Was sind Vektoren? Wozu braucht man sie?

Franz Pauer

Institut für Mathematik, Universität Innsbruck,
Technikerstr. 25, A-6020 Innsbruck, Österreich.
Franz.Pauer@uibk.ac.at

Didaktikheft der Österreichischen Mathematischen Gesellschaft
Nr. 38, 2006, pp. 87-98

1 Einleitung

Dieser Beitrag ist die schriftliche Ausarbeitung meines Vortrags beim Lehrerfortbildungstag am 1. April 2005 in Wien. „Vektorrechnung“ ist im Alltagsleben, in der Technik, den Naturwissenschaften und in der Mathematik von großer Bedeutung. Punkte, n-Tupel von Zahlen, Pfeile, Translationen, Funktionen, Kräfte, ... werden als Vektoren betrachtet, wenn man sie addieren und mit Zahlen multiplizieren will. Es werden unter anderen die folgenden Fragen erörtert: Was haben Vektoren mit Systemen linearer Gleichungen zu tun? (Oder: Wie kann die Lösungsmenge eines solchen Systems durch endlich viele Daten beschrieben werden?) Wie rechnet man mit Punkten? Was ist der Informationsgehalt eines Pfeils? Warum ist die „Addition“ von Punkt und Pfeil keine Addition? Ist eine Gerade in der Ebene eine Menge von Punkten oder eine Menge von Pfeilen? Was sind „gerichtete Größen“?

2 Rechnen im Kaufhaus

Jeder Kaufmann rechnet mit *Vektoren*. Bietet er n Waren an, kann er den Umsatz eines Tages (nach Wahl einer Reihenfolge der Waren und einer Mengeneinheit für jede Ware) durch ein n-Tupel von (rationalen oder reellen) Zahlen beschreiben. Die i-te Komponente dieses n-Tupels gibt an, wieviele Einheiten der i-ten Ware verkauft wurden. Zur Berechnung des Wochenumsatzes werden die den Tagesumsätzen (Montag bis Samstag) entsprechenden n-Tupel „addiert“, zur Berechnung des durchschnittlichen Tagesumsatzes wird der Wochenumsatz mit der Zahl $\frac{1}{6}$ „multipliziert“. Sind $a := (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ und $b := (b_1, b_2, \ldots, b_n)$ zwei n-Tupel, dann ist ihre *Summe* $a + b$ durch

$$a + b := (a_1 + b_1, a_2 + b_2, \ldots, a_n + b_n)$$

definiert.

	Mehl	Salz	Zucker	Milch	⋯⋯
Montag	7	5	6	8	
Dienstag	3	5	7	9	
Mittwoch	9	5	2	4	
Donnerstag	2	6	2	7	
Freitag	3	8	3	7	
Samstag	3	7	4	4	
Woche	27	36	24	39	⋯⋯
Mittelwert	4,5	6	4	6,5	⋯⋯

Diese Rechenoperation erfüllt die gleichen Rechenregeln wie die Addition von Zahlen:

- Für alle n-Tupel a, b, c ist $(a + b) + c = a + (b + c)$ (Assoziativgesetz).
- Es gibt ein n-Tupel 0 mit der Eigenschaft $0 + a = a + 0 = a$ (und zwar ist $0 := (0, 0, \ldots, 0)$).
- Zu jedem n-Tupel a gibt es ein n-Tupel $-a$ mit der Eigenschaft $a + (-a) = (-a) + a = 0$ (und zwar ist $-a := (-a_1, -a_2, \ldots, -a_n)$).
- Für alle n-Tupel a, b ist $a + b = b + a$ (Kommutativgesetz).

Daher werden die Zuordnung von (a, b) auf $a + b$ *Addition* und das n-Tupel $a + b$ die *Summe* von a und b genannt.

Ist t eine Zahl und a ein n-Tupel von Zahlen, dann ist das „t-fache von a“ oder „t mal a“ durch

$$t \cdot a := (t \cdot a_1, t \cdot a_2, \ldots, t \cdot a_n)$$

definiert. Dabei gilt für alle Zahlen s, t und alle n-Tupel a, b

- $1 \cdot a = a$
- $(st) \cdot a = s \cdot (t \cdot a)$
- $(s + t) \cdot a = (s \cdot a) + (t \cdot a)$

- $s \cdot (a + b) = (s \cdot a) + (s \cdot b)$

Wir nennen n-Tupel *Vektoren*, weil n-Tupel miteinander addiert und mit Zahlen multipliziert werden können und dabei die oben angegebenen *Rechenregeln für Vektoren* gelten.

Allgemein heißt eine Menge zusammen mit einer Addition und mit einer Multiplikation mit (rationalen oder reellen) Zahlen *Vektorraum*, wenn die oben angeführten Rechenregeln gelten. Die Elemente eines Vektorraums heißen *Vektoren*.

