Wieviel Fachkompetenz brauchen MathematiklehrerInnen ?

Gesellschaftspolitische und persönlichkeitsbildene Aspekte des Mathematikunterrichts.

Franz Pauer

Universität Innsbruck

12. Oktober 2022

Lehrpläne

- Lehrpläne in Österreich und Rahmenrichtlinien für die Lehrpläne in Südtirol sind für alle Lehrpersonen verbindlich. (Nicht verbindlich sind Schulbücher, Kompetenzkatalog Zentralmatura, etc.)

Lehrpläne

- Lehrpläne in Österreich und Rahmenrichtlinien für die Lehrpläne in Südtirol sind für alle Lehrpersonen verbindlich. (Nicht verbindlich sind Schulbücher, Kompetenzkatalog Zentralmatura, etc.)
- Lehrpläne für alle Schulen in Österreich

  Web-Seite des BMBWF
  www.bmbwf.gv.at/Themen/schule/schulpraxis/lp.html

Lehrpläne

- Lehrpläne in Österreich und Rahmenrichtlinien für die Lehrpläne in Südtirol sind für alle Lehrpersonen verbindlich. (Nicht verbindlich sind Schulbücher, Kompetenzkatalog Zentralmatura, etc.)
- Lehrpläne für alle Schulen in Österreich

  Web-Seite des BMBWF
  www.bmbwf.gv.at/Themen/schule/schulpraxis/lp.html
- Rahmenrichtlinien des Landes für die Lehrpläne aller deutschsprachigen Schulen in Südtirol

  Web-Seite der Südtiroler Landesverwaltung
  www.provinz.bz.it/bildung-sprache/deutschsprachige-schule/bildungsverwaltung/rahmenrichtlinien-land-bestimmungen.asp

Allgemeine Bildungsziele

- Lehrplan AHS und MS, allgemeine Bildungsziele
  (für alle Unterrichtsfächer, auch Mathematik):

  Der Unterricht hat aktiv zu einer den Menschenrechten verpflichteten Demokratie beizutragen.

Allgemeine Bildungsziele

- Lehrplan AHS und MS, allgemeine Bildungsziele
  (für alle Unterrichtsfächer, auch Mathematik):

  Der Unterricht hat aktiv zu einer den Menschenrechten verpflichteten Demokratie beizutragen.

- Wie werden Sie in Ihrem Mathematikunterricht einen Beitrag zu diesem wichtigen Bildungsziel leisten?

Einige Bildungsziele des Mathematikunterrichts

Lehrpläne Mathematik AHS-Unterstufe und NMS verlangen:

- . . . die Bereitschaft zum selbständigen Denken und zur kritischen Reflexion besonders zu fördern.

Einige Bildungsziele des Mathematikunterrichts

Lehrpläne Mathematik AHS-Unterstufe und NMS verlangen:

- . . . die Bereitschaft zum selbständigen Denken und zur kritischen Reflexion besonders zu fördern.
- Die Schülerinnen und Schüler sollen in Verfolgung entsprechender Lernziele produktives geistiges Arbeiten, Argumentieren und exaktes Arbeiten, kritisches Denken, Darstellen und Interpretieren als mathematische Grundtätigkeiten durchführen.

Einige Bildungsziele des Mathematikunterrichts

Lehrpläne Mathematik AHS-Unterstufe und NMS verlangen:

- … die Bereitschaft zum selbständigen Denken und zur kritischen Reflexion besonders zu fördern.
- Die Schülerinnen und Schüler sollen in Verfolgung entsprechender Lernziele produktives geistiges Arbeiten, Argumentieren und exaktes Arbeiten, kritisches Denken, Darstellen und Interpretieren als mathematische Grundtätigkeiten durchführen.
- Folgende mathematische Grundtätigkeiten sind zu entwickeln: Kritisches Denken, insbesondere: Überprüfen von Vermutungen; Überprüfen von Ergebnissen; Erkennen von Unzulänglichkeiten mathematischer Modelle; Erkennen von Mängeln in Darstellung oder Begründungen; …

Einige Bildungsziele des Mathematikunterrichts

Lehrplan HAK:

Nach Abschluss der Handelsakademie verfügen die Schülerinnen und Schüler über die Kompetenz,

- eine aktive und verantwortungsbewusste Rolle als Unternehmerin und Unternehmer, als Arbeitnehmerin und Arbeitnehmer oder als Konsumentin und Konsument einzunehmen; . . .

Einige Bildungsziele des Mathematikunterrichts

Lehrplan HAK:

Nach Abschluss der Handelsakademie verfügen die Schülerinnen und Schüler über die Kompetenz,

- eine aktive und verantwortungsbewusste Rolle als Unternehmerin und Unternehmer, als Arbeitnehmerin und Arbeitnehmer oder als Konsumentin und Konsument einzunehmen; . . .
- aufgabenorientiert selbständig und im Team zu arbeiten.

Einige Bildungsziele des Mathematikunterrichts

Lehrplan Mathematik AHS-Oberstufe:

- Im Mathematikunterricht soll verständnisvolles Lernen als individueller, aktiver und konstruktiver Prozess im Vordergrund stehen. . . .

Einige Bildungsziele des Mathematikunterrichts

Lehrplan Mathematik AHS-Oberstufe:

- Im Mathematikunterricht soll verständnisvolles Lernen als individueller, aktiver und konstruktiver Prozess im Vordergrund stehen. ...
- Einzelne Inhalte und Probleme sind aus verschiedenen Blickwinkeln zu sehen und aus verschiedenen Richtungen zu beleuchten.

Einige Bildungsziele des Mathematikunterrichts

Lehrplan Mathematik AHS-Oberstufe:

- Im Mathematikunterricht soll verständnisvolles Lernen als individueller, aktiver und konstruktiver Prozess im Vordergrund stehen. ...
- Einzelne Inhalte und Probleme sind aus verschiedenen Blickwinkeln zu sehen und aus verschiedenen Richtungen zu beleuchten.
- Mathematik entwickelt die Fähigkeit zum Argumentieren, Kritisieren und Urteilen und fördert die Fähigkeit, zugleich verständlich und präzise zu sprechen.

Einige Bildungsziele des Mathematikunterrichts

Lehrplan Mathematik AHS-Oberstufe:

- Im Mathematikunterricht soll verständnisvolles Lernen als individueller, aktiver und konstruktiver Prozess im Vordergrund stehen. . . .
- Einzelne Inhalte und Probleme sind aus verschiedenen Blickwinkeln zu sehen und aus verschiedenen Richtungen zu beleuchten.
- Mathematik entwickelt die Fähigkeit zum Argumentieren, Kritisieren und Urteilen und fördert die Fähigkeit, zugleich verständlich und präzise zu sprechen.
- Das mathematische Prinzip, dass Behauptungen begründet werden müssen, soll Vorbild für andere Fächer und gesellschaftliche Bereiche sein.

Bildungsziele einst und jetzt

- Einführung der Schulpflicht (18. Jhd.) für den Bedarf eines autoritären Systems

Bildungsziele einst und jetzt

- Einführung der Schulpflicht (18. Jhd.) für den Bedarf eines autoritären Systems
- Ziel damals: einige Fertigkeiten und Kenntnisse vermitteln, die auf Zuruf ausgeführt werden.

Bildungsziele einst und jetzt

- Einführung der Schulpflicht (18. Jhd.) für den Bedarf eines autoritären Systems
- Ziel damals: einige Fertigkeiten und Kenntnisse vermitteln, die auf Zuruf ausgeführt werden.
- Heute (21. Jhd.): Schule für eine demokratische Gesellschaft. Die Schülerinnen und Schüler sollen nicht mehr zu Untertanen, sondern zu mündigen Menschen erzogen werden.

Bildungsziele einst und jetzt

- Einführung der Schulpflicht (18. Jhd.) für den Bedarf eines autoritären Systems
- Ziel damals: einige Fertigkeiten und Kenntnisse vermitteln, die auf Zuruf ausgeführt werden.
- Heute (21. Jhd.): Schule für eine demokratische Gesellschaft. Die Schülerinnen und Schüler sollen nicht mehr zu Untertanen, sondern zu mündigen Menschen erzogen werden.
- Der Mathematikunterricht heute muss sich also wesentlich von dem im 18. und 19. Jhd. unterscheiden!

Mündige Menschen oder Untertanen?

Beispiel: Quadratische Gleichungen

Die Aufgabe „Finde alle reellen Zahlen x so, dass $x^2 + 6x - 1 = 0$ ist!“ ist eine quadratische Gleichung. Man kann sie durch einfache Überlegungen schrittweise lösen:

- Weil $(x + 3)^2 = x^2 + 6x + 9$ ist, können wir $(x + 3)^2 - 9$ anstatt $x^2 + 6x$ schreiben.

Mündige Menschen oder Untertanen?

Beispiel: Quadratische Gleichungen

Die Aufgabe „Finde alle reellen Zahlen x so, dass $x^2 + 6x - 1 = 0$ ist!“ ist eine quadratische Gleichung. Man kann sie durch einfache Überlegungen schrittweise lösen:

- Weil $(x + 3)^2 = x^2 + 6x + 9$ ist, können wir $(x + 3)^2 - 9$ anstatt $x^2 + 6x$ schreiben.
- Wir suchen daher alle (reellen) Zahlen x so, dass $(x + 3)^2 - 9 - 1 = 0$, also $(x + 3)^2 = 10$ ist.

Mündige Menschen oder Untertanen?

Beispiel: Quadratische Gleichungen

Die Aufgabe „Finde alle reellen Zahlen x so, dass $x^2 + 6x - 1 = 0$ ist!“ ist eine quadratische Gleichung. Man kann sie durch einfache Überlegungen schrittweise lösen:

- Weil $(x+3)^2 = x^2 + 6x + 9$ ist, können wir $(x+3)^2 - 9$ anstatt $x^2 + 6x$ schreiben.
- Wir suchen daher alle (reellen) Zahlen x so, dass $(x+3)^2 - 9 - 1 = 0$, also $(x+3)^2 = 10$ ist.
- Links und rechts des Gleichheitszeichens stehen positive Zahlen, wir können daher aus beiden die Wurzel ziehen und erhalten $x + 3 = \pm\sqrt{10}$.

Mündige Menschen oder Untertanen?

Beispiel: Quadratische Gleichungen

Die Aufgabe „Finde alle reellen Zahlen x so, dass $x^2 + 6x - 1 = 0$ ist!“ ist eine quadratische Gleichung. Man kann sie durch einfache Überlegungen schrittweise lösen:

- Weil $(x + 3)^2 = x^2 + 6x + 9$ ist, können wir $(x + 3)^2 - 9$ anstatt $x^2 + 6x$ schreiben.
- Wir suchen daher alle (reellen) Zahlen x so, dass $(x + 3)^2 - 9 - 1 = 0$, also $(x + 3)^2 = 10$ ist.
- Links und rechts des Gleichheitszeichens stehen positive Zahlen, wir können daher aus beiden die Wurzel ziehen und erhalten $x + 3 = \pm\sqrt{10}$.
- Daraus folgt, dass die gesuchten Zahlen $-3 + \sqrt{10}$ und $-3 - \sqrt{10}$ sind.

