f(n) = c_n^{-1}(h(0) - c_0 f(0) - c_1 f(1) - \ldots - c_{n-1} f(n-1))$
- $f(n+1) = c_n^{-1}(h(1) - c_0 f(1) - c_1 f(2) - \ldots - c_{n-1} f(n))$
- $f(n+2) = c_n^{-1}(h(2) - c_0 f(2) - c_1 f(3) - \ldots - c_{n-1} f(n+1))$
- $f(n+3) = \ldots$

Beispiel:
$a_0 = 0, a_1 = 1,$
$f(j+2) - f(j+1) - f(j) = 0,\ j \in \mathbb{N}$.

- $f(0) = 0,\ f(1) = 1$
- $f(2) = f(1) + f(0) = 1$
- $f(3) = f(2) + f(1) = 2$
- $f(4) = f(3) + f(2) = 3$
- $f(5) = f(4) + f(3) = 5$
- $\ldots$

Diese Folge heißt *Folge der Fibonacci-Zahlen*.

„Shifts“

Sei f eine Folge in $\mathbb{R}$.
Für $\ell \in \mathbb{N}$ sei $s^\ell * f$ die Folge in $\mathbb{R}$ mit

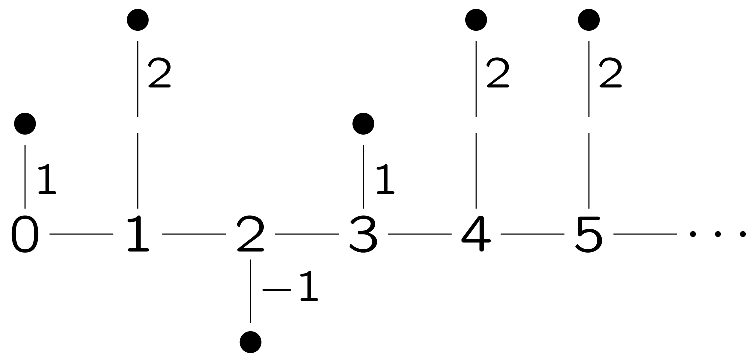
$$\text{für alle } j \in \mathbb{N} \text{ ist } (s^\ell * f)(j) := f(j+\ell)$$

Beispiel:

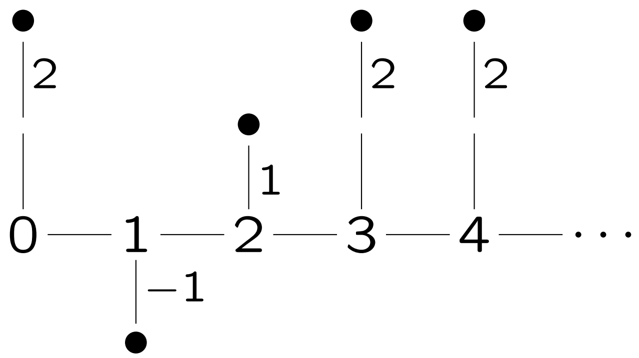
$$\begin{aligned}
f &= (1, 2, -1, 1, 2, 2, \ldots) \\
s * f &= (2, -1, 1, 2, 2, \ldots) \\
s^2 * f &= (-1, 1, 2, 2, \ldots) \\
s^3 * f &= (1, 2, 2, \ldots)
\end{aligned}$$

Beispiel:

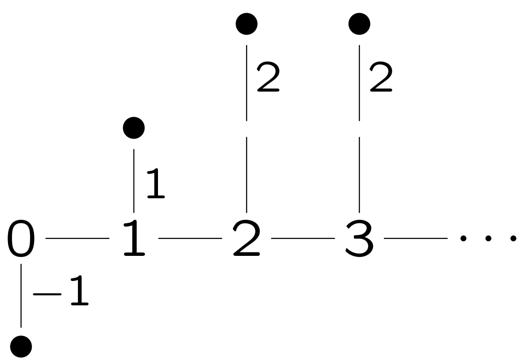
f



$s * f$



$s^2 * f$



Einschub 2:

Polynomfunktionen, Polynome

Seien $n \in \mathbb{N}$ und $c_0, c_1, \ldots, c_n \in \mathbb{R}$.
Dann ist die Funktion

$$p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\,,$$

$$z \mapsto c_0 + c_1 z + c_2 z^2 + \cdots + c_n z^n = \sum_{i=0}^{n} c_i z^i\,,$$

eine *Polynomfunktion* von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{R}$.

Die Zahlen $c_0, \ldots, c_n$ sind die *Koeffizienten von* p.
Wenn $c_n \neq 0$ ist:
$grad(p) := n$ ist der *Grad* von f und
$lk(p) := c_n$ der *Leitkoeffizient* von p.