Die Eigenschaften von Vektoren können kurz so beschrieben werden: Vektoren können miteinander addiert und mit Zahlen multipliziert werden. Dabei gelten die „üblichen" Rechenregeln. Man beachte, dass ein Element für sich allein kein Vektor sein kann (wenn wir vom trivialen Fall des Nullraums $\{0\}$ absehen). Wenn man den allgemeinen Begriff „Vektor" einführen möchte, muss man also auch den Begriff „Vektorraum" erklären. (Analog wird man das Wort „Tiroler" am einfachsten als „Bewohner Tirols" erläutern und dazu sagen, was das Wort „Tirol" bedeutet).

Multipliziert man Vektoren $v_1, v_2, \ldots, v_\ell$ mit Zahlen $t_1, t_2, \ldots, t_\ell$ und addiert die so entstandenen Vektoren, dann heißt dieser Vektor

$$t_1 \cdot v_1 + t_2 \cdot v_2 + \ldots + t_\ell \cdot v_\ell$$

eine *Linearkombination* von $v_1, v_2, \ldots, v_\ell$ und die Zahlen $t_1, t_2, \ldots, t_\ell$ heißen *Koeffizienten* der Linearkombination.

3 Systeme linearer Gleichungen

Eine *lineare Gleichung* in n Unbekannten ist die folgende Aufgabe: Gegeben sind Zahlen $a_1, a_2, \ldots, a_n$ und b. Gesucht sind alle n-Tupel von Zahlen $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ mit der Eigenschaft

$$a_1 \cdot x_1 + a_2 \cdot x_2 + \ldots + a_n \cdot x_n = b\ .$$

Solche n-Tupel heißen *Lösungen* der Gleichung. Die Menge aller Lösungen ist die *Lösungsmenge* der Gleichung. Dieselbe Aufgabe mit 0 statt b ist die *zugehörige homogene Gleichung*.

Zum Beispiel ist die Aufgabe, alle Tripel von Zahlen, deren Summe 1 ist, zu finden, eine lineare Gleichung. Die zugehörige homogene Gleichung ist die Aufgabe, alle Tripel von Zahlen, deren Summe 0 ist, zu finden.

Man sieht leicht, dass eine lineare Gleichung (in mindestens zwei Unbekannten) beliebig viele Lösungen hat. Die Lösungsmenge ist also nicht endlich - wie kann sie dann beschrieben werden?

Die folgenden drei Beobachtungen sind einfach zu überprüfen, aber wichtig:

1. Kennt man (irgend)eine Lösung der Gleichung, dann erhält man alle Lösungen, indem man zu dieser alle Lösungen der zugehörigen homogenen Gleichung addiert.

2. Ist z eine Lösung einer homogenen linearen Gleichung und ist t eine Zahl, dann ist auch $t \cdot z$ eine Lösung.

3. Die Summe von zwei Lösungen einer homogenen linearen Gleichung ist wieder eine Lösung.

Aus 2. und 3. folgt, dass die Lösungsmenge einer homogenen linearen Gleichung ein Vektorraum ist. Ein Vektorraum kann durch eine *Basis* gut beschrieben werden.

Elemente $v_1, v_2, \ldots, v_\ell$ eines Vektorraums bilden eine *Basis*, wenn alle Elemente dieses Vektorraums in eindeutiger Weise als Linearkombination von $v_1, v_2, \ldots, v_\ell$ geschrieben werden können. Die Koeffizienten $t_1, t_2, \ldots, t_\ell$ einer Linearkombination $w := t_1 \cdot v_1 + t_2 \cdot v_2 + \ldots + t_\ell \cdot v_\ell$ heißen dann *Koordinaten* von w bezüglich der Basis $v_1, v_2, \ldots, v_\ell$. Ein Vektorraum hat viele Basen, aber die Anzahl der Vektoren in jeder Basis ist gleich und heißt *Dimension* des Vektorraums.

Wenn $a_1 \neq 0$ ist, dann ist zum Beispiel

$$(a_2, -a_1, 0, \ldots, 0), (a_3, 0, -a_1, 0, \ldots, 0), \ldots, (a_n, 0, \ldots, 0, -a_1)$$

eine Basis der Lösungsmenge der homogenen Gleichung

$$a_1 \cdot x_1 + a_2 \cdot x_2 + \ldots + a_n \cdot x_n = 0 \; .$$

Die Lösungsmenge dieser Gleichung ist also ein $n-1$-dimensionaler Vektorraum und gleich

$$\{t_1 \cdot (a_2, -a_1, 0, \ldots, 0) + t_2 \cdot (a_3, 0, -a_1, 0, \ldots, 0) + \ldots$$
$$\ldots + t_{n-1} \cdot (a_n, 0, \ldots, 0, -a_1) \,|\, t_1, t_2, \ldots, t_{n-1} \text{ Zahlen } \} \; .$$

Die Lösungsmenge der Gleichung

$$a_1 \cdot x_1 + a_2 \cdot x_2 + \ldots + a_n \cdot x_n = b$$

ist dann

$$\{(\frac{b}{a_1}, 0, \ldots, 0) + t_1 \cdot (a_2, -a_1, 0, \ldots, 0) + t_2 \cdot (a_3, 0, -a_1, 0, \ldots, 0) + \ldots$$
$$\ldots + t_{n-1} \cdot (a_n, 0, \ldots, 0, -a_1) \,|\, t_1, t_2, \ldots, t_{n-1} \text{ Zahlen } \} \; .$$

4 Rechnen mit Funktionen

Für die Analysis ist die Verallgemeinerung des Rechnens mit n-Tupeln auf das Rechnen mit reellwertigen Funktionen von großer Bedeutung.