Mündige Menschen oder Untertanen?

Beispiel: Quadratische Gleichungen

Die Aufgabe „Finde alle reellen Zahlen x so, dass $x^2 + 6x - 1 = 0$ ist!“ ist eine quadratische Gleichung. Man kann sie durch einfache Überlegungen schrittweise lösen:

- Weil $(x+3)^2 = x^2 + 6x + 9$ ist, können wir $(x+3)^2 - 9$ anstatt $x^2 + 6x$ schreiben.
- Wir suchen daher alle (reellen) Zahlen x so, dass $(x+3)^2 - 9 - 1 = 0$, also $(x+3)^2 = 10$ ist.
- Links und rechts des Gleichheitszeichens stehen positive Zahlen, wir können daher aus beiden die Wurzel ziehen und erhalten $x + 3 = \pm\sqrt{10}$.
- Daraus folgt, dass die gesuchten Zahlen $-3 + \sqrt{10}$ und $-3 - \sqrt{10}$ sind.
- ODER (?)

Mündige Menschen oder Untertanen?

- ODER (?)

Mündige Menschen oder Untertanen?

- ODER (?)
- Die quadratische Gleichung $x^2 + 6x - 1 = 0$ ist wie folgt zu lösen:

Mündige Menschen oder Untertanen?

- ODER (?)
- Die quadratische Gleichung $x^2 + 6x - 1 = 0$ ist wie folgt zu lösen:
- Lerne die Lösungsformel $-\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}$ auswendig!

Mündige Menschen oder Untertanen?

- ODER (?)
- Die quadratische Gleichung $x^2 + 6x - 1 = 0$ ist wie folgt zu lösen:
- Lerne die Lösungsformel $-\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}$ auswendig!
- Setze in die Lösungsformel $-\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}$ ein: 6 für p und -1 für q !

Mündige Menschen oder Untertanen?

- ODER (?)
- Die quadratische Gleichung $x^2 + 6x - 1 = 0$ ist wie folgt zu lösen:
- Lerne die Lösungsformel $-\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}$ auswendig!
- Setze in die Lösungsformel $-\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}$ ein: 6 für p und -1 für q !
- Dann sind $-\frac{6}{2} \pm \sqrt{\frac{6^2}{4} - (-1)} = -3 \pm \sqrt{10}$ die zwei Lösungen.

.

Mündige Menschen oder Untertanen?

- Welcher Unterricht passt zu einer Demokratie, welcher zu einem autoritären System?

Mündige Menschen oder Untertanen?

- Welcher Unterricht passt zu einer Demokratie, welcher zu einem autoritären System?
- Welcher Unterricht erfordert von der Lehrperson mehr mathematische Fachkompetenz, welcher weniger?

Mündige Menschen oder Untertanen?

- Welcher Unterricht passt zu einer Demokratie, welcher zu einem autoritären System?
- Welcher Unterricht erfordert von der Lehrperson mehr mathematische Fachkompetenz, welcher weniger?

1. Die Schülerinnen und Schüler lernen eine Formel auswendig und lösen die Aufgabe durch „Einsetzen in die Formel“.

Mündige Menschen oder Untertanen?

- Welcher Unterricht passt zu einer Demokratie, welcher zu einem autoritären System?
- Welcher Unterricht erfordert von der Lehrperson mehr mathematische Fachkompetenz, welcher weniger?

1. Die Schülerinnen und Schüler lernen eine Formel auswendig und lösen die Aufgabe durch „Einsetzen in die Formel“.
2. Die Schülerinnen und Schüler verstehen, wie und warum man die Lösung einer Aufgabe findet.

Einige Ziele des Lehramtsstudiums

AbsolventInnen des Lehramtsstudiums mit Unterrichtsfach Mathematik können

- jenen Teil der Mathematik, den sie in der Schule unterrichten, einfach und verständlich erklären, und gut motivieren.

  Man kann aber nur das einfach und verständlich erklären, was man selber sehr gut verstanden und durchdacht hat (wenn man sich in diesem Bereich also „wie der Fisch im Wasser“ fühlt).

Einige Ziele des Lehramtsstudiums

AbsolventInnen des Lehramtsstudiums mit Unterrichtsfach Mathematik können

- jenen Teil der Mathematik, den sie in der Schule unterrichten, einfach und verständlich erklären, und gut motivieren.

  Man kann aber nur das einfach und verständlich erklären, was man selber sehr gut verstanden und durchdacht hat (wenn man sich in diesem Bereich also „wie der Fisch im Wasser“ fühlt).

- alle Unterrichtsinhalte begründen und kritische Fragen zu deren Sinn qualifiziert beantworten.

Einige Ziele des Lehramtsstudiums

AbsolventInnen des Lehramtsstudiums mit Unterrichtsfach Mathematik können

- jenen Teil der Mathematik, den sie in der Schule unterrichten, einfach und verständlich erklären, und gut motivieren.

  Man kann aber nur das einfach und verständlich erklären, was man selber sehr gut verstanden und durchdacht hat (wenn man sich in diesem Bereich also „wie der Fisch im Wasser“ fühlt).

- alle Unterrichtsinhalte begründen und kritische Fragen zu deren Sinn qualifiziert beantworten.

- ihren Mathematikunterricht so gestalten, dass die Entwicklung der Kinder und Jugendlichen zu mündigen Menschen in einer demokratischen Gesellschaft (und nicht zu unkritischen Untertanen in einer autoritären Gesellschaft) gefördert wird.

Einige Ziele des Lehramtsstudiums

AbsolventInnen des Lehramtsstudiums mit Unterrichtsfach Mathematik können

- durch ihren Unterricht sachliches und vorurteilsfreies Denken fördern.

Einige Ziele des Lehramtsstudiums

AbsolventInnen des Lehramtsstudiums mit Unterrichtsfach Mathematik können

- durch ihren Unterricht sachliches und vorurteilsfreies Denken fördern.
- ihren Unterricht selbständig planen und sich bei Lehrplanänderungen neue Inhalte selbständig erarbeiten.

Einige Ziele des Lehramtsstudiums

AbsolventInnen des Lehramtsstudiums mit Unterrichtsfach Mathematik können

- durch ihren Unterricht sachliches und vorurteilsfreies Denken fördern.
- ihren Unterricht selbständig planen und sich bei Lehrplanänderungen neue Inhalte selbständig erarbeiten.
- Unterlagen dazu, insbesondere Schulbücher, kritisch verwenden und gegebenenfalls Mängel darin erkennen,

Einige Ziele des Lehramtsstudiums

AbsolventInnen des Lehramtsstudiums mit Unterrichtsfach Mathematik können

- durch ihren Unterricht sachliches und vorurteilsfreies Denken fördern.
- ihren Unterricht selbständig planen und sich bei Lehrplanänderungen neue Inhalte selbständig erarbeiten.
- Unterlagen dazu, insbesondere Schulbücher, kritisch verwenden und gegebenenfalls Mängel darin erkennen,
- für Mathematik und ihre Anwendungen Interesse wecken, nützliche Fertigkeiten für die Berufs-und Arbeitswelt vermitteln

Einige Ziele des Lehramtsstudiums

AbsolventInnen des Lehramtsstudiums mit Unterrichtsfach Mathematik können

- durch ihren Unterricht sachliches und vorurteilsfreies Denken fördern.
- ihren Unterricht selbständig planen und sich bei Lehrplanänderungen neue Inhalte selbständig erarbeiten.
- Unterlagen dazu, insbesondere Schulbücher, kritisch verwenden und gegebenenfalls Mängel darin erkennen,
- für Mathematik und ihre Anwendungen Interesse wecken, nützliche Fertigkeiten für die Berufs-und Arbeitswelt vermitteln
- **Und dazu braucht es auch viel an mathematischer Fachkompetenz und mathematischem Fachwissen der Lehrperson!**

Zuerst genau hinhören und hinsehen, dann urteilen und handeln

Beispiel: Schlussrechnungen

- Aufgabe 1: Zwei Kilogramm Äpfel kosten 4 Euro. Wieviel kosten 3 Kilogramm Äpfel?

Zuerst genau hinhören und hinsehen, dann urteilen und handeln

Beispiel: Schlussrechnungen

- Aufgabe 1: Zwei Kilogramm Äpfel kosten 4 Euro. Wieviel kosten 3 Kilogramm Äpfel?
- Aufgabe 2: Herr Meier kauft bei einem Obstbauern ein Kilogramm Äpfel um 2 Euro. Zwei Tage später fährt er mit einem Lastwagen dorthin und kauft eine Tonne derselben Sorte Äpfel. Wieviel muss er dafür bezahlen?

Zuerst genau hinhören und hinsehen, dann urteilen und handeln

Beispiel: Schlussrechnungen

- Aufgabe 1: Zwei Kilogramm Äpfel kosten 4 Euro. Wieviel kosten 3 Kilogramm Äpfel?
- Aufgabe 2: Herr Meier kauft bei einem Obstbauern ein Kilogramm Äpfel um 2 Euro. Zwei Tage später fährt er mit einem Lastwagen dorthin und kauft eine Tonne derselben Sorte Äpfel. Wieviel muss er dafür bezahlen?
- **Keine Antwort möglich, solange der Zusammenhang zwischen Preis und Masse der Äpfel nicht bekannt ist.**

Zuerst genau hinhören und hinsehen, dann urteilen und handeln

Beispiel: Schlussrechnungen

- Aufgabe 1: Zwei Kilogramm Äpfel kosten 4 Euro. Wieviel kosten 3 Kilogramm Äpfel?
- Aufgabe 2: Herr Meier kauft bei einem Obstbauern ein Kilogramm Äpfel um 2 Euro. Zwei Tage später fährt er mit einem Lastwagen dorthin und kauft eine Tonne derselben Sorte Äpfel. Wieviel muss er dafür bezahlen?
- **Keine Antwort möglich, solange der Zusammenhang zwischen Preis und Masse der Äpfel nicht bekannt ist.**
- Wenn im Obstgeschäft die Aktion „Nimm drei, zahl zwei“ läuft, kosten 3 Kilogramm Äpfel 4 Euro.

