Lineare Differenzengleichungen

Franz Pauer

Institut für Mathematik, Universität Innsbruck,
Technikerstr. 13/7, A-6020 Innsbruck, Österreich.

Franz.Pauer@uibk.ac.at

Vortrag beim LehrerInnenfortbildungstag West
2010 in Innsbruck

25. März 2010

Einleitung

Lehrplan 8. Klasse AHS: „Beschreiben von Systemen mit Hilfe von . . . **Differenzengleichungen** oder Differentialgleichungen“
Lehrplan 3. Jahrgang HTL Elektrotechnik:
  Differenzengleichungen, Zahlenfolgen
Lehrplan 3. Jahrgang HAK:Rekursive Darstellung von Folgen, **Differenzengleichungen**

Ziele dieses Vortrags:

- einfache Darstellung der Theorie der linearen Differenzengleichungen (in einer Variablen, mit konstanten Koeffizienten)

- Lösungsverfahren mit Hilfe der Division mit Rest von Polynomen

- Aus Zeitgründen leider **nicht**: Modellierung von interessanten Problemen aus Wirtschaft, Technik und Naturwissenschaften

Inhalt:

- Folgen und ihre Darstellung
- Lineare Differenzengleichungen: Definition, Existenz von Lösungen
- Beschreibung von Differenzengleichungen mit Hilfe von Polynomen
- Lösen von Differenzengleichungen mit Hilfe der Division mit Rest von Polynomen
- Spezialfälle: Differenzengleichungen der Ordnung 1 und 2

Bemerkung: $\mathbb{R}$ könnte im weiteren immer durch $\mathbb{C}$ oder $\mathbb{Q}$ ersetzt werden.

Folgen

Eine *Folge* in $\mathbb{R}$ ist eine Funktion von $\mathbb{N}$ nach $\mathbb{R}$.

Darstellung von Folgen:

-

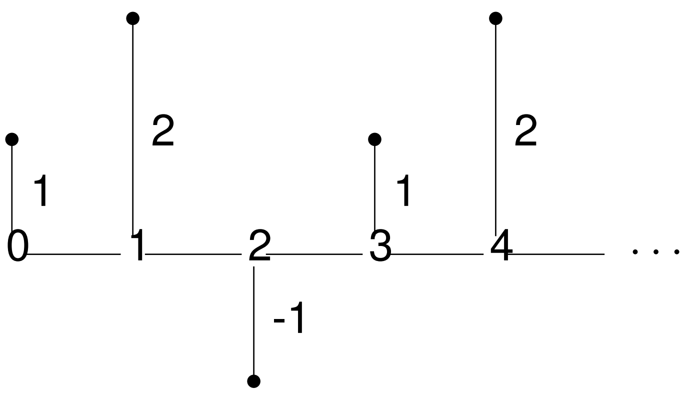
$$f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}\,,\ j \longmapsto f(j)$$

ODER

-

$$(f_0, f_1, f_2, f_3, \ldots) = (f_j)_{j\in\mathbb{N}} = (f(j))_{j\in\mathbb{N}}$$

ODER



(Genaue) Beschreibung von Folgen (durch endlich viele Daten)

- Durch Angabe eines Verfahrens, wie für jede Zahl $j \in \mathbb{N}$ das „j-te Folgenglied“ $f(j)$ berechnet werden kann (*explizite Form der Folge*).

  Zum Beispiel:
  Für alle $j \in \mathbb{N}$ sei $f(j) := j^2 - 3j + 2$.
  Oder:
  Für alle $j \in \mathbb{N}$ sei $f(j) := \frac{1}{j!}2^j$.

- Durch Angabe von Bedingungen, die von genau einer Folge f erfüllt werden (*implizite Form der Folge*).

  Zum Beispiel:
  $f(0) = 0$, $f(1) = 1$,
  und für alle $j \in \mathbb{N}$: $f(j+2) = f(j+1) + f(j)$.

Lineare Differenzengleichungen

Eine *lineare Differenzengleichung (der Ordnung n mit n Anfangsbed.)* ist die folgende Aufgabe:

- Gegeben sind
  - reelle Zahlen $c_0, c_1, \ldots, c_n$ mit $c_n \neq 0$ (*Koeffizienten der Differenzengleichung*),
  - reelle Zahlen $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}$ (*Anfangswerte*) und
  - eine Folge h in $\mathbb{R}$.
- Gesucht ist eine explizite Form einer Folge f in $\mathbb{R}$ mit den Eigenschaften
  - für $0 \leq i \leq n-1$ ist $f(i) = a_i$ und
  - für alle $j \in \mathbb{N}$ ist

    $$c_0 \cdot f(j) + c_1 \cdot f(j+1) + \ldots + c_n \cdot f(j+n) = h(j)\,.$$

Eine solche Folge f heißt *Lösung der Differenzengleichung*.