Schreibt man Funktionen $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ und $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ als Familien $(f(z))_{z\in\mathbb{R}}$ und $(g(z))_{z\in\mathbb{R}}$ und addiert „komponentenweise“ bzw. multipliziert „komponentenweise“ mit einer Zahl $t \in \mathbb{R}$, dann erhält man

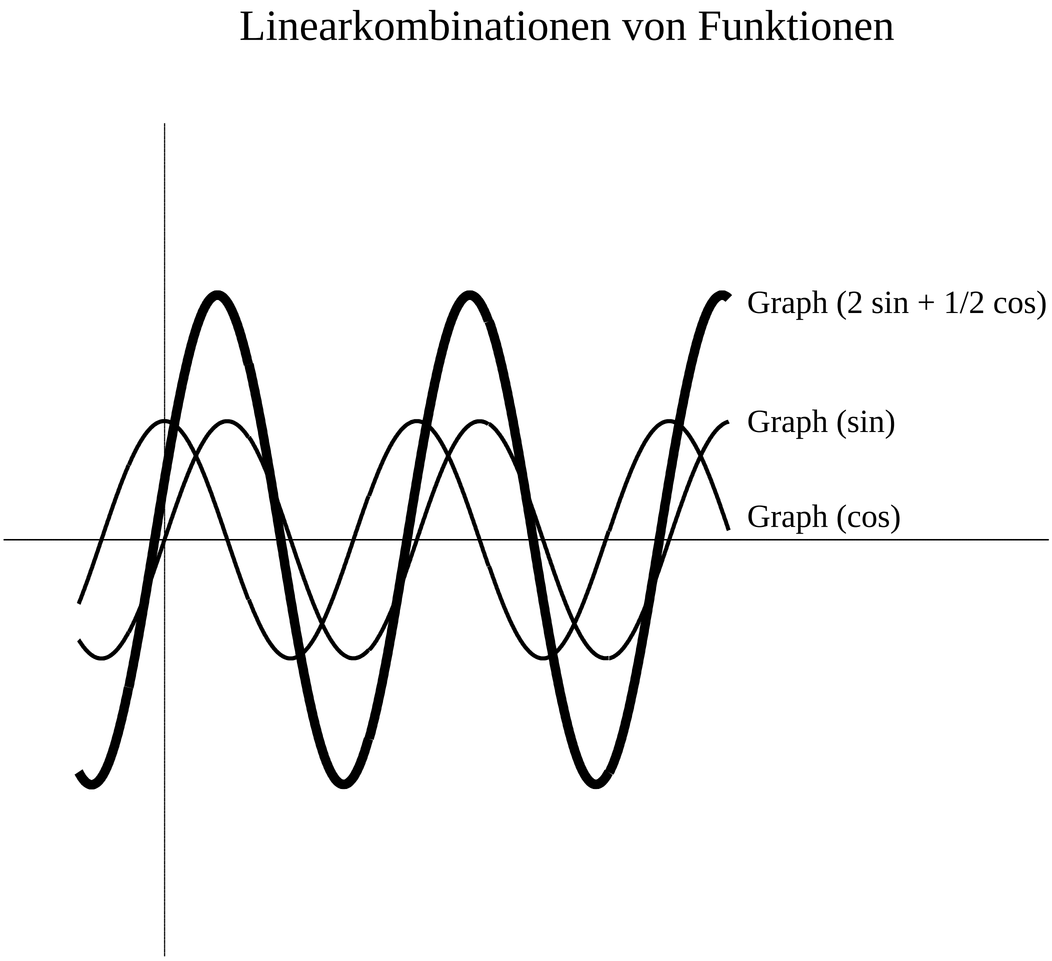
$$f + g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$\text{mit} \quad (f+g)(x) := f(x) + g(x) \text{ für alle } x \in \mathbb{R}$$

bzw.

$$t \cdot f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$\text{mit} \quad (t \cdot f)(x) := t \cdot f(x) \text{ für alle } x \in \mathbb{R}.$$



Man prüft leicht nach, dass alle Rechenregeln eines Vektorraums gelten. Die Menge aller Funktionen von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{R}$ ist daher ein Vektorraum, also sind auch reellwertige Funktionen Vektoren. Dieser Vektorraum ist „unendlichdimensional“, das heißt: er enthält keine endliche Basis.

5 Rechnen mit Punkten

Wir nehmen an, wir haben ein „beliebig großes“ Zeichenblatt E und die folgenden Zeichengeräte:

- einen „beliebig fein gespitzten“ Bleistift,
- ein „beliebig langes“ Lineal und
- ein Dreieck.

Wir betrachten das Zeichenblatt als Menge von „Punkten“ und wählen einen davon aus. Diesen ausgewählten Punkt nennen wir *Nullpunkt* und bezeichnen ihn mit $0 \in E$.