Zuerst genau hinhören und hinsehen, dann urteilen und handeln

Beispiel: Schlussrechnungen

- Aufgabe 1: Zwei Kilogramm Äpfel kosten 4 Euro. Wieviel kosten 3 Kilogramm Äpfel?
- Aufgabe 2: Herr Meier kauft bei einem Obstbauern ein Kilogramm Äpfel um 2 Euro. Zwei Tage später fährt er mit einem Lastwagen dorthin und kauft eine Tonne derselben Sorte Äpfel. Wieviel muss er dafür bezahlen?
- **Keine Antwort möglich, solange der Zusammenhang zwischen Preis und Masse der Äpfel nicht bekannt ist.**
- Wenn im Obstgeschäft die Aktion „Nimm drei, zahl zwei“ läuft, kosten 3 Kilogramm Äpfel 4 Euro.
- Jeder Händler weiß, dass Herr Meier sicher viel weniger als 2000 Euro zahlen wird.

Zuerst genau hinhören und hinsehen, dann urteilen und handeln!

- Steuer für ein steuerpflichtiges Einkommen von 25 000 Euro (im Jahr 2022): 3675 Euro.

Zuerst genau hinhören und hinsehen, dann urteilen und handeln!

- Steuer für ein steuerpflichtiges Einkommen von 25 000 Euro (im Jahr 2022): 3675 Euro.
- Steuer für ein steuerpflichtiges Einkommen von 50 000 (im Jahr 2022)?

Zuerst genau hinhören und hinsehen, dann urteilen und handeln!

- Steuer für ein steuerpflichtiges Einkommen von 25 000 Euro (im Jahr 2022): 3675 Euro.
- Steuer für ein steuerpflichtiges Einkommen von 50 000 (im Jahr 2022)?
- 13 605 Euro (für das doppelte Einkommen 50 000 Euro zahlt man mehr als dreimal so viel Steuer).

Zuerst genau hinhören und hinsehen, dann urteilen und handeln!

- Steuer für ein steuerpflichtiges Einkommen von 25 000 Euro (im Jahr 2022): 3675 Euro.
- Steuer für ein steuerpflichtiges Einkommen von 50 000 (im Jahr 2022)?
- 13 605 Euro (für das doppelte Einkommen 50 000 Euro zahlt man mehr als dreimal so viel Steuer).
- Sachwissen nötig: Die Funktion, die jedem Einkommen die entsprechende Steuer zuordnet, ist nicht linear, sondern stückweise linear und stetig.

Zuerst genau hinhören und hinsehen, dann urteilen und handeln!

Für das Jahr 2022 wird die Steuer so berechnet:

- für den Einkommensanteil bis 11 000 Euro keine Steuer ,
- für den von 11 000 bis 18 000 Euro 20 Prozent,
- für den von 18 000 bis 31 000 Euro $32, 5$ Prozent,
- für den von 31 000 bis 60 000 Euro 42 Prozent,
- für 60 000 bis 90 000 Euro 48 Prozent,
- für den von 90 000 bis 1 000 000 Euro 50 Prozent und
- für den über einer Million Euro 55 Prozent.

Vorurteilsfrei Denken

- Setze die Buchstabenfolge fort: c,d,e,f,g,...

Vorurteilsfrei Denken

- Setze die Buchstabenfolge fort: c,d,e,f,g,...
- Antwort der Klavierschülerin: c,d,e,f,g,a,...

Vorurteilsfrei Denken

- Setze die Buchstabenfolge fort: c,d,e,f,g,...
- Antwort der Klavierschülerin: c,d,e,f,g,a,...
- Antwort im Deutschunterricht: c,d,e,f,g,h, ...

Vorurteilsfrei Denken

- Setze die Buchstabenfolge fort: c,d,e,f,g,...
- Antwort der Klavierschülerin: c,d,e,f,g,a,...
- Antwort im Deutschunterricht: c,d,e,f,g,h, ...
- Leider kommen Fragen dieses Typs in Aufnahmetests vor!

Vorurteilsfrei Denken

- Setze die Zahlenfolge fort: 1,2,3,...

Vorurteilsfrei Denken

- Setze die Zahlenfolge fort: 1,2,3,...
- Antwort des Walzertänzers: 1,2,3,1,2,3,...

Vorurteilsfrei Denken

- Setze die Zahlenfolge fort: 1,2,3,...
- Antwort des Walzertänzers: 1,2,3,1,2,3,...
- Antwort nach einem Mathematikstudium: Es gibt unendlich viele Möglichkeiten, Bildungsgesetze zur Fortsetzung von 1,2,3,... anzugeben, die nur Addition und Multiplikation verwenden.

Vorurteilsfrei Denken

- Setze die Zahlenfolge fort: 1,2,3,...
- Antwort des Walzertänzers: 1,2,3,1,2,3,...
- Antwort nach einem Mathematikstudium: Es gibt unendlich viele Möglichkeiten, Bildungsgesetze zur Fortsetzung von 1,2,3,... anzugeben, die nur Addition und Multiplikation verwenden.
  - Zum Beispiel: "Für jede Zahl n wähle als n-tes Glied der Folge $(n-3).(n-2).(n-1)+n$".

Vorurteilsfrei Denken

- Setze die Zahlenfolge fort: 1,2,3,...
- Antwort des Walzertänzers: 1,2,3,1,2,3,...
- Antwort nach einem Mathematikstudium: Es gibt unendlich viele Möglichkeiten, Bildungsgesetze zur Fortsetzung von 1,2,3,... anzugeben, die nur Addition und Multiplikation verwenden.
  - Zum Beispiel: "Für jede Zahl n wähle als n-tes Glied der Folge $(n-3).(n-2).(n-1)+n$".
  - Damit erhält man

Vorurteilsfrei Denken

- Setze die Zahlenfolge fort: 1,2,3,...
- Antwort des Walzertänzers: 1,2,3,1,2,3,...
- Antwort nach einem Mathematikstudium: Es gibt unendlich viele Möglichkeiten, Bildungsgesetze zur Fortsetzung von 1,2,3,... anzugeben, die nur Addition und Multiplikation verwenden.
  - Zum Beispiel: "Für jede Zahl n wähle als n-tes Glied der Folge $(n-3).(n-2).(n-1)+n$".
  - Damit erhält man
  - $(-2).(-1).0+1=1$,
    $(-1).0.1+2=2$,
    $0.1.2+3=3$,
    $1.2.3+4=10,\ldots$.

Vorurteilsfrei Denken

- Setze die Zahlenfolge fort: 1,2,3,...
- Antwort des Walzertänzers: 1,2,3,1,2,3,...
- Antwort nach einem Mathematikstudium: Es gibt unendlich viele Möglichkeiten, Bildungsgesetze zur Fortsetzung von 1,2,3,... anzugeben, die nur Addition und Multiplikation verwenden.
  - Zum Beispiel: "Für jede Zahl n wähle als n-tes Glied der Folge $(n-3).(n-2).(n-1)+n$".
  - Damit erhält man
  - $(-2).(-1).0+1=1$,
    $(-1).0.1+2=2$,
    $0.1.2+3=3$,
    $1.2.3+4=10, \ldots$.
- Kommen solche Fragen in Tests vor, werden nicht kognitive Fähigkeiten überprüft, sondern ob jemand so wie die meisten denkt.

Vorurteilsfrei Denken

Beispiel:
$f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$

- $f(28) = 14$, $f(16) = 8$, $f(8) = 4$, $f(20) = ?$

Vorurteilsfrei Denken

Beispiel:
$f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$

- $f(28) = 14$, $f(16) = 8$, $f(8) = 4$, $f(20) = ?$
- Richtige Antwort: $f(20) = 7$

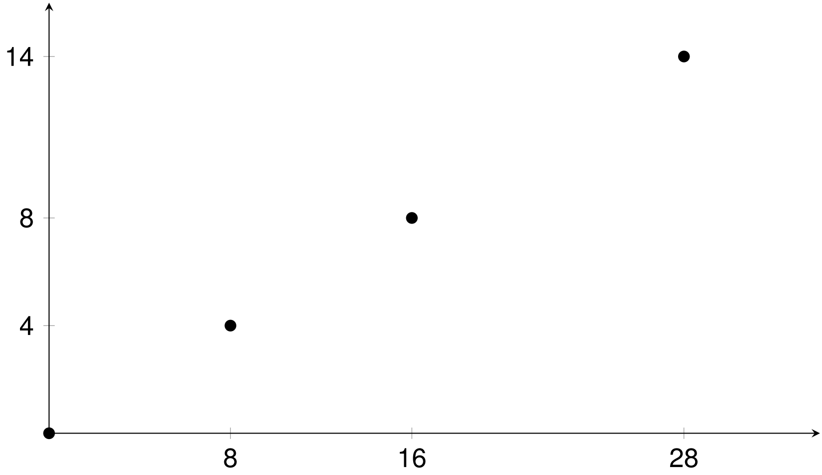
Vorurteilsfrei Denken

Beispiel:
$f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$

- $f(28) = 14$, $f(16) = 8$, $f(8) = 4$, $f(20) =?$
- Richtige Antwort: $f(20) = 7$
- $f(n)$ ist die Anzahl der Buchstaben des deutschen Wortes für die Zahl n.