Interpretation als System von linearen Gleichungen mit „unendlich vielen Unbekannten und unendlich vielen Gleichungen“:

$$
\begin{array}{ccccccc}
c_0 \cdot f(0)+ & c_1 \cdot f(1)+ & c_2 \cdot f(2)+ & c_3 \cdot f(3)+ & \ldots = & h(0) \\
 & c_0 \cdot f(1)+ & c_1 \cdot f(2)+ & c_2 \cdot f(3)+ & \ldots = & h(1) \\
 & & c_0 \cdot f(2)+ & c_1 \cdot f(3)+ & \ldots = & h(2) \\
 & & & c_0 \cdot f(3)+ & \ldots = & h(3) \\
 & & & & \ldots = & \ldots
\end{array}
$$

In jeder Zeile nur endlich viele Summanden $\neq 0$!
„Unbekannte“: $f(0), f(1), f(2), \ldots$.

Beispiel: $n = 2$, $c_0 = -1$, $c_1 = -1$, $c_2 = 1$, $a_0 = 0, a_1 = 1$, $h = 0$:
Gesucht: Folge f mit
$f(0) = 0$, $f(1) = 1$ und für alle $j \in \mathbb{N}$:
$f(j+2) - f(j+1) - f(j) = 0$.

Berechnung von $f(0), f(1), f(2), \ldots$:

- $f(0) = 0,\ f(1) = 1$
- $f(2) = f(1) + f(0) = 1$
- $f(3) = f(2) + f(1) = 2$
- $f(4) = f(3) + f(2) = 3$
- $f(5) = f(4) + f(3) = 5$
- $\ldots$

Diese Folge heißt *Folge der Fibonacci-Zahlen*.

Existenz von Lösungen

Sind reelle Zahlen $a_0, \ldots, a_{n-1}$, $c_0, c_1, \ldots, c_n$ mit $c_n \neq 0$, und eine Folge h gegeben, dann gibt es genau eine Folge f so, dass

- $f(i) = a_i$, $0 \leq i \leq n-1$,

  und

- $c_0 \cdot f(j) + c_1 \cdot f(j+1) + \ldots + c_n \cdot f(j+n) = h(j)\,,\ j \in \mathbb{N}\,,$

ist.

Wir können diese Folge f induktiv berechnen, dabei sehen wir zugleich, dass f durch die angegebenen Bedingungen eindeutig bestimmt ist:

- $f(0) = a_0, \ldots, f(n-1) = a_{n-1}$,
- $f(n) = c_n^{-1} \cdot (h(0) - c_0 \cdot f(0) - c_1 \cdot f(1) - \ldots - c_{n-1} \cdot f(n-1))$
- $f(n+1) = c_n^{-1} \cdot (h(1) - c_0 \cdot f(1) - c_1 \cdot f(2) - \ldots - c_{n-1} \cdot f(n))$
- $f(n+2) = c_n^{-1} \cdot (h(2) - c_0 \cdot f(2) - c_1 \cdot f(3) - \ldots - c_{n-1} \cdot f(n+1))$
- $f(n+3) = \ldots$
- $\ldots$

„Shifts“

Sei f eine Folge in $\mathbb{R}$.
Für $\ell \in \mathbb{N}$ sei $s^\ell * f$ die Folge in $\mathbb{R}$ mit

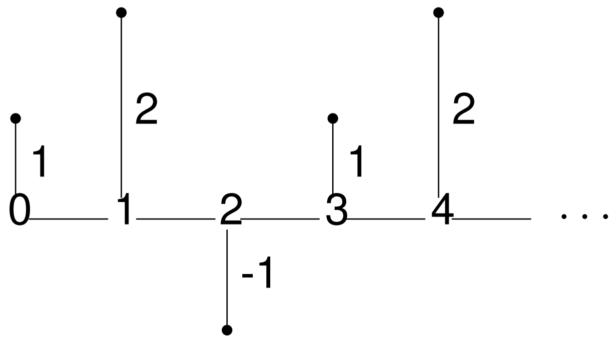
für alle $j \in \mathbb{N}$ ist $(s^\ell * f)(j) := f(j + \ell)$

Beispiel:

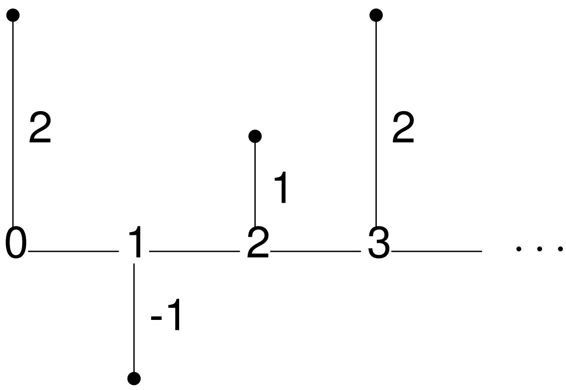
$$\begin{aligned} f &= (1, 2, -1, 1, 2, 2, \ldots) \\ s * f &= (2, -1, 1, 2, 2, \ldots) \\ s^2 * f &= (-1, 1, 2, 2, \ldots) \\ s^3 * f &= (1, 2, 2, \ldots) \end{aligned}$$

Beispiel:

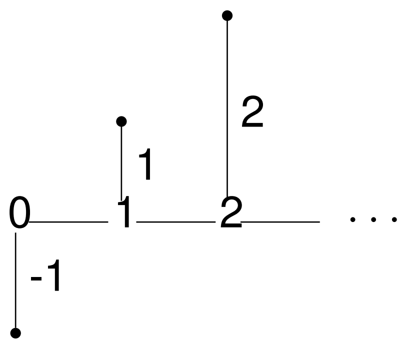
$$f = (1, 2, -1, 1, 2, \ldots)$$



$$s * f = (2, -1, 1, 2, \ldots)$$



$$s^2 * f = (-1, 1, 2, \ldots)$$



Einschub:

Polynomfunktionen, Polynome

Seien $n \in \mathbb{N}$ und $c_0, c_1, \ldots, c_n \in \mathbb{R}$.
Dann ist die Funktion

$$p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\,,$$

$$z \mapsto c_0 + c_1 z + c_2 z^2 + \cdots + c_n z^n = \sum_{i=0}^{n} c_i z^i\,,$$

eine *Polynomfunktion* von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{R}$.

Die Zahlen $c_0, \ldots, c_n$ sind die *Koeffizienten von* p.
Wenn $c_n \neq 0$ ist:
$grad(p) := n$ ist der *Grad* von f und
$lk(p) := c_n$ der *Leitkoeffizient* von p.

Wir schreiben für p im weiteren

$$c_0 + c_1 s + c_2 s^2 + \ldots + c_n s^n \text{ oder } \sum_{i=0}^{n} c_i s^i$$

und sprechen dann von einem *Polynom in der Variablen s mit Koeffizienten in* $\mathbb{R}$. Für die Menge dieser Polynome schreiben wir dann $\mathbb{R}[s]$.

Für die Addition

$$\sum_{i=0}^{n} c_i s^i + \sum_{i=0}^{n} d_i s^i := \sum_{i=0}^{n} (c_i + d_i) s^i$$

und die Multiplikation

$$(\sum_{i=0}^{n} c_i s^i) \cdot (\sum_{i=0}^{n} d_i s^i) := \sum_{i=0}^{2n} (\sum_{j=0}^{i} c_j \cdot d_{i-j}) s^i$$

gelten die gleichen Rechenregeln wie für die Addition und Multiplikation von ganzen Zahlen.

Beschreibung von Differenzengleichungen durch Polynome

Folgen können komponentenweise addiert und mit Zahlen multipliziert werden.

Für $p := \sum_{i=0}^{n} c_i s^i$ und eine Folge f sei

$$p * f := \sum_{i=0}^{n} c_i (s^i * f).$$

Also: für alle $j \in \mathbb{N}$ ist

$$(p * f)(j) = \sum_{i=0}^{n} c_i f(j+i)\,.$$

Neuformulierung:

Eine *lineare Differenzengleichung (der Ordnung n) mit n Anfangswerten* ist die folgende Aufgabe:

- Gegeben sind
  - ein Polynom $0 \neq p \in \mathbb{R}[s]$ mit $grad(p) = n$,
  - reelle Zahlen $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}$ (*Anfangswerte*) und
  - eine Folge h in $\mathbb{R}$.
- Gesucht ist eine explizite Form einer Folge f in $\mathbb{R}$ mit den Eigenschaften
  - für $0 \leq i \leq n-1$ ist $f(i) = a_i$ und
  - $p * f = h$.

Beispiel: Die durch $s^2 - s - 1$ und 0 gegebene lineare Differenzengleichung mit Anfangswerten $0, 1$ ist die homogene Differenzengleichung mit Anfangswerten $0, 1$, die durch $-1, -1, 2$ gegeben ist.