Wir nehmen an, dass mit Lineal und Bleistift durch je zwei Punkte eine „Gerade“ gezeichnet werden kann und dass mit Lineal, Dreieck und Bleistift jede Gerade in jeden Punkt „parallelverschoben“ werden kann.

Je zwei Punkten $A, B \in E$ können wir wie folgt einen dritten Punkt, den wir mit $A + B$ bezeichnen, zuordnen:

- Falls $0,\ A$ und B nicht auf einer Geraden liegen: Zeichne eine Gerade durch 0 und B und verschiebe sie in den Punkt A. Zeichne eine Gerade durch 0 und A und verschiebe sie in den Punkt B. Dann sei $A+B$ der „Schnittpunkt“ dieser zwei Geraden.
- Falls $0,\ A$ und B auf einer Geraden liegen: Wähle einen Punkt $C \in E$, der nicht auf dieser Geraden liegt. Konstruiere wie oben die Punkte $B + C$ und $A+(B+C)$. Verschiebe die Gerade durch 0 und C in den Punkt $A+(B+C)$. Dann sei $A + B$ der „Schnittpunkt“ dieser Geraden mit der Geraden durch 0 und A.

Wir nehmen nun zusätzlich an, dass das Lineal mit einer Skala versehen ist, aus der jede reelle Zahl abgelesen werden kann.

Dann kann jeder reellen Zahl c und jedem Punkt $A \in E$ ein weiterer Punkt, den wir mit $c \cdot A$ bezeichnen, wie folgt zugeordnet werden:

- Zeichne mit dem Lineal eine Gerade durch 0, die den Punkt A nicht enthält.

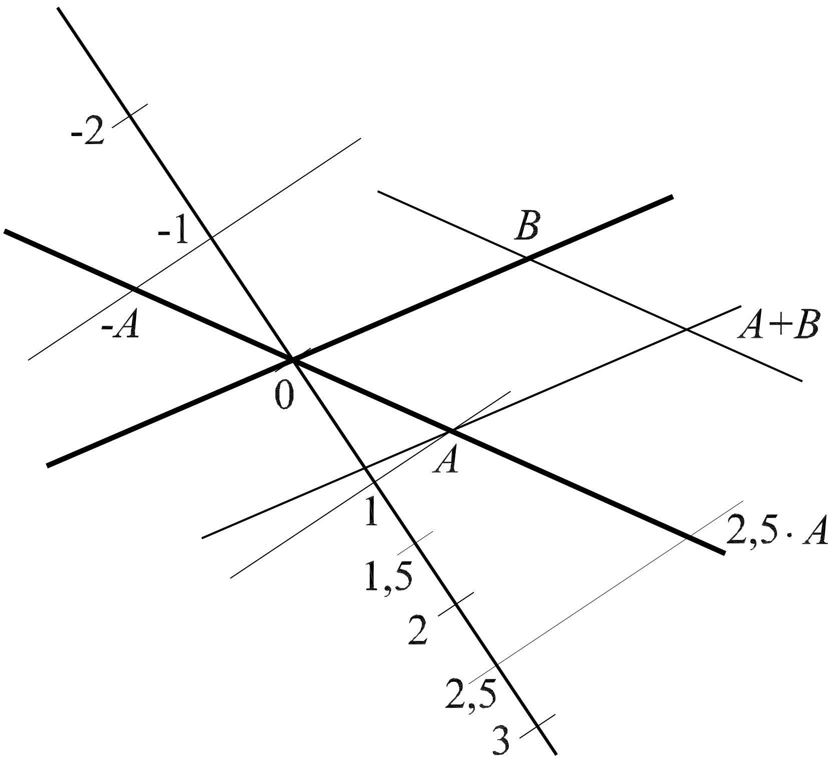
- Lege das Lineal so, dass die Zahl 0 über dem Punkt 0 liegt und zeichne dann die Punkte P bzw. Q, über denen die Zahlen 1 bzw. c liegen, auf dieser Geraden ein.

- Verschiebe die Gerade durch A und P in den Punkt Q.

- Dann sei $c \cdot A$ der „Schnittpunkt“ dieser Geraden mit der Geraden durch 0 und A.

Wir nehmen an, dass die so definierten „Rechenoperationen“ $+$ („Addition von Punkten“) und $\cdot$ („Skalarmultiplikation von reellen Zahlen mit Punkten“) die Rechenregeln eines Vektorraums erfüllen. Dann ist die Zeichenebene E ein Vektorraum und ihre Punkte sind Vektoren.

Rechnen mit Punkten



Wenn die Punkte 0, A und B nicht auf einer Geraden liegen, dann bilden die Punkte A, B eine $\mathbb{R}$-Basis des Vektorraums E. Jeder Punkt wird dann eindeutig durch das Paar seiner Koordinaten bezüglich dieser Basis beschrieben, etwa A durch $(1, 0)$, B durch $(0, 1)$ und $2 \cdot A + 3 \cdot B$ durch $(2, 3)$. Die Addition von Punkten entspricht dann der komponentenweisen Addition von Zahlenpaaren, die Multiplikation einer Zahl mit einem Punkt der komponentenweisen Multiplikation einer Zahl mit einem Zahlenpaar. Hat man also in der Zeichenebene einen Nullpunkt und eine Basis (oder, dazu äquivalent, zwei Koordinatenachsen) gewählt, dann kann man die Zeichenebene und $\mathbb{R}^2$ als gleich auffassen.