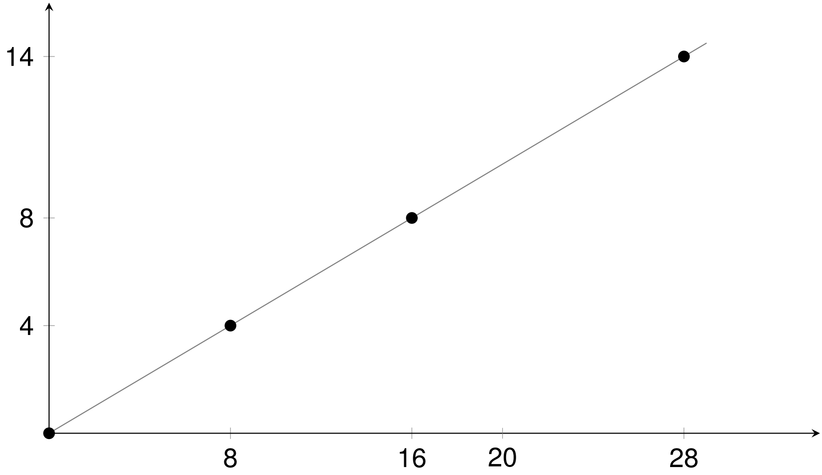
Vorurteilsfrei Denken

$f(28) = 14$, $f(16) = 8$, $f(8) = 4$, $f(20) = ?$



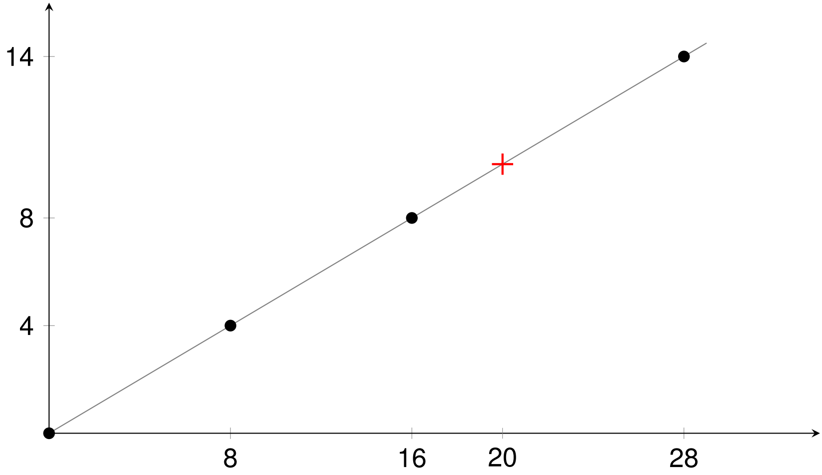
Vorurteilsfrei Denken

$f(28) = 14$, $f(16) = 8$, $f(8) = 4$, $f(20) = ?$



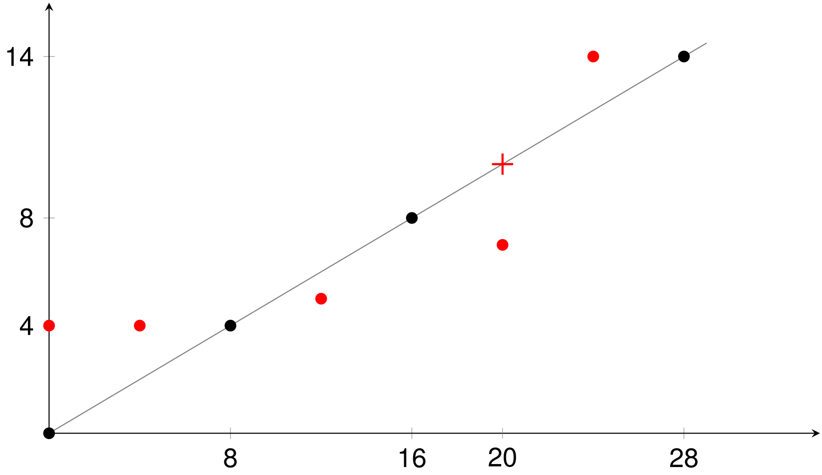
Vorurteilsfrei Denken

$f(28) = 14$, $f(16) = 8$, $f(8) = 4$, $f(20) = ?$



Vorurteilsfrei Denken

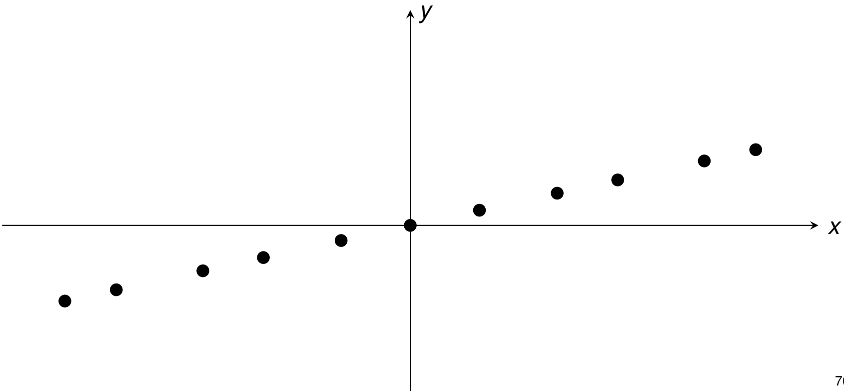
$f(28) = 14$, $f(16) = 8$, $f(8) = 4$, $f(20) = ?$



Vorurteilsfrei Denken

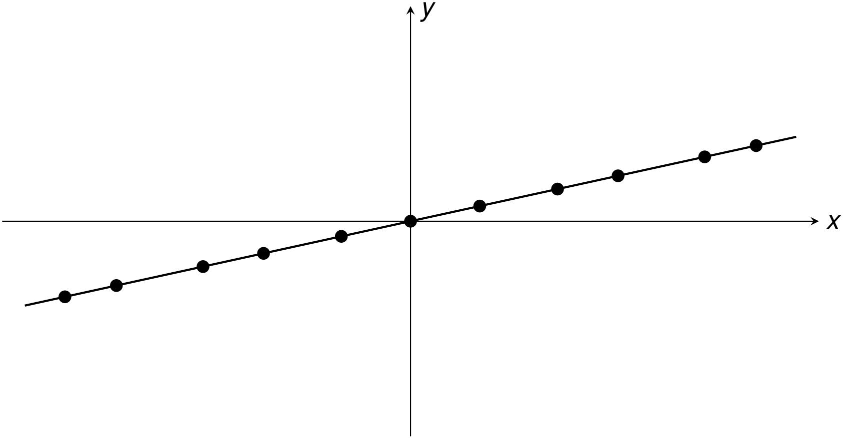
Gegeben sind Zahlenpaare $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \ldots, (x_n, y_n)$. Gesucht ist eine Funktion $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ mit $f(x_i) = y_i$, $i = 1, \ldots, n$.

Ohne ausreichendes Wissen über den Vorgang, aus dem die Zahlenpaare entstanden sind, kann man die Aufgabe nicht lösen. Wenn diese Punkte wie im folgenden Bild alle auf einer Geraden liegen,



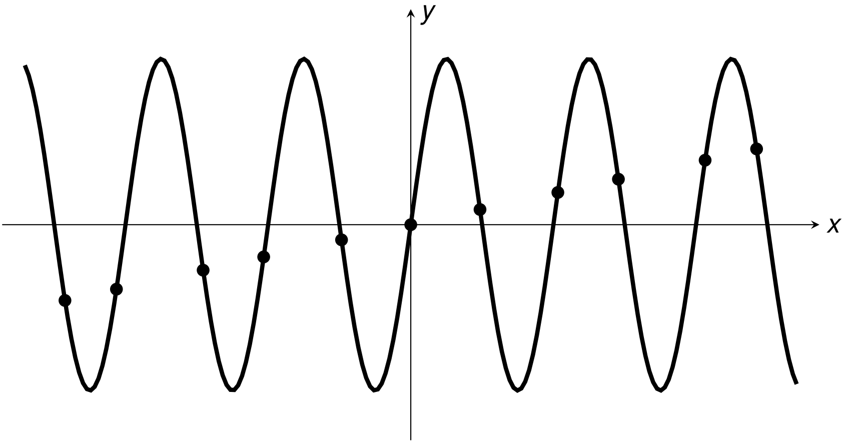
Vorurteilsfrei Denken

ist die Versuchung groß, den betracheten Vorgang durch eine lineare Funktion zu beschreiben:



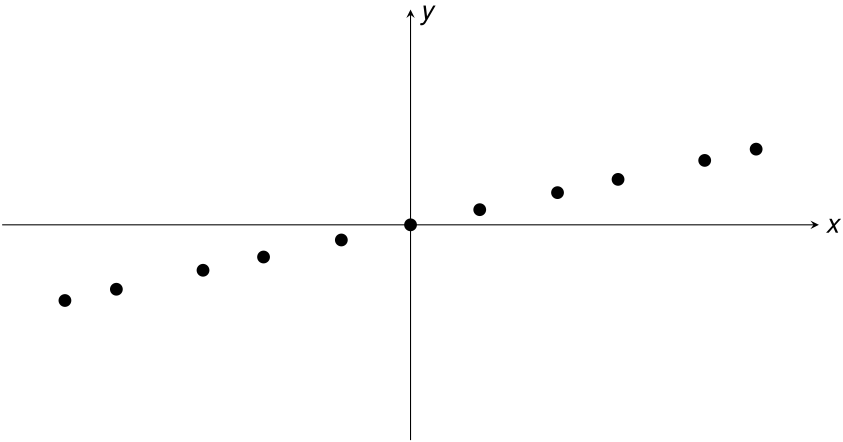
Vorurteilsfrei Denken

Wenn man allerdings außer den gemessenen Zahlenpaaren nichts über den Vorgang weiß, ist das voreilig.
Wenn der Vorgang periodisch ist, wäre ihm eine Beschreibung durch eine Sinusfunktion wie im folgenden Bild besser angepasst.



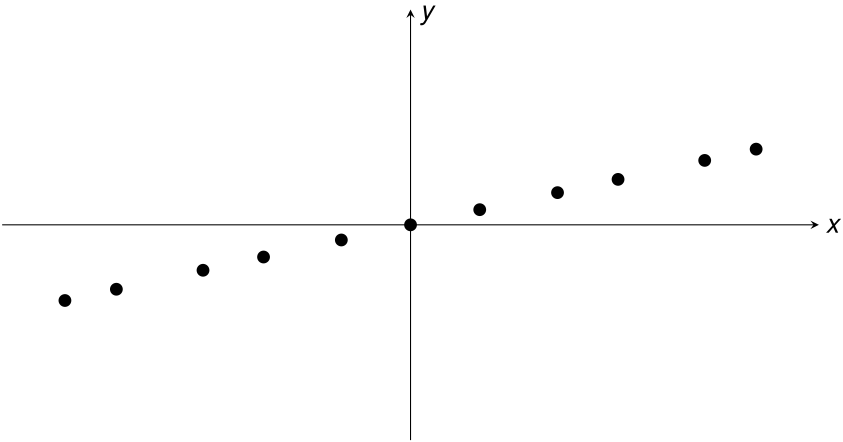
Vorurteilsfrei Denken

Wenn der Vorgang einen Impuls beschreibt:



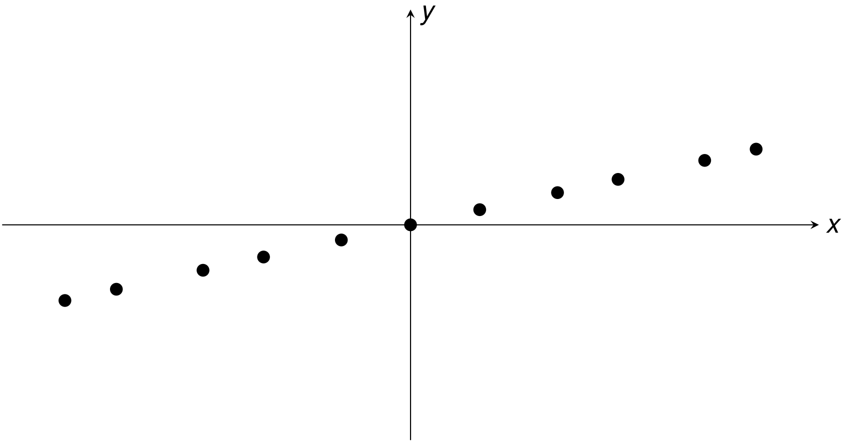
Vorurteilsfrei Denken

Wenn der Vorgang einen Impuls beschreibt:



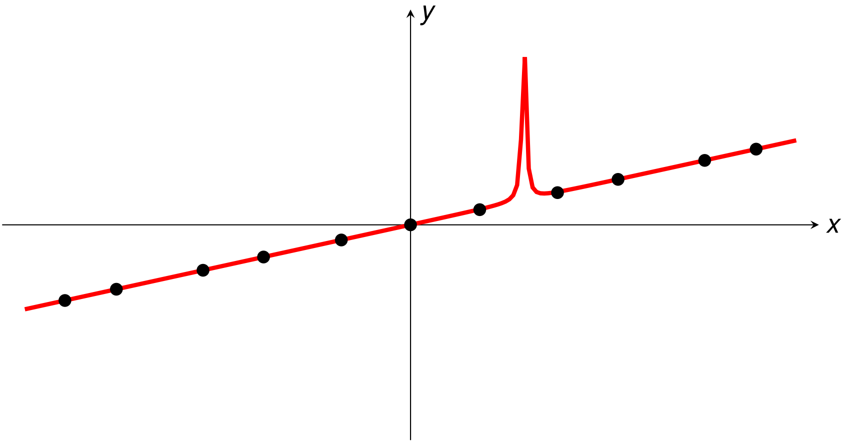
Vorurteilsfrei Denken

Wenn der Vorgang einen Impuls beschreibt:



Vorurteilsfrei Denken

Wenn der Vorgang einen Impuls beschreibt:



Klar und genau denken, verständlich und präzise sprechen

- Was heißt „Mache den Nenner wurzelfrei!“(aus einem Schulbuch der 9. Schulstufe)?

$$\frac{2\sqrt{5}+7}{3\sqrt{5}-2}$$

Klar und genau denken, verständlich und präzise sprechen

- Was heißt „Mache den Nenner wurzelfrei!"(aus einem Schulbuch der 9. Schulstufe)?

$$\frac{2\sqrt{5}+7}{3\sqrt{5}-2}$$

- Einfachste Lösung:

$$\frac{\left(\frac{2\sqrt{5}+7}{3\sqrt{5}-2}\right)}{1}$$

Klar und genau denken, verständlich und präzise sprechen

- Was heißt „Mache den Nenner wurzelfrei!“(aus einem Schulbuch der 9. Schulstufe)?
$$\frac{2\sqrt{5}+7}{3\sqrt{5}-2}$$
- Einfachste Lösung:
$$\frac{\left(\frac{2\sqrt{5}+7}{3\sqrt{5}-2}\right)}{1}$$
- Oder: $2,436626815$ $(= \frac{2436626815}{10^9})$

Klar und genau denken, verständlich und präzise sprechen

- Klare Formulierung der Aufgabe: Berechne rationale Zahlen (Bruchzahlen) a und b so, dass

$$\frac{2\sqrt{5}+7}{3\sqrt{5}-2} = a\sqrt{5}+b \text{ ist.}$$

Klar und genau denken, verständlich und präzise sprechen

- Klare Formulierung der Aufgabe: Berechne rationale Zahlen (Bruchzahlen) a und b so, dass

$$\frac{2\sqrt{5}+7}{3\sqrt{5}-2} = a\sqrt{5}+b \text{ ist.}$$

- Das legt nahe, wie man die Aufgabe lösen kann:

Klar und genau denken, verständlich und präzise sprechen

- Klare Formulierung der Aufgabe: Berechne rationale Zahlen (Bruchzahlen) a und b so, dass

$$\frac{2\sqrt{5}+7}{3\sqrt{5}-2} = a\sqrt{5}+b \text{ ist.}$$

- Das legt nahe, wie man die Aufgabe lösen kann:
- Man multipliziert man auf beiden Seiten des Gleichheitszeichens mit $3\sqrt{5}-2$ und erhält:

Klar und genau denken, verständlich und präzise sprechen

- Klare Formulierung der Aufgabe: Berechne rationale Zahlen (Bruchzahlen) a und b so, dass

$$\frac{2\sqrt{5}+7}{3\sqrt{5}-2} = a\sqrt{5}+b \text{ ist.}$$

- Das legt nahe, wie man die Aufgabe lösen kann:
- Man multipliziert man auf beiden Seiten des Gleichheitszeichens mit $3\sqrt{5}-2$ und erhält:
-
$$2\sqrt{5}+7 = (3\sqrt{5}-2)\cdot(a\sqrt{5}+b) \qquad \text{und daraus}$$

Klar und genau denken, verständlich und präzise sprechen

- Klare Formulierung der Aufgabe: Berechne rationale Zahlen (Bruchzahlen) a und b so, dass

$$\frac{2\sqrt{5}+7}{3\sqrt{5}-2} = a\sqrt{5}+b \text{ ist.}$$

- Das legt nahe, wie man die Aufgabe lösen kann:
- Man multipliziert man auf beiden Seiten des Gleichheitszeichens mit $3\sqrt{5}-2$ und erhält:
- $$2\sqrt{5}+7 = (3\sqrt{5}-2)\cdot(a\sqrt{5}+b) \qquad \text{und daraus}$$
- $$2\sqrt{5}+7 = (3b-2a)\sqrt{5}+(-2b+15a)$$

Klar und genau denken, verständlich und präzise sprechen

- Das gesuchte Zahlenpaar (a, b) ist Lösung des Systems linearer Gleichungen

Klar und genau denken, verständlich und präzise sprechen

- Das gesuchte Zahlenpaar (a, b) ist Lösung des Systems linearer Gleichungen
-

$$\begin{aligned} 3b - 2a &= 2 && (1) \\ -2b + 15a &= 7\,, && (2) \end{aligned}$$

Klar und genau denken, verständlich und präzise sprechen

- Das gesuchte Zahlenpaar (a, b) ist Lösung des Systems linearer Gleichungen
-

$$\begin{aligned} 3b - 2a &= 2 && (1) \\ -2b + 15a &= 7\,, && (2) \end{aligned}$$

- also ist $a = \frac{25}{41}$ und $b = \frac{44}{41}$.

Klar und genau denken, verständlich und präzise sprechen

- Das gesuchte Zahlenpaar (a, b) ist Lösung des Systems linearer Gleichungen
- $$\begin{aligned} 3b - 2a &= 2 && (1) \\ -2b + 15a &= 7\,, && (2) \end{aligned}$$
- also ist $a = \frac{25}{41}$ und $b = \frac{44}{41}$.
- Daher:
$$\frac{2\sqrt{5}+7}{3\sqrt{5}-2} = \frac{25}{41}\sqrt{5} + \frac{44}{41}$$

Klar und genau denken, verständlich und präzise sprechen

- Sie wissen wahrscheinlich aus der Schule noch die Summen- und Produktregel des Differenzierens:

Klar und genau denken, verständlich und präzise sprechen

- Sie wissen wahrscheinlich aus der Schule noch die Summen- und Produktregel des Differenzierens:
- Wenn zwei Funktionen differenzierbar sind, dann auch ihre Summe und ihr Produkt. Es ist

$$(f+g)' = f' + g' \text{ und } (f \cdot g)' = f'.g + f.g'.$$

Klar und genau denken, verständlich und präzise sprechen

- Sie wissen wahrscheinlich aus der Schule noch die Summen- und Produktregel des Differenzierens:
- Wenn zwei Funktionen differenzierbar sind, dann auch ihre Summe und ihr Produkt. Es ist

$$(f+g)' = f' + g' \text{ und } (f \cdot g)' = f'.g + f.g'.$$

- Aber wer weiß, was f+g und f.g bedeuten?

Fachliche Anforderungen in der Sekundarstufe 1 werden häufig unterschätzt!

Einführung von Grundkonzepten:

- Zahlbereichserweiterungen

Fachliche Anforderungen in der Sekundarstufe 1 werden häufig unterschätzt!

Einführung von Grundkonzepten:

- Zahlbereichserweiterungen
- Umgang mit Rechenregeln

Fachliche Anforderungen in der Sekundarstufe 1 werden häufig unterschätzt!

Einführung von Grundkonzepten:

- Zahlbereichserweiterungen
- Umgang mit Rechenregeln
- Rationale Zahlen (Rechenoperationen, Darstellung)

Fachliche Anforderungen in der Sekundarstufe 1 werden häufig unterschätzt!

Einführung von Grundkonzepten:

- Zahlbereichserweiterungen
- Umgang mit Rechenregeln
- Rationale Zahlen (Rechenoperationen, Darstellung)
- Lösen von Aufgaben (z.B. Gleichungen) durch äquivalentes Umformen (Grundstrategie)

Fachliche Anforderungen in der Sekundarstufe 1 werden häufig unterschätzt!

Einführung von Grundkonzepten:

- Zahlbereichserweiterungen
- Umgang mit Rechenregeln
- Rationale Zahlen (Rechenoperationen, Darstellung)
- Lösen von Aufgaben (z.B. Gleichungen) durch äquivalentes Umformen (Grundstrategie)
- Beschreibung von unendlichen Lösungsmengen durch endlich viele Daten

Fachliche Anforderungen in der Sekundarstufe 1 werden häufig unterschätzt!

Einführung von Grundkonzepten:

- Zahlbereichserweiterungen
- Umgang mit Rechenregeln
- Rationale Zahlen (Rechenoperationen, Darstellung)
- Lösen von Aufgaben (z.B. Gleichungen) durch äquivalentes Umformen (Grundstrategie)
- Beschreibung von unendlichen Lösungsmengen durch endlich viele Daten
- Grundbegriffe der Geometrie (Länge, Winkel, Flächeninhalt, Volumen, parallel Verschieben, Drehung)

Fachliche Anforderungen in der Sekundarstufe 1 werden häufig unterschätzt!

Einführung von Grundkonzepten:

- Zahlbereichserweiterungen
- Umgang mit Rechenregeln
- Rationale Zahlen (Rechenoperationen, Darstellung)
- Lösen von Aufgaben (z.B. Gleichungen) durch äquivalentes Umformen (Grundstrategie)
- Beschreibung von unendlichen Lösungsmengen durch endlich viele Daten
- Grundbegriffe der Geometrie (Länge, Winkel, Flächeninhalt, Volumen, parallel Verschieben, Drehung)
- Koordinatensystem in der Ebene (Ebene als $\mathbb{R}^2$)

Fachliche Anforderungen in der Sekundarstufe 1 werden häufig unterschätzt!

Einführung von Grundkonzepten:

- Zahlbereichserweiterungen
- Umgang mit Rechenregeln
- Rationale Zahlen (Rechenoperationen, Darstellung)
- Lösen von Aufgaben (z.B. Gleichungen) durch äquivalentes Umformen (Grundstrategie)
- Beschreibung von unendlichen Lösungsmengen durch endlich viele Daten
- Grundbegriffe der Geometrie (Länge, Winkel, Flächeninhalt, Volumen, parallel Verschieben, Drehung)
- Koordinatensystem in der Ebene (Ebene als $\mathbb{R}^2$)
- beschreibende Statistik (Funktionen)

Fachliche Anforderungen in der Sekundarstufe 1 werden häufig unterschätzt!