Wir schreiben für p im weiteren

$$c_0 + c_1 s + c_2 s^2 + \ldots + c_n s^n \text{ oder } \sum_{i=0}^{n} c_i s^i$$

und sprechen dann von einem *Polynom in der Variablen s mit Koeffizienten in* $\mathbb{R}$. Für die Menge dieser Polynome schreiben wir dann $\mathbb{R}[s]$.

Für die Addition

$$\sum_{i=0}^{n} c_i s^i + \sum_{i=0}^{n} d_i s^i := \sum_{i=0}^{n} (c_i + d_i) s^i$$

und die Multiplikation

$$(\sum_{i=0}^{n} c_i s^i) \cdot (\sum_{i=0}^{n} d_i s^i) := \sum_{i=0}^{2n} (\sum_{j=0}^{i} c_j \cdot d_{i-j}) s^i$$

gelten die gleichen Rechenregeln wie für die Addition und Multiplikation von ganzen Zahlen.

Beschreibung von Differenzengleichungen durch Polynome

Für $p := \sum_{i=0}^{n} c_i s^i$ und $f \in \mathcal{F}$ sei

$$p * f := \sum_{i=0}^{n} c_i (s^i * f) \in \mathcal{F}\,.$$

Also: für alle $j \in \mathbb{N}$ ist

$$(p * f)(j) = \sum_{i=0}^{n} c_i f(j+i)\,.$$

Sprechweise: *„die durch p und h gegebene lineare Differenzengleichung“ bedeutet*
„die durch $c_0, c_1, \ldots, c_n$ und h gegebene lineare Differenzengleichung“.
Statt $L(c_0, c_1, \ldots, c_n; h)$ schreiben wir dann einfach $L(p; h)$. Es ist

$$L(p; h) = \{ f \in \mathcal{F} \mid p * f = h \}\,.$$

Beispiel: Die durch $s^2 - s - 1$ gegebene Differenzengleichung ist die homogene Differenzengleichung, die durch $2, -1, -1$ gegeben ist.

Noch einmal: Wichtige Beobachtungen

- Für Polynome $p, q \in \mathbb{R}[s]$, eine reelle Zahl b und eine Folge f ist

$$(bp + q) * f = b(p * f) + q * f$$

und

$$(pq) * f = p * (q * f) = q * (p * f) \; .$$

- Seien $p, q \in \mathbb{R}[s]$ und $f \in \mathcal{F}$. Wenn $p * f = 0$ ist, dann ist auch $p * (q * f) = 0$.

  „$L(p; 0)$ ist nicht nur ein $\mathbb{R}$-Vektorraum, sondern sogar ein $\mathbb{R}[s]$-Modul“.

Einschub 3:

Division mit Rest von Polynomen

Satz: Zu je zwei Polynomen q und p mit $p \neq 0$ gibt es eindeutig bestimmte Polynome m und r mit den Eigenschaften

$q = m \cdot p + r$ und $[r = 0$ oder $grad(r) < grad(p)]$.

m ... polynomialer Quotient von q und p
r ... Rest von q nach Division durch p

Divisionsalgorithmus (Berechnung von m und r):

- Setze $m := 0$ und $r := q$.

- Solange $r \neq 0$ und $grad(r) \geq grad(p)$ ist, ersetze r durch $r - t \cdot p$ und m durch $m + t$, wobei

  $t := lk(r) \cdot lk(p)^{-1} \cdot s^{grad(r)-grad(p)}$ ist.

Beispiel: Seien

$$q := s^4+2s^3-2s^2+s-1 \qquad \text{und} \qquad p := s^2-2\,.$$

Wir berechnen mit dem oben angegebenen Verfahren Polynome m und r mit
$q = m \cdot p + r$ und
($r = 0$ oder $grad(r) < grad(b) = 2$).
Dabei beginnen wir mit $r := q$ und schreiben die Zwischenrechnungen platzsparend untereinander.

$$\begin{array}{cccccl}
\mathbf{s^4} & +2s^3 & -2s^2 & +s & -1 & = (s^2+2s)p + r \\
-s^4 & & +2s^2 & & & \\
\hline
& \mathbf{+2s^3} & & +s & -1 & \\
& -2s^3 & & +4s & & \\
\cline{2-5}
& & & \mathbf{+5s} & -1 & \qquad =: r
\end{array}$$

Also ist $m = s^2 + 2s$ und $r = 5s - 1$.

Lösen von Differenzengleichungen mit Hilfe der Division mit Rest

Seien $p = \sum_{i=0}^{n} c_i s^i \in \mathbb{R}[s]$, $c_n \neq 0$, $h \in \mathcal{F}$ und $a_0, \ldots, a_{n-1} \in \mathbb{R}$.
Sei $f \in L(p; h)$ die Lösung mit Anfangswerten $f(j) = a_j$, $0 \leq j \leq n-1$.