Analog kann der Anschauungsraum nach Wahl eines Nullpunktes 0 in natürlicher Weise als Vektorraum betrachtet werden. Wir nehmen dazu an, dass drei Punkte $0, A, B$ jeweils in einer „Ebene" liegen und definieren dann $A + B$ und $c \cdot A$ wie oben.

6 Pfeile und Translationen

Sei im folgenden V die Zeichenebene oder der Anschauungsraum, die oder den wir nach Wahl eines Nullpunkts 0 als Vektorraum betrachten. Sei $v \in V$. Dann heißt die Abbildung

$$t_v : V \longrightarrow V \,,\ x \longmapsto x + v \,,$$

Translation oder *Verschiebung um* v in V. Es ist $v = t_v(0)$. Sei

$$T(V) := \{t_v \mid v \in V\}$$

die Menge aller Translationen in V. Die Hintereinanderausführung zweier Translationen ist wieder eine Translation, für $v, w \in V$ ist

$$t_v \circ t_w = t_{v+w} = t_w \circ t_v \,.$$

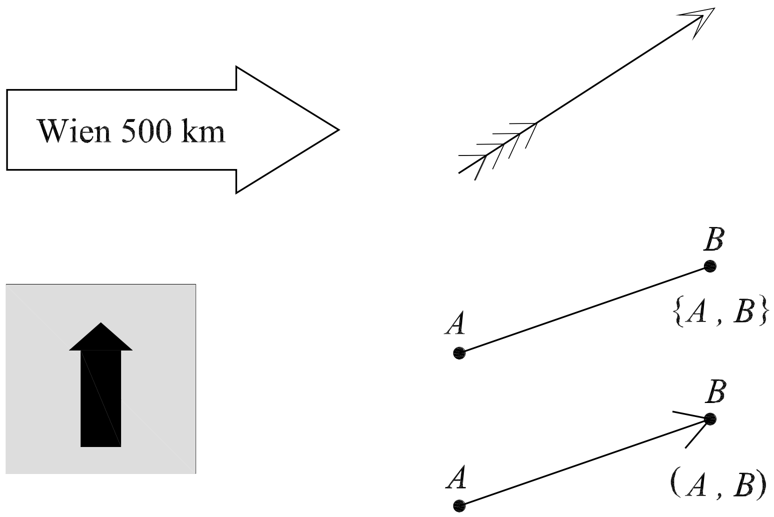
Mit der Hintereinanderausführung als Addition und mit

$$c \cdot t_v := t_{cv}$$

für Zahlen c und Translationen t_v ist $T(V)$ ein Vektorraum („Translationen sind Vektoren").

In der Umgangssprache verwenden wir das Wort *Pfeil* für verschiedene Objekte: Wegweiser, Verkehrszeichen, Pfeile zum Bogenschießen usw. Hier bezeichnen wir ein Paar $(A, B) \in V \times V$ von Punkten in V als *Pfeil in* V *mit Anfangspunkt* A *und Endpunkt* B.

Pfeile



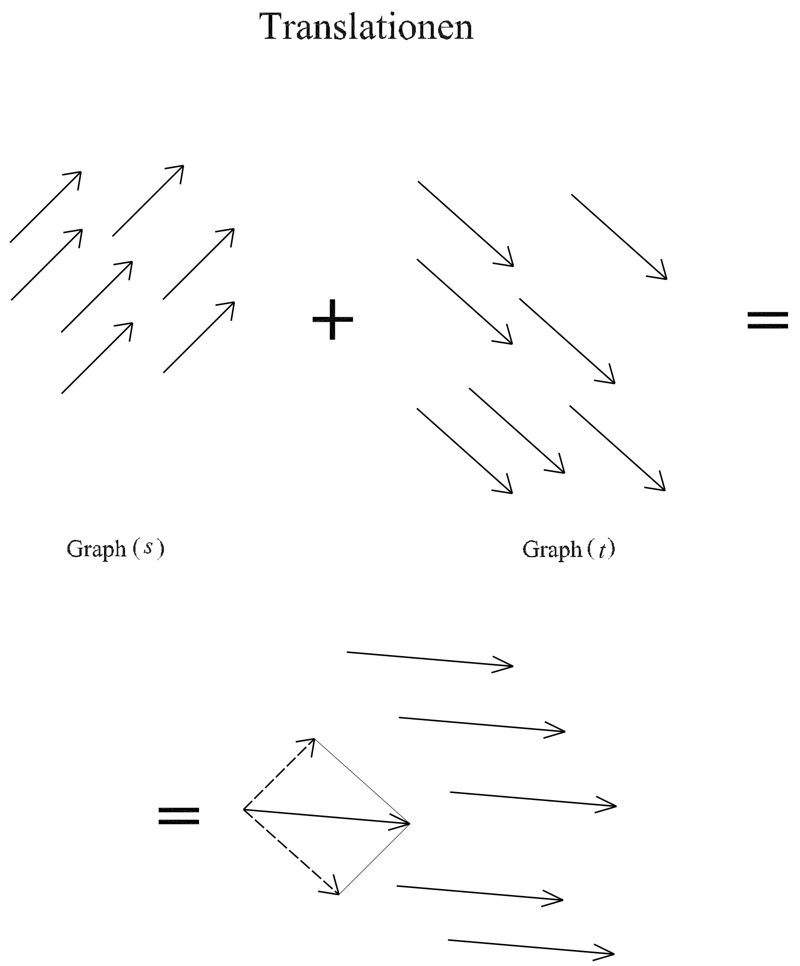
Ein Pfeil enthält mehr Information als eine Menge von zwei Punkten (die durch eine Strecke, die diese Punkte verbindet, dargestellt werden kann). Die „Zusatzinformation“ ist die Reihenfolge der Punkte: es gibt einen ersten und einen zweiten Punkt (an der Spitze des Pfeils).