Einführung von Grundkonzepten:

- Zahlbereichserweiterungen
- Umgang mit Rechenregeln
- Rationale Zahlen (Rechenoperationen, Darstellung)
- Lösen von Aufgaben (z.B. Gleichungen) durch äquivalentes Umformen (Grundstrategie)
- Beschreibung von unendlichen Lösungsmengen durch endlich viele Daten
- Grundbegriffe der Geometrie (Länge, Winkel, Flächeninhalt, Volumen, parallel Verschieben, Drehung)
- Koordinatensystem in der Ebene (Ebene als $\mathbb{R}^2$)
- beschreibende Statistik (Funktionen)
- mathematische Modellierung („Schlussrechnung“)

Fachliche Anforderungen in der Sekundarstufe 1 werden häufig unterschätzt!

Einführung von Grundkonzepten:

- Zahlbereichserweiterungen
- Umgang mit Rechenregeln
- Rationale Zahlen (Rechenoperationen, Darstellung)
- Lösen von Aufgaben (z.B. Gleichungen) durch äquivalentes Umformen (Grundstrategie)
- Beschreibung von unendlichen Lösungsmengen durch endlich viele Daten
- Grundbegriffe der Geometrie (Länge, Winkel, Flächeninhalt, Volumen, parallel Verschieben, Drehung)
- Koordinatensystem in der Ebene (Ebene als $\mathbb{R}^2$)
- beschreibende Statistik (Funktionen)
- mathematische Modellierung („Schlussrechnung")
- Algorithmisches Denken

Die richtige Fährte legen

- Bei der Planung des Unterrichts ist es einerseits wichtig, zurück zu schauen: Was haben die Schülerinnen und Schüler bisher gelernt? Worauf kann der Unterricht aufbauen?

Die richtige Fährte legen

- Bei der Planung des Unterrichts ist es einerseits wichtig, zurück zu schauen: Was haben die Schülerinnen und Schüler bisher gelernt? Worauf kann der Unterricht aufbauen?
- Andererseits ist es auch wichtig, nach Vorne zu schauen: Was wird in folgenden Schuljahren auf das zu unterrichtende Thema aufbauen? Wie soll es unterrichtet werden, damit die Schülerinnen und Schüler einen „roten Faden“ erkennen können?

Die richtige Fährte legen

- Bei der Planung des Unterrichts ist es einerseits wichtig, zurück zu schauen: Was haben die Schülerinnen und Schüler bisher gelernt? Worauf kann der Unterricht aufbauen?
- Andererseits ist es auch wichtig, nach Vorne zu schauen: Was wird in folgenden Schuljahren auf das zu unterrichtende Thema aufbauen? Wie soll es unterrichtet werden, damit die Schülerinnen und Schüler einen „roten Faden“ erkennen können?
- Das ist einer der Gründe, warum es sehr wichtig ist, dass Lehrpersonen der Sekundarstufe 1 für den Unterricht in der gesamten Sekundarstufe ausgebildet werden.

Die richtige Fährte legen: Binomische Formeln

- Oft wird ein „Term“ als „sinnvoller mathematischer Ausdruck“ oder „Rechenausdruck“ bezeichnet.

Die richtige Fährte legen: Binomische Formeln

- Oft wird ein „Term“ als „sinnvoller mathematischer Ausdruck“ oder „Rechenausdruck“ bezeichnet.
- Aus einem österreichischen Schulbuch der 7. Schulstufe:
  Terme der Art $(a + b)$, $(a - b)$ *heißen Binome.*
  Es gilt: $(a + b) \cdot (a - b) = a^2 - b^2$.

Die richtige Fährte legen: Binomische Formeln

- Oft wird ein „Term“ als „sinnvoller mathematischer Ausdruck“ oder „Rechenausdruck“ bezeichnet.
- Aus einem österreichischen Schulbuch der 7. Schulstufe:
  Terme der Art $(a+b)$*,* $(a-b)$ *heißen Binome.*
  Es gilt: $(a+b)\cdot(a-b)=a^2-b^2$*.*
- Matrizenrechnung in der 10. Schulstufe (BHS): Es gibt 2×2-Matrizen a, b mit $(a+b)\cdot(a-b)\neq a^2-b^2$

Die richtige Fährte legen: Binomische Formeln

- Oft wird ein „Term“ als „sinnvoller mathematischer Ausdruck“ oder „Rechenausdruck“ bezeichnet.
- Aus einem österreichischen Schulbuch der 7. Schulstufe:
  Terme der Art $(a+b)$*,* $(a-b)$ *heißen Binome.*
  Es gilt: $(a+b)\cdot(a-b)=a^2-b^2$*.*
- Matrizenrechnung in der 10. Schulstufe (BHS): Es gibt 2×2-Matrizen a, b mit $(a+b)\cdot(a-b)\neq a^2-b^2$
- Was ist falsch?

Die richtige Fährte legen: Binomische Formeln

- Oft wird ein „Term“ als „sinnvoller mathematischer Ausdruck“ oder „Rechenausdruck“ bezeichnet.
- Aus einem österreichischen Schulbuch der 7. Schulstufe:
  Terme der Art $(a + b)$*,* $(a - b)$ *heißen Binome.*
  Es gilt: $(a + b) \cdot (a - b) = a^2 - b^2$*.*
- Matrizenrechnung in der 10. Schulstufe (BHS): Es gibt 2×2-Matrizen a, b mit $(a + b) \cdot (a - b) \neq a^2 - b^2$
- Was ist falsch?
- Kann man mit Matrizen keinen „Rechenausdruck“ oder keinen „sinnvollen mathematischen Ausdruck“ bilden?

Die richtige Fährte legen: Binomische Formeln

- „Termrechnung“ bedeutet „Rechnen in kommutativen Ringen“. Wegen $(a+b)(a-b) = a \cdot a - a \cdot b + b \cdot a - b \cdot b = a^2 - b^2$ gilt diese binomische Formel in allen kommutativen Ringen. Die Matrizenmultiplikation ist aber nicht kommutativ.

Die richtige Fährte legen: Binomische Formeln

- „Termrechnung“ bedeutet „Rechnen in kommutativen Ringen“. Wegen $(a+b)(a-b) = a \cdot a - a \cdot b + b \cdot a - b \cdot b = a^2 - b^2$ gilt diese binomische Formel in allen kommutativen Ringen. Die Matrizenmultiplikation ist aber nicht kommutativ.
- Im Schulunterricht treten im wesentlichen zwei Beispiele von kommutativen Ringen auf: Zahlbereiche und der Ring aller reellwertigen Funktionen

Die richtige Fährte legen: Binomische Formeln

- „Termrechnung“ bedeutet „Rechnen in kommutativen Ringen“. Wegen $(a+b)(a-b) = a \cdot a - a \cdot b + b \cdot a - b \cdot b = a^2 - b^2$ gilt diese binomische Formel in allen kommutativen Ringen. Die Matrizenmultiplikation ist aber nicht kommutativ.

- Im Schulunterricht treten im wesentlichen zwei Beispiele von kommutativen Ringen auf: Zahlbereiche und der Ring aller reellwertigen Funktionen

- In der Sekundarstufe 1 bedeutet „Termrechnung“ „Einüben der Rechenregeln für das Rechnen mit ganzen und rationalen Zahlen“.

Die richtige Fährte legen: Binomische Formeln

- Bessere Formulierung der binomischen Formeln in der Sekundarstufe 1: Für alle Zahlen a und b ist $a^2 - b^2 = (a + b) \cdot (a - b)$.

Die richtige Fährte legen: Binomische Formeln

- Bessere Formulierung der binomischen Formeln in der Sekundarstufe 1: Für alle Zahlen a und b ist $a^2 - b^2 = (a + b) \cdot (a - b)$.
- In Worten: Die Differenz der Quadrate zweier Zahlen ist das Produkt von deren Summe und deren Differenz.

Die richtige Fährte legen: Binomische Formeln

- Bessere Formulierung der binomischen Formeln in der Sekundarstufe 1: Für alle Zahlen a und b ist $a^2 - b^2 = (a + b) \cdot (a - b)$.
- In Worten: Die Differenz der Quadrate zweier Zahlen ist das Produkt von deren Summe und deren Differenz.
- Wer kann im Kopf $401^2 - 399^2$ berechnen?

Die richtige Fährte legen: Binomische Formeln

- Bessere Formulierung der binomischen Formeln in der Sekundarstufe 1: Für alle Zahlen a und b ist $a^2 - b^2 = (a + b) \cdot (a - b)$.
- In Worten: Die Differenz der Quadrate zweier Zahlen ist das Produkt von deren Summe und deren Differenz.
- Wer kann im Kopf $401^2 - 399^2$ berechnen?
- $401^2 - 399^2 = (401 + 399) \cdot (401 - 399) = 800 \cdot 2 = 1600$

Die richtige Fährte legen: Primzahlen

- Bruchzahlen sollen bestmöglich gekürzt werden, also muss man durch den ggT von Zähler und Nenner kürzen

Die richtige Fährte legen: Primzahlen

- Bruchzahlen sollen bestmöglich gekürzt werden, also muss man durch den ggT von Zähler und Nenner kürzen
- Weil jeder gemeinsame Teiler von zwei natürlichen Zahlen a und b auch ein Teiler von a+b und a-b ist, folgt:

Die richtige Fährte legen: Primzahlen

- Bruchzahlen sollen bestmöglich gekürzt werden, also muss man durch den ggT von Zähler und Nenner kürzen
- Weil jeder gemeinsame Teiler von zwei natürlichen Zahlen a und b auch ein Teiler von a+b und a-b ist, folgt:
- ggT(a,b) =ggT(a-b,b)

Die richtige Fährte legen: Primzahlen

- Bruchzahlen sollen bestmöglich gekürzt werden, also muss man durch den ggT von Zähler und Nenner kürzen
- Weil jeder gemeinsame Teiler von zwei natürlichen Zahlen a und b auch ein Teiler von a+b und a-b ist, folgt:
- ggT(a,b) =ggT(a-b,b)
- Euklidischer Algorithmus : Ersetze solange die größere der zwei Zahlen durch ihre Differenz, bis die zwei Zahlen gleich sind. Diese ist der gesuchte ggT.