Einschub:

Division mit Rest von Polynomen

Satz: Zu je zwei Polynomen q und p mit $p \neq 0$ gibt es eindeutig bestimmte Polynome m und r mit den Eigenschaften

$$q = m \cdot p + r \quad \text{und} \quad [r = 0 \text{ oder } grad(r) < grad(p)] \, .$$

m ... polynomialer Quotient von q und p
r ... Rest von q nach Division durch p

Divisionsalgorithmus (Berechnung von m und r):

- Setze $m := 0$ und $r := q$.

- Solange $r \neq 0$ und $grad(r) \geq grad(p)$ ist, ersetze r durch $r - t \cdot p$ und m durch $m + t$, wobei

  $$t := lk(r) \cdot lk(p)^{-1} \cdot s^{grad(r) - grad(p)} \text{ ist.}$$

Beispiel: Seien

$q := s^4 + 2s^3 - 2s^2 + s - 1$ und $p := s^2 - 2$.

Wir berechnen mit dem oben angegebenen Verfahren Polynome m und r mit
$q = m \cdot p + r$ und
($r = 0$ oder $grad(r) < grad(b) = 2$).
Dabei beginnen wir mit $r := q$ und schreiben die Zwischenrechnungen platzsparend untereinander.

$$
\begin{array}{rrrrrl}
\mathbf{s^4} & +2s^3 & -2s^2 & +s & -1 & = (s^2 + 2s)p + r \\
-s^4 & & +2s^2 & & & \\
\hline
& \mathbf{+2s^3} & & +s & -1 & \\
& -2s^3 & & +4s & & \\
\hline
& & & \mathbf{+5s} & -1 & =: r
\end{array}
$$

Also ist $m = s^2 + 2s$ und $r = 5s - 1$.

Lösen von Differenzengleichungen mit Hilfe der Division mit Rest

Sei f die Lösung der durch ein Polynom $p = \sum_{i=0}^{n} c_i s^i \in \mathbb{R}[s]$ mit $c_n \neq 0$, eine Folge h in $\mathbb{R}$ und Anfangswerte $a_0, \ldots, a_{n-1} \in \mathbb{R}$ gegebenen Differenzengleichung.

Für $j \geq n$ kann $f(j)$ wie folgt berechnet werden:

- Dividiere s^j mit Rest durch p:

  $s^j = m_j \cdot p + r_j$ und [$r_j = 0$ oder $grad(r_j) < n$].

  Sei $r_j(i)$ der Koeffizient von r_j bei s^i, $0 \leq i \leq n$, also

  $$r_j = \sum_{i=0}^{n-1} r_j(i) s^i \ .$$

- Dann ist

  $$f(j) = (m_j * h)(0) + \sum_{i=0}^{n-1} r_j(i) a_i \ .$$

Denn:

$$f(j) = (s^j * f)(0) = ((m_j \cdot p + r_j) * f)(0) =$$

$$= (m_j * (p * f))(0) + (r_j * f)(0) =$$

$$= (m_j * h)(0) + \sum_{i=0}^{n-1} r_j(i) a_i.$$

Dabei haben wir verwendet, dass

$$(m_j \cdot p) * f = m_j * (p * f)$$

ist, was aber leicht nachzuprüfen ist.

Wenn die Differenzengleichung homogen (also $h = 0$) ist, ist

$$f(j) = \sum_{i=0}^{n-1} r_j(i) a_i \, ,$$

man muss in diesem Fall also nur den Rest (und nicht auch den polynomialen Quotienten) von s^j nach Division durch p berechnen.

Beispiel:

Sei f die Fibonacci-Folge. Der Rest von s^{100} nach Division durch $s^2 - s - 1$ ist
(Berechnung in Maple mit $rem(s^{100}, s^2 - s - 1, s)$)

$$354224848179261915075s+$$

$$+218922995834555169026\,,$$

wegen $f(0) = 0$ und $f(1) = 1$ ist

$$f(100) = 354224848179261915075\,.$$

Beispiel: Homogene lineare Differenzengleichungen 1. Ordnung

Seien a und c reelle Zahlen. Berechne eine explizite Form der Folge f mit

$$(s-c)*f = 0 \quad \text{und} \quad f(0) = a \ \ !$$

Anders formuliert: Für alle $j \in \mathbb{N}$ sei

$$f(j+1) - c \cdot f(j) = 0 \quad \text{und} \quad f(0) = a\,.$$

Division mit Rest von s^j durch $s-c$ ergibt

$$s^j = m_j \cdot (s-c) + r_j \qquad \text{und} \qquad r_j \in \mathbb{R}\,.$$

Einsetzen von c für s ergibt

$$c^j = 0 + r_j\,,$$

also ist für alle $j \in \mathbb{N}$

$$f(j) = c^j \cdot a\,.$$

Beispiel: Inhomogene lineare Differenzengleichungen 1. Ordnung

Seien a und c reelle Zahlen und h eine Folge in $\mathbb{R}$. Berechne eine explizite Form der Folge f mit