Sei $B \in V$. Der Graph der Translation t_B ist die Menge

$$\{(A, A+B) \mid A \in V\} \subseteq V \times V\,,$$

also eine Menge von Pfeilen in V. Für je zwei Pfeile (P, P'), (Q, Q') im Graphen einer Translation gilt: $P' - P = Q' - Q$.

Da Funktionen durch ihren Graphen eindeutig bestimmt sind, kann man eine Translation auch als eine „Menge aller Pfeile in V, die gleich lang, parallel und gleich orientiert sind“, definieren (siehe z.B. Reichel, H., Müller, R.: Lehrbuch der Mathematik, 5. Klasse, 5. Auflage, öbv/hpt Verlag, Wien 2002). Zwei solche Mengen addieren bedeutet dann, die entsprechenden Translationen hintereinander auszuführen ($Graph(s) + Graph(t) := Graph(s \circ t) = Graph(t \circ s)$).



7 Ist die „Punkt-Pfeil-Addition“ eine Addition?

Zu je zwei Punkten $A, B \in V$ gibt es genau eine Translation t mit $t(A) = B$. Diese Translation wird oft mit $\vec{AB}$ bezeichnet. Wegen $B = A + (B - A)$ ist $\vec{AB} = t_{B-A}$, die Translation, die 0 auf $B - A$ abbildet.

Sei C ein Punkt in V. Manchmal wird $C + t$ statt $t(C)$ geschrieben und das Anwenden von t auf C als „Addition des Punktes C und des Pfeiles $\vec{AB}$“ bezeichnet. Die triviale Aussage „Wendet man die Translation, die den Punkt A in den Punkt B überführt, auf A an, dann erhält man B“ wird dann zur „Rechenregel“ $A + \vec{AB} = B$.

Da eine Addition üblicherweise je zwei Elementen einer Menge ein drittes zuordnet (etwa zwei Zahlen eine dritte, zwei n-Tupeln ein drittes, …) und gewisse

Rechenregeln (wie z.B. das Kommutativgesetz) erfüllt, halte ich die Verwendung der Bezeichnung „Addition“ für das Anwenden einer Translation auf einen Punkt für ungünstig.

Dem Verwenden von „Punkten“ und „Vektoren“ bzw. „Pfeilen“ in der Geometrie der Zeichenebene und des Anschauungsraums liegt aber ein sinnvolles mathematisches Konzept zugrunde, das des *affinen Raums*. Sei W ein Vektorraum, U eine Menge und

$$W \times U \to U\,,\ (w,u) \mapsto w \cdot u\,,$$

eine Abbildung mit den Eigenschaften: Für alle $u \in U$, $v, w \in W$ ist $0 \cdot u = u$ und $(v + w) \cdot u = v \cdot (w \cdot u)$.

U zusammen mit dieser Abbildung ist ein *affiner Raum über* W, wenn es für alle Elemente $y, z \in U$ genau einen Vektor $w \in W$ mit $w \cdot y = z$ gibt. Die Elemente von U heißen dann *Punkte*, die Elemente von W *Vektoren* des affinen Raums.

Sei V die Zeichenebene oder der Anschauungsraum und $T(V)$ der Vektorraum der Translationen von V. Wir verzichten dabei auf die Wahl eines Nullpunktes in V, also können wir Punkte (die Elemente von V) nicht mehr miteinander addieren und auch nicht mit Zahlen multiplizieren. Die Translationen werden nicht wie oben über die Addition von Punkten definiert, sondern als vorgegeben betrachtet, ebenso die Struktur von $T(V)$ als Vektorraum. Dann ist V mit

$$T(V) \times V \longrightarrow V\,,\ (t,x) \longmapsto t(x)\,,$$

ein affiner Raum über $T(V)$.