Die richtige Fährte legen: Primzahlen

- Bruchzahlen sollen bestmöglich gekürzt werden, also muss man durch den ggT von Zähler und Nenner kürzen
- Weil jeder gemeinsame Teiler von zwei natürlichen Zahlen a und b auch ein Teiler von a+b und a-b ist, folgt:
- ggT(a,b) =ggT(a-b,b)
- Euklidischer Algorithmus : Ersetze solange die größere der zwei Zahlen durch ihre Differenz, bis die zwei Zahlen gleich sind. Diese ist der gesuchte ggT.
- Beispiel: ggT(221,136) = ggT(85,136) = ggT(85,51) = ggT(34,51) = ggT(34,17) = ggT(17,17) = 17

Die richtige Fährte legen: Primzahlen

- Bruchzahlen sollen bestmöglich gekürzt werden, also muss man durch den ggT von Zähler und Nenner kürzen
- Weil jeder gemeinsame Teiler von zwei natürlichen Zahlen a und b auch ein Teiler von a+b und a-b ist, folgt:
- ggT(a,b) =ggT(a-b,b)
- Euklidischer Algorithmus : Ersetze solange die größere der zwei Zahlen durch ihre Differenz, bis die zwei Zahlen gleich sind. Diese ist der gesuchte ggT.
- Beispiel: ggT(221,136) = ggT(85,136) = ggT(85,51) = ggT(34,51) = ggT(34,17) = ggT(17,17) = 17
- In den meisten österreichischen Schulbüchern der 6. Schulstufe wird der ggT zweier natürlicher Zahlen durch Primfaktorzerlegung ermittelt (obwohl Primzahlen nicht im Lehrplan stehen).

Die richtige Fährte legen: Primzahlen

In den BHS wird in der 12. Schulstufe der RSA-Algorithmus zur Verschlüsselung mit öffentlichem Schlüssel (z.B. für PIN-Code einer Debit-Karte an einem Bankomat) erklärt:

- Der Empfänger gibt zwei große Zahlen n und e bekannt.

Die richtige Fährte legen: Primzahlen

In den BHS wird in der 12. Schulstufe der RSA-Algorithmus zur Verschlüsselung mit öffentlichem Schlüssel (z.B. für PIN-Code einer Debit-Karte an einem Bankomat) erklärt:

- Der Empfänger gibt zwei große Zahlen n und e bekannt.
- Der Sender will a verschlüsseln und berechnet $b := a^e \, mod \, n$, den Rest der Potenz a^e nach Division mit Rest durch n.

Die richtige Fährte legen: Primzahlen

In den BHS wird in der 12. Schulstufe der RSA-Algorithmus zur Verschlüsselung mit öffentlichem Schlüssel (z.B. für PIN-Code einer Debit-Karte an einem Bankomat) erklärt:

- Der Empfänger gibt zwei große Zahlen n und e bekannt.
- Der Sender will a verschlüsseln und berechnet $b := a^e \mathit{mod}\, n$, den Rest der Potenz a^e nach Division mit Rest durch n.
- Der Empfänger weiß, dass $n = p.q$ das Produkt von zwei Primzahlen p und q ist und hat mit dem Erweiterten Euklidischen Algorithmus eine natürliche Zahl d mit $(p-1)(q-1).c + e.d = 1$ berechnet.

Die richtige Fährte legen: Primzahlen

In den BHS wird in der 12. Schulstufe der RSA-Algorithmus zur Verschlüsselung mit öffentlichem Schlüssel (z.B. für PIN-Code einer Debit-Karte an einem Bankomat) erklärt:

- Der Empfänger gibt zwei große Zahlen n und e bekannt.
- Der Sender will a verschlüsseln und berechnet $b := a^e \, mod \, n$, den Rest der Potenz a^e nach Division mit Rest durch n.
- Der Empfänger weiß, dass $n = p.q$ das Produkt von zwei Primzahlen p und q ist und hat mit dem Erweiterten Euklidischen Algorithmus eine natürliche Zahl d mit $(p-1)(q-1).c + e.d = 1$ berechnet.
- Der Empfänger berechnet $b^d \, mod \, n$, den Rest der Potenz b^d nach Division mit Rest durch n, und das ist a.

Die richtige Fährte legen: Primzahlen

In den BHS wird in der 12. Schulstufe der RSA-Algorithmus zur Verschlüsselung mit öffentlichem Schlüssel (z.B. für PIN-Code einer Debit-Karte an einem Bankomat) erklärt:

- Der Empfänger gibt zwei große Zahlen n und e bekannt.
- Der Sender will a verschlüsseln und berechnet $b := a^e \, mod \, n$, den Rest der Potenz a^e nach Division mit Rest durch n.
- Der Empfänger weiß, dass $n = p.q$ das Produkt von zwei Primzahlen p und q ist und hat mit dem Erweiterten Euklidischen Algorithmus eine natürliche Zahl d mit $(p-1)(q-1).c + e.d = 1$ berechnet.
- Der Empfänger berechnet $b^d \, mod \, n$, den Rest der Potenz b^d nach Division mit Rest durch n, und das ist a.
- Warum kann nicht jeder „einfach“ n in Primfaktoren zerlegen und d berechnen?

Die richtige Fährte legen: Primzahlen

- Die Primfaktorzerlegung ist sehr schwierig und wird in keinem effizienten Verfahren verwendet. Für „sehr große“ Zahlen würden alle Computer der Welt gemeinsam 100 Jahre brauchen, um deren Primfaktoren zu berechnen.

Die richtige Fährte legen: Primzahlen

- Die Primfaktorzerlegung ist sehr schwierig und wird in keinem effizienten Verfahren verwendet. Für „sehr große“ Zahlen würden alle Computer der Welt gemeinsam 100 Jahre brauchen, um deren Primfaktoren zu berechnen.
- In allen Computeralgebrasystemen wird zur Berechnung des ggT der euklidische Algorithmus verwendet, er ist leicht zu programmieren und sehr effizient.

Die richtige Fährte legen: Primzahlen

- Die Primfaktorzerlegung ist sehr schwierig und wird in keinem effizienten Verfahren verwendet. Für „sehr große" Zahlen würden alle Computer der Welt gemeinsam 100 Jahre brauchen, um deren Primfaktoren zu berechnen.
- In allen Computeralgebrasystemen wird zur Berechnung des ggT der euklidische Algorithmus verwendet, er ist leicht zu programmieren und sehr effizient.
- Berechnet man in der Sekundarstufe 1 den ggT mit der schwierigen Primfaktorzerlegung anstatt mit dem einfachen euklidischen Algorithmus, wird eine falsche Vorstellung erweckt (und die Chance vertan, die grundlegende Strategie des erlaubten Umformens früh einzuführen).

Die richtige Fährte legen: Lineare Gleichungen

Was haben die folgenden drei Aufgaben gemeinsam?

- 8. Schulstufe: Finde alle Paare reeller Zahlen (x, y) mit
  $3x + 4y = 5$!
  (lineare Gleichung mit 2 Unbekannten)

Die richtige Fährte legen: Lineare Gleichungen

Was haben die folgenden drei Aufgaben gemeinsam?

- 8. Schulstufe: Finde alle Paare reeller Zahlen (x, y) mit $3x + 4y = 5$!
  (lineare Gleichung mit 2 Unbekannten)
- 11. Schulstufe: Finde alle Folgen $(a(n))_{n \in \mathbb{N}}$ mit:
  für alle natürlichen Zahlen n ist $a(n+1) - 2.a(n) = 6$!
  (lineare Differenzengleichung der Ordnung 1)

Die richtige Fährte legen: Lineare Gleichungen

Was haben die folgenden drei Aufgaben gemeinsam?

- 8. Schulstufe: Finde alle Paare reeller Zahlen (x, y) mit
  $3x + 4y = 5$!
  (lineare Gleichung mit 2 Unbekannten)

- 11. Schulstufe: Finde alle Folgen $(a(n))_{n\in\mathbb{N}}$ mit:
  für alle natürlichen Zahlen n ist $a(n+1) - 2.a(n) = 6$!
  (lineare Differenzengleichung der Ordnung 1)

- 12. Schulstufe: Finde alle differenzierbaren Funktionen f mit
  $f' - 2f = 7$!
  (lineare Differenzialgleichung der Ordnung 1)

Die richtige Fährte legen: Lineare Gleichungen

Bei allen drei löst man zuerst die entsprechende homogene Gleichung und stellt für diese fest, dass mit einer Lösung auch alle Vielfachen Lösungen sind und dass alle Lösungen Vielfache einer einzigen sind.

- Finde alle Paare reeller Zahlen (x, y) mit 3x+4y=0 !
  Lösungsmenge: alle Vielfachen von $(-4, 3)$

Die richtige Fährte legen: Lineare Gleichungen

Bei allen drei löst man zuerst die entsprechende homogene Gleichung und stellt für diese fest, dass mit einer Lösung auch alle Vielfachen Lösungen sind und dass alle Lösungen Vielfache einer einzigen sind.

- Finde alle Paare reeller Zahlen (x, y) mit 3x+4y=0 !
  Lösungsmenge: alle Vielfachen von $(-4, 3)$

- Finde alle Folgen $(a(n))_{n\in\mathbb{N}}$ mit:
  für alle natürlichen Zahlen n ist $a(n+1) - 2.a(n) = 0$!

  Lösungsmenge: alle Vielfachen der „geometrischen Folge“ $(2^n)_{n\in\mathbb{N}}$

Die richtige Fährte legen: Lineare Gleichungen

Bei allen drei löst man zuerst die entsprechende homogene Gleichung und stellt für diese fest, dass mit einer Lösung auch alle Vielfachen Lösungen sind und dass alle Lösungen Vielfache einer einzigen sind.

- Finde alle Paare reeller Zahlen (x, y) mit 3x+4y=0 !
  Lösungsmenge: alle Vielfachen von $(-4, 3)$

- Finde alle Folgen $(a(n))_{n\in\mathbb{N}}$ mit:
  für alle natürlichen Zahlen n ist $a(n+1) - 2.a(n) = 0$!

  Lösungsmenge: alle Vielfachen der „geometrischen Folge “ $(2^n)_{n\in\mathbb{N}}$

- Finde alle differenzierbaren Funktionen f mit $f' - 2f = 0$!

  Lösungsmenge: alle Vielfachen der „Exponentialfunktion“ g mit $g(t) = e^{2t}$

Die richtige Fährte legen: Lineare Gleichungen

Finde dann irgendeine Lösung der ursprünglichen Gleichung und addiere diese zu jedem Element der Lösungsmenge der homogenen Gleichung!
(Alle drei Aufgaben sind lineare Gleichungen mit eindimensionaler Lösungsmenge).

- $\{(1, \frac{1}{2}) + c.(-4, 3) \mid c \in \mathbb{R}\}$ Lm. von $3x + 4y = 5$
  (8. Schulstufe)

Die richtige Fährte legen: Lineare Gleichungen

Finde dann irgendeine Lösung der ursprünglichen Gleichung und addiere diese zu jedem Element der Lösungsmenge der homogenen Gleichung!
(Alle drei Aufgaben sind lineare Gleichungen mit eindimensionaler Lösungsmenge).