Für $\ell \geq n$ kann $f(\ell)$ wie folgt berechnet werden:

- Dividiere s^ℓ mit Rest durch p :
  $s^\ell = m_\ell \cdot p + r_\ell$ und
  ($r_\ell = 0$ oder $grad(r_\ell) < n$).
  Sei $r_{\ell j}$ der Koeffizient von r_ℓ bei s^j, also
  $$r_\ell = \sum_{j=0}^{n-1} r_{\ell j} s^j \ .$$

- Dann ist
  $$f(\ell) = (m_\ell * h)(0) + \sum_{j=0}^{n-1} r_{\ell j} a_j \ .$$

Denn:

$$f(\ell) = (s^\ell * f)(0) =$$

$$= ((m_\ell \cdot p + r_\ell) * f)(0) =$$

$$= (m_\ell * (p * f))(0) + (r_\ell * f)(0) =$$

$$= (m_\ell * h)(0) + \sum_{j=0}^{n-1} r_{\ell j} a_j .$$

Beispiel:

Sei f die Fibonacci-Folge. Der Rest von s^{100} nach Division durch $s^2 - s - 1$ ist
(Berechnung in Maple mit $rem(s^{100}, s^2 - s - 1, s)$)

$$354224848179261915075 s +$$

$$+ 218922995834555169026 \,,$$

wegen $f(0) = 0$ und $f(1) = 1$ ist

$$f(100) = 354224848179261915075 \,.$$

Beispiel: Lineare Differenzengleichungen 1. Ordnung

Seien $a, c \in \mathbb{R}$ reelle Zahlen und $h \in \mathcal{F}$. Berechne die Folge f mit

$$(s - c) * f = h \qquad \text{und} \qquad f(0) = a\,!$$

Anders formuliert: Für alle $\ell \in \mathbb{N}$ sei

$$f(\ell + 1) - c \cdot f(\ell) = h(\ell) \quad \text{und} \quad f(0) = a\,.$$

Division mit Rest von s^ℓ durch $s - c$ ergibt

$$s^\ell = m_\ell \cdot (s - c) + r \qquad \text{und} \qquad r \in \mathbb{R}\,.$$

Daraus folgt

$$c^\ell = 0 + r$$

und

$$m_\ell = \frac{s^\ell - c^\ell}{s - c} = \sum_{j=0}^{\ell-1} c^j \cdot s^{\ell-1-j}\,,$$

also ist für alle $\ell \in \mathbb{N}$

$$f(\ell) = \sum_{j=0}^{\ell-1} c^j \cdot h(\ell - 1 - j) + c^\ell \cdot a\,.$$

Beispiel: Homogene lineare Differenzengleichungen 2. Ordnung

Sei $p := s^2 + c_1 s + c_0 \in \mathbb{R}[s]$, $c_0 \neq 0$ und seien x_1, x_2 die Nullstellen von p.
Dann ist $(x_i^\ell)_{\ell\in\mathbb{N}}$ die Lösung der durch $s - x_i$ gegebenen homogenen linearen Differenzengleichung mit Anfangswert 1.

Wegen

$$p * f = ((s - x_1)(s - x_2)) * f =$$

$$= (s-x_1)*((s-x_2))*f) = (s-x_2)*((s-x_2))*f)$$

sind $(x_i^\ell)_{\ell\in\mathbb{N}}$ Lösungen der durch p gegebenen homogenen Differenzengleichung, also auch alle Linearkombinationen davon.

Fall 1: $x_1 \neq x_2$. Dann sind $(x_1^\ell)_{\ell\in\mathbb{N}}$ und $(x_2^\ell)_{\ell\in\mathbb{N}}$ linear unabhängig, bilden also eine Basis von $L(p; 0)$.

Fall 2: $x_1 = x_2$. Dann bilden $(x_1^\ell)_{\ell\in\mathbb{N}}$ und $(\ell x_1^\ell)_{\ell\in\mathbb{N}}$ eine Basis von $L(p; 0)$.

Beispiel: Die „Formel von Binet“

Die Fibonacci-Folge f ist die Lösung der durch $p := s^2 - s - 1$ und $f(0) = 0$, $f(1) = 1$ gegebenen Differenzengleichung.

Die Nullstellen von p sind

$$x_1 := \tfrac{1+\sqrt{5}}{2} \text{ und } x_2 := \tfrac{1-\sqrt{5}}{2},$$

also ist

$$f = u \cdot (x_1^\ell)_{\ell \in \mathbb{N}} + v \cdot (x_2^\ell)_{\ell \in \mathbb{N}}\,,$$

mit $u, v \in \mathbb{R}$ so, dass $0 = f(0) = u + v$ und $1 = f(1) = u \cdot x_1 + v \cdot x_2$ ist.
Man berechnet leicht: $u = \frac{1}{\sqrt{5}}$ und $v = -\frac{1}{\sqrt{5}}$.

Das ℓ-te Glied $f(\ell)$ der Fibonacci-Folge ist somit

$$\frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^\ell - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^\ell\right].$$