Möchte man also in der Zeichenebene keinen „Nullpunkt“ wählen, kann man sie als affinen Raum betrachten. Dann muss man zwischen Punkten ($\in V$) und Vektoren ($\in T(V)$) unterscheiden. Punkte können dann nicht addiert werden, aber Vektoren können addiert werden und auf Punkten „wirken“. Sobald aber z.B. Koordinatenachsen eingezeichnet werden (und damit ihr Schnittpunkt als Nullpunkt ausgewählt wird), ist die Zeichenebene selbst ein Vektorraum und die Verwendung von Pfeilen überflüssig.

8 Geraden in der Ebene

Es sei P ein von 0 verschiedener Punkt. Die Gerade durch 0 und P ist die Menge aller skalaren Vielfachen von P. Die Gerade durch zwei Punkte P und Q erhält man, indem man die Gerade durch 0 und $Q - P$ in den Punkt P verschiebt, also ist sie gleich

$$P + \mathbb{R} \cdot (Q - P) := \{P + c \cdot (Q - P) \mid c \in \mathbb{R}\}$$

(siehe erstes Bild unten).

Sei t die Translation, die P auf Q abbildet ($t(P) = Q$, $t = t_{Q-P}$). Für $c \in \mathbb{R}$ ist dann

$$(ct)(P) = t_{c(Q-P)}(P) = P + c(Q - P) \ .$$

Daher ist

$$P + \mathbb{R}(Q - P) = (\mathbb{R}t)(P) := \{(ct)(P) \mid c \in \mathbb{R}\} \ .$$

Wird die Ebene als affiner Raum betrachtet, dann kann die Gerade durch P und Q (ohne die Verwendung der Addition von Punkten) durch $(\mathbb{R}t)(P)$ angegeben werden, P heißt dann Aufpunkt und die Translation t Richtungsvektor der Geraden (siehe zweites Bild unten).

Manchmal werden (nach Wahl eines Nullpunktes 0) statt der Punkte $P \in E$ die Pfeile

$$\vec{P} := (0, P) \in \{0\} \times E$$

und die Rechenoperationen

$$(0, P) + (0, Q) := (0, P + Q)$$

und

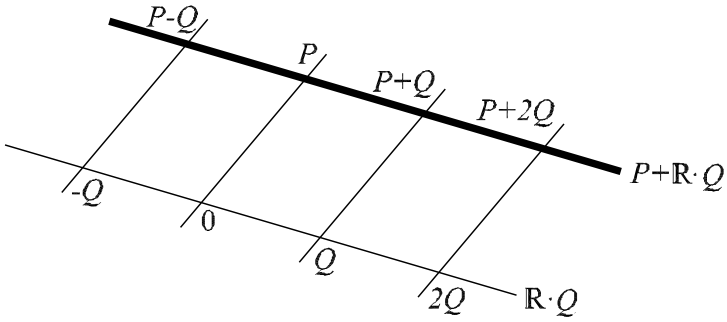
$$t \cdot (0, P) := (0, t \cdot P)$$

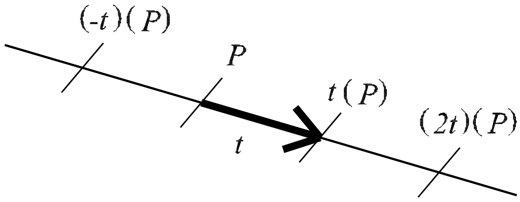
betrachtet. Die Gerade

$$\vec{P} + \mathbb{R}(\vec{Q} - \vec{P}) \subseteq \{0\} \times E$$

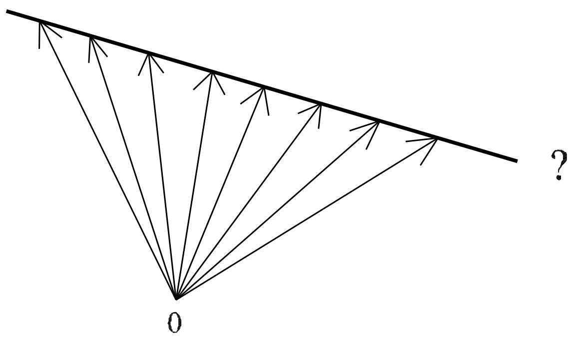
ist dann eine Menge von Pfeilen (siehe drittes Bild unten) und nicht, wie es der geometrischen Vorstellung näher liegt, eine Menge von Punkten.

Geraden in der Ebene





$$P+t:=t(P)$$



9 Rechnen mit Kräften

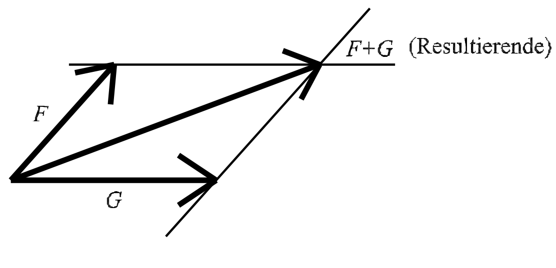
Wirkt eine Kraft in einem bestimmten Punkt 0, so beobachtet man zum Beispiel, dass eine Masse im Punkt 0 sich nach einer Sekunde im Punkt A befindet. Diese Beobachtung wird durch das Punktepaar $(0, A)$, also durch einen Pfeil, beschrieben. Man stellt weiter fest, dass die Wirkung von zwei zugleich im Punkt 0 angreifenden Kräften F und G nicht von der Wirkung der „Resultierenden“ $F + G$ zu unterscheiden ist (siehe erstes Bild unten) und dass Kräfte mit Zahlen multipliziert werden können. Diese Zuordnungen von zwei Kräften auf ihre Resultierende und von einer Kraft und einer Zahl auf eine Kraft erfüllen die Rechenregeln eines Vektorraums. Daher sind Kräfte Vektoren.