- $\{(1, \frac{1}{2}) + c.(-4, 3) \mid c \in \mathbb{R}\}$ Lm. von $3x + 4y = 5$
  (8. Schulstufe)
- $\{(-6)_{n\in\mathbb{N}} + c.(2^n)_{n\in\mathbb{N}} \mid c \in \mathbb{R}\}$ Lm. von $a(n+1) - 2.a(n) = 6$
  (11. Schulstufe)

Die richtige Fährte legen: Lineare Gleichungen

Finde dann irgendeine Lösung der ursprünglichen Gleichung und addiere diese zu jedem Element der Lösungsmenge der homogenen Gleichung!
(Alle drei Aufgaben sind lineare Gleichungen mit eindimensionaler Lösungsmenge).

- $\{(1, \frac{1}{2}) + c.(-4, 3) \mid c \in \mathbb{R}\}$ Lm. von $3x + 4y = 5$
  (8. Schulstufe)
- $\{(-6)_{n \in \mathbb{N}} + c.(2^n)_{n \in \mathbb{N}} \mid c \in \mathbb{R}\}$ Lm. von $a(n+1) - 2.a(n) = 6$
  (11. Schulstufe)
- $\{\frac{-7}{2} + c.g \mid c \in \mathbb{R}\}$, dabei ist g die Funktion mit $g(t) = e^{2t}$.
  Lm. von $f' - 2f = 7$
  (12. Schulstufe)

Persönlichkeitsbildung im Mathematikunterricht

- Im Mathematikunterricht lernt man nicht nur nützliche Verfahren zum Lösen verschiedener Aufgaben, sondern auch vorurteilsfrei und kritisch zu denken.

Persönlichkeitsbildung im Mathematikunterricht

- Im Mathematikunterricht lernt man nicht nur nützliche Verfahren zum Lösen verschiedener Aufgaben, sondern auch vorurteilsfrei und kritisch zu denken.
- Für eine demokratische Gesellschaft ist es wichtig, dass möglichst viele ihrer Menschen Behauptungen, Nachrichten oder Versprechungen nicht einfach für wahr halten, ohne Begründungen zu fordern oder zumindest „Ist das wirklich so?“ gefragt zu haben.

Persönlichkeitsbildung im Mathematikunterricht

- Im Mathematikunterricht lernt man nicht nur nützliche Verfahren zum Lösen verschiedener Aufgaben, sondern auch vorurteilsfrei und kritisch zu denken.
- Für eine demokratische Gesellschaft ist es wichtig, dass möglichst viele ihrer Menschen Behauptungen, Nachrichten oder Versprechungen nicht einfach für wahr halten, ohne Begründungen zu fordern oder zumindest „Ist das wirklich so?“ gefragt zu haben.
- Kein Unterricht ist „wertfrei“, auch der Mathematikunterricht nicht.

Persönlichkeitsbildung im Mathematikunterricht

- Im Mathematikunterricht lernt man nicht nur nützliche Verfahren zum Lösen verschiedener Aufgaben, sondern auch vorurteilsfrei und kritisch zu denken.
- Für eine demokratische Gesellschaft ist es wichtig, dass möglichst viele ihrer Menschen Behauptungen, Nachrichten oder Versprechungen nicht einfach für wahr halten, ohne Begründungen zu fordern oder zumindest „Ist das wirklich so?“ gefragt zu haben.
- Kein Unterricht ist „wertfrei“, auch der Mathematikunterricht nicht.
- Zwar sind die Ergebnisse der Mathematik, die unterrichtet werden, nicht von den Wertvorstellungen der jeweiligen Gesellschaft abhängig, aber sehr wohl die Art, wie diese vermittelt werden.

Persönlichkeitsbildung im Mathematikunterricht

- Die heutigen österreichischen Lehrpläne verlangen, dass im Mathematikunterricht auch Werte vermittelt werden, die für den Bestand unserer demokratischen Gesellschaft wichtig sind.

Persönlichkeitsbildung im Mathematikunterricht

- Die heutigen österreichischen Lehrpläne verlangen, dass im Mathematikunterricht auch Werte vermittelt werden, die für den Bestand unserer demokratischen Gesellschaft wichtig sind.
- Wenn im Mathematikunterricht erlernt wird, klar und genau zu denken, verständlich und präzise zu sprechen, Aufgaben systematisch abzuarbeiten, dann wird damit auch das Selbstbewusstsein der Kinder und Jugendlichen gestärkt.

Persönlichkeitsbildung im Mathematikunterricht

- Die heutigen österreichischen Lehrpläne verlangen, dass im Mathematikunterricht auch Werte vermittelt werden, die für den Bestand unserer demokratischen Gesellschaft wichtig sind.
- Wenn im Mathematikunterricht erlernt wird, klar und genau zu denken, verständlich und präzise zu sprechen, Aufgaben systematisch abzuarbeiten, dann wird damit auch das Selbstbewusstsein der Kinder und Jugendlichen gestärkt.
- Wer erfahren hat, dass man mathematische Aufgaben durch Nachdenken und Diskussion lösen kann, überträgt das vielleicht auch auf den persönlichen Bereich und kann dann Konflikte intelligenter lösen als durch Zuschlagen.

Persönlichkeitsbildung im Mathematikunterricht

Mehr dazu in

Pauer, F. (2021): Persönlichkeitsbildung im Mathematikunterricht. Schriftenreihe zur Didaktik der Mathematik der Österreichischen Mathematischen Gesellschaft (ÖMG) 53, 107-116.

http://www.oemg.ac.at/DK/Didaktikhefte/2021

Schlussbemerkungen

- Die Sprache im Mathematikunterricht in der Schule muss einfach und verständlich sein und möglichst wenige Fachbegriffe verwenden.

Schlussbemerkungen

- Die Sprache im Mathematikunterricht in der Schule muss einfach und verständlich sein und möglichst wenige Fachbegriffe verwenden.
- Die notwendigen Fachbegriffe müssen sorgfältig und präzise eingeführt werden (wenn auch nicht immer durch Definitionen im Sinn der Mathematik).

Schlussbemerkungen

- Die Sprache im Mathematikunterricht in der Schule muss einfach und verständlich sein und möglichst wenige Fachbegriffe verwenden.
- Die notwendigen Fachbegriffe müssen sorgfältig und präzise eingeführt werden (wenn auch nicht immer durch Definitionen im Sinn der Mathematik).
- Die Inhalte sollen so dargestellt werden, dass sie für die Schüler/innen (in der jeweiligen Altersstufe und mit ihrem jeweiligen Wissensstand) gut verständlich sind.

Schlussbemerkungen

- Die Sprache im Mathematikunterricht in der Schule muss einfach und verständlich sein und möglichst wenige Fachbegriffe verwenden.
- Die notwendigen Fachbegriffe müssen sorgfältig und präzise eingeführt werden (wenn auch nicht immer durch Definitionen im Sinn der Mathematik).
- Die Inhalte sollen so dargestellt werden, dass sie für die Schüler/innen (in der jeweiligen Altersstufe und mit ihrem jeweiligen Wissensstand) gut verständlich sind.
- Möglichst viele Inhalte sollen nachvollziehbar hergeleitet und begründet werden.

Schlussbemerkungen

- Die Übungsaufgaben müssen zugleich einfach und präzise formuliert werden. Sie sollen das kritische und vorurteilsfreie Denken, Modellieren und Problemlösen trainieren.

Schlussbemerkungen

- Die Übungsaufgaben müssen zugleich einfach und präzise formuliert werden. Sie sollen das kritische und vorurteilsfreie Denken, Modellieren und Problemlösen trainieren.
- Stehen für ein Thema mehrere Algorithmen zur Auswahl, soll jener verwendet werden, der einfach zu erklären und „rechnerisch gut“ ist.

Schlussbemerkungen

- Die Übungsaufgaben müssen zugleich einfach und präzise formuliert werden. Sie sollen das kritische und vorurteilsfreie Denken, Modellieren und Problemlösen trainieren.
- Stehen für ein Thema mehrere Algorithmen zur Auswahl, soll jener verwendet werden, der einfach zu erklären und „rechnerisch gut“ ist.
- Die Planung des Unterrichts muss nicht nur berücksichtigen, was zu einem Thema schon bekannt ist, sondern auch, was in späteren Jahren darauf aufbauen soll.

Schlussbemerkungen

- Die Übungsaufgaben müssen zugleich einfach und präzise formuliert werden. Sie sollen das kritische und vorurteilsfreie Denken, Modellieren und Problemlösen trainieren.
- Stehen für ein Thema mehrere Algorithmen zur Auswahl, soll jener verwendet werden, der einfach zu erklären und „rechnerisch gut“ ist.
- Die Planung des Unterrichts muss nicht nur berücksichtigen, was zu einem Thema schon bekannt ist, sondern auch, was in späteren Jahren darauf aufbauen soll.
- **Ein solche Unterricht erfordert Lehrpersonen mit hoher fachlicher und didaktischer Qualität.**

Schlussbemerkungen

- Bachelor- und Masterstudium Lehramt Sekundarstufe mit insgesamt 6 Jahren für *alle* Lehrpersonen in der Sekundarstufe war ein bildungspolitisch wichtiger Schritt.

Schlussbemerkungen

- Bachelor- und Masterstudium Lehramt Sekundarstufe mit insgesamt 6 Jahren für *alle* Lehrpersonen in der Sekundarstufe war ein bildungspolitisch wichtiger Schritt.
- Zieht man die hohe Verantwortung des Lehrberufs, die umfangreichen fachlichen, fachdidaktischen und pädagogischen Aufgaben und die damit verbundenen Herausforderungen an die Lehrpersonen in Betracht, dann sind 6 Jahre Studium keineswegs zu lang.

Schlussbemerkungen

- Bachelor- und Masterstudium Lehramt Sekundarstufe mit insgesamt 6 Jahren für *alle* Lehrpersonen in der Sekundarstufe war ein bildungspolitisch wichtiger Schritt.
- Zieht man die hohe Verantwortung des Lehrberufs, die umfangreichen fachlichen, fachdidaktischen und pädagogischen Aufgaben und die damit verbundenen Herausforderungen an die Lehrpersonen in Betracht, dann sind 6 Jahre Studium keineswegs zu lang.
- Wer wird nach dem 6-jährigen Studium noch in der Sekundarstufe 1 unterrichten wollen?

Schlussbemerkungen

- Bachelor- und Masterstudium Lehramt Sekundarstufe mit insgesamt 6 Jahren für *alle* Lehrpersonen in der Sekundarstufe war ein bildungspolitisch wichtiger Schritt.
- Zieht man die hohe Verantwortung des Lehrberufs, die umfangreichen fachlichen, fachdidaktischen und pädagogischen Aufgaben und die damit verbundenen Herausforderungen an die Lehrpersonen in Betracht, dann sind 6 Jahre Studium keineswegs zu lang.
- Wer wird nach dem 6-jährigen Studium noch in der Sekundarstufe 1 unterrichten wollen?
- Hoffentlich die Besten!

Alles Gute für Ihr Studium! Danke für die Aufmerksamkeit!

http://www.uibk.ac.at/mathematik/personal/pauer/

franz.pauer@uibk.ac.at