$$(s-c) * f = h \quad \text{und} \quad f(0) = a \ \ !$$

Anders formuliert: Für alle $j \in \mathbb{N}$ sei

$$f(j+1) - c \cdot f(j) = h(j) \quad \text{und} \quad f(0) = a \, .$$

Wie zuvor erhalten wir

$$s^j = m_j \cdot (s-c) + c^j \, .$$

Daher ist

$$m_j = \frac{s^j - c^j}{s-c} = \sum_{\ell=0}^{j-1} c^\ell \cdot s^{j-1-\ell} \, ,$$

somit ist für alle $j \in \mathbb{N}$

$$f(j) = \sum_{\ell=0}^{j-1} c^\ell \cdot h(j-1-\ell) + c^j \cdot a \, .$$

Beispiel: Homogene lineare Differenzengleichungen 2. Ordnung

Seien $a_0, a_1 \in \mathbb{R}$, $p := s^2 + c_1 s + c_0 \in \mathbb{R}[s]$ und x_1, x_2 die Nullstellen von p. Berechne eine explizite Form der Folge f mit

$$p * f = 0,\ f(0) = a_0 \text{ und } f(1) = a_1\,!$$

Sei $j \in \mathbb{N}$.
Division mit Rest von s^j durch $p = (s - x_1)(s - x_2)$ ergibt

$$s^j = m_j \cdot (s - x_1)(s - x_2) + r_j \quad \text{und}$$

$$[\, r_j = 0 \text{ oder } grad(r_j) \leq 1\,].$$

Sei $r_j = r_j(1)s + r_j(0)$ mit $r_j(0), r_j(1) \in \mathbb{R}$.
Setzen wir x_1 bzw. x_2 für s ein, so erhalten wir

$$x_1^j = 0 + r_j(1)x_1 + r_j(0)$$

bzw.

$$x_2^j = 0 + r_j(1)x_2 + r_j(0)\,.$$

Falls $x_1 \neq x_2$ **ist**, folgt daraus

$$r_j(1) = \frac{x_1^j - x_2^j}{x_1 - x_2}$$

und

$$r_j(0) = \frac{x_1 x_2^j - x_1^j x_2}{x_1 - x_2} \; .$$

Das j - te Folgenglied $f(j)$ der Lösung f dieser Differenzengleichung ist also

$$f(j) = \frac{x_1^j - x_2^j}{x_1 - x_2} a_1 + \frac{x_1 x_2^j - x_1^j x_2}{x_1 - x_2} a_0 =$$

$$= \frac{a_1 - a_0 x_2}{x_1 - x_2} x_1^j + \frac{a_0 x_1 - a_1}{x_1 - x_2} x_2^j \, .$$

Falls $x_1 = x_2$ ist, gilt wie oben

$$x_1^j = 0 + r_j(1)x_1 + r_j(0)\ .$$

Eine zweite Bedingung für die Koeffizienten von r_j erhalten wir, indem wir $s^j = m_j \cdot (s - x_1)^2 + r_j$ nach s ableiten und dann für s die Zahl x_1 einsetzen:

$$jx_1^{j-1} = 0 + r_j(1)\,.$$

In diesem Fall ist also

$$f(j) = jx_1^{j-1}a_1 + (1-j)x_1^j a_0 =$$

$$= (1-j)a_0 x_1^j + ja_1 x_1^{j-1}\,.$$

Beispiel: Die „Formel von Binet"

Die Fibonacci-Folge f ist die Lösung der durch $p := s^2 - s - 1$ und $f(0) = 0$, $f(1) = 1$ gegebenen Differenzengleichung.

Die Nullstellen von p sind

$$x_1 := \tfrac{1+\sqrt{5}}{2} \text{ und } x_2 := \tfrac{1-\sqrt{5}}{2},$$

also ist

$$f(j) = \frac{1}{\sqrt{5}} x_1^j - \frac{1}{\sqrt{5}} x_2^j \,.$$

Das j-te Glied $f(j)$ der Fibonacci-Folge ist somit

$$\frac{1}{\sqrt{5}} \left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^j - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^j \right] .$$