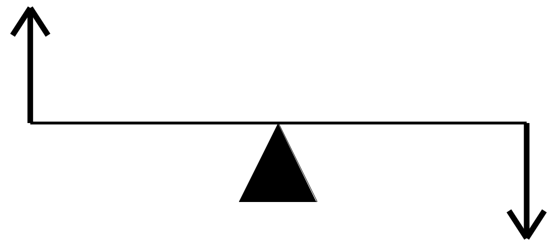
Zu beachten ist aber, dass nur Kräfte, die im selben Punkt angreifen, einen Vektorraum bilden. Zwei Kräfte, die an den Enden eines Waagebalkens angreifen, dürfen nicht addiert werden (siehe zweites Bild unten), sie befinden sich in zwei verschiedenen Vektorräumen.

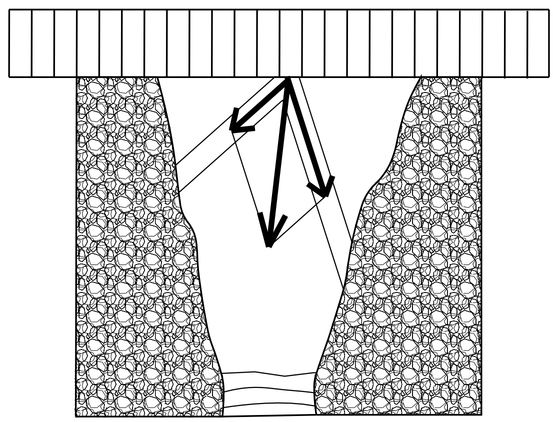
Ist der Angriffspunkt 0 der Kräfte fest gewählt, könnten die Kräfte statt durch Pfeile $(0, A)$ und $(0, B)$ auch einfach durch die Punkte A und B beschrieben werden. Die Resultierende dieser Kräfte entspricht dann der Summe der Punkte A und B (nach Wahl des Nullpunktes 0). Durch Verwendung von Pfeilen wird aber der Angriffspunkt in Erinnerung gerufen, was vor allem dann sinnvoll ist, wenn auf ein Blatt mehrere Kräfte mit verschiedenen Angriffspunkten gezeichnet werden.

Das dritte Bild unten zeigt eine Anwendung der Vektorrechnung in der Technik: Durch Zerlegung einer Kraft (z.B. zeichnerisch) in eine Summe zweier Kräfte kann bestimmt werden, wie sich eine Last auf einer Brücke auf die zwei Brückenpfeiler verteilt.

Kräfte







10 Gerichtete Größen

In Physik und Technik werden Vektoren oft als „gerichtete Größen“ definiert. Dieser Begriff setzt mehr Struktur voraus als nur „Addition“ und „Multiplikation mit Zahlen“.

Sei V ein Vektorraum über den reellen Zahlen. Eine *Norm* auf V ist eine Abbildung

$$\|\cdot\| : V \longrightarrow \mathbb{R}\ ,\ v \longmapsto \|v\|\ ,$$

mit den Eigenschaften:

(1) Es gilt $\|v\| = 0$ genau dann, wenn $v = 0$ ist.

(2) Für alle $c \in \mathbb{R}$ und alle $v \in V$ ist $\|cv\| = |c|\ \|v\|$.

(3) Für alle $v, w \in V$ ist $\|v + w\| \leq \|v\| + \|w\|$.

V zusammen mit einer Norm heißt *normierter Raum*.

Es seien $u \in V$ und $v \in V,\ v \neq 0$. Die Menge

$$\{c \cdot v \mid c \in \mathbb{R},\ c \geq 0\}$$

ist eine *Richtung in V*. Die Menge

$$\{u + c \cdot v \mid c \in \mathbb{R},\ c \geq 0\}$$

ist eine *Halbgerade in V mit Anfangspunkt u und Richtung v*.

Sei V ein normierter Raum. Zu jeder nicht-negativen Zahl $a \in \mathbb{R}$ und jeder Richtung

$$H := \{cv \mid c \in \mathbb{R},\ c \geq 0\}$$

gibt es genau ein Element $w \in H$ mit $\|w\| = a$, und zwar $\frac{a}{\|v\|} \cdot v$. Also ist jeder Vektor in einem normierten Raum durch Richtung und Betrag eindeutig bestimmt. Eine „gerichtete Größe“ ist daher ein Element eines normierten Raums.

Die *Länge des Pfeils* (A, B) in einem normierten Raum V ist $\|B - A\|$ und die *Richtung des Pfeils* ist $\{c \cdot (B - A) \mid c \in \mathbb{R},\ c \geq 0\}$.