Wieviel Fachkompetenz brauchen MathematiklehrerInnen ?

Gesellschaftspolitische und persönlichkeitsbildene Aspekte des Mathematikunterrichts.

Franz Pauer

Universität Innsbruck

25. November 2020

Bildungsziele einst und jetzt

- Einführung der Schulpflicht (18. Jhd.) für den Bedarf eines autoritären Systems

Bildungsziele einst und jetzt

- Einführung der Schulpflicht (18. Jhd.) für den Bedarf eines autoritären Systems
- Ziel damals: einige Fertigkeiten und Kenntnisse vermitteln, die auf Zuruf ausgeführt werden.

Bildungsziele einst und jetzt

- Einführung der Schulpflicht (18. Jhd.) für den Bedarf eines autoritären Systems
- Ziel damals: einige Fertigkeiten und Kenntnisse vermitteln, die auf Zuruf ausgeführt werden.
- Heute (21. Jhd.): Schule für eine demokratische Gesellschaft. Die Schülerinnen und Schüler sollen nicht mehr zu Untertanen, sondern zu mündigen Bürgerinnen und Bürgern erzogen werden.

Bildungsziele einst und jetzt

- Einführung der Schulpflicht (18. Jhd.) für den Bedarf eines autoritären Systems
- Ziel damals: einige Fertigkeiten und Kenntnisse vermitteln, die auf Zuruf ausgeführt werden.
- Heute (21. Jhd.): Schule für eine demokratische Gesellschaft. Die Schülerinnen und Schüler sollen nicht mehr zu Untertanen, sondern zu mündigen Bürgerinnen und Bürgern erzogen werden.
- Der Mathematikunterricht heute muss sich also wesentlich von dem vor 80 oder 120 Jahren unterscheiden!

Lehrpläne

- Lehrpläne aller Schulen in Österreich können unter

  https://www.bmbwf.gv.at/Themen/schule/schulpraxis/lp.html
  (Web-Seite des BMBWF)

  gefunden werden;
  die Rahmenrichtlinien des Landes für die Lehrpläne aller Schulen in Südtirol unter

  http://www.provinz.bz.it/bildung-sprache/deutschsprachige-schule/bildungsverwaltung/rahmenrichtlinien-land-bestimmungen.asp

Allgemeine Bildungsziele

- Lehrplan AHS und NMS, allgemeines Bildungsziel (für alle Unterrichtsfächer, auch Mathematik):
  Der Unterricht hat aktiv zu einer den Menschenrechten verpflichteten Demokratie beizutragen.
  Die Bereitschaft zum selbstständigen Denken und zur kritischen Reflexion sind besonders zu fördern. Urteils- und Kritikfähigkeit sowie Entscheidungs- und Handlungskompetenzen sind zu fördern.

Allgemeine Bildungsziele

- Lehrplan AHS und NMS, allgemeines Bildungsziel (für alle Unterrichtsfächer, auch Mathematik):
  Der Unterricht hat aktiv zu einer den Menschenrechten verpflichteten Demokratie beizutragen.
  Die Bereitschaft zum selbstständigen Denken und zur kritischen Reflexion sind besonders zu fördern. Urteils- und Kritikfähigkeit sowie Entscheidungs- und Handlungskompetenzen sind zu fördern.

- Haben Sie sich schon überlegt, wie Sie nach Ende Ihres Studiums im Mathematikunterricht einen Beitrag zu diesen wichtigen Bildungszielen leisten werden?

Einige Bildungsziele des Mathematikunterrichts

- **Lehrplan Mathematik AHS-Oberstufe:**
  Im Mathematikunterricht soll verständnisvolles Lernen als individueller, aktiver und konstruktiver Prozess im Vordergrund stehen. . . .
  Einzelne Inhalte und Probleme sind aus verschiedenen Blickwinkeln zu sehen und aus verschiedenen Richtungen zu beleuchten.
  Mathematik entwickelt die Fähigkeit zum Argumentieren, Kritisieren und Urteilen und fördert die Fähigkeit, zugleich verständlich und präzise zu sprechen.
  Das mathematische Prinzip, dass Behauptungen begründet werden müssen, soll Vorbild für andere Fächer und gesellschaftliche Bereiche sein.

Einige Bildungsziele des Mathematikunterrichts

- **Lehrplan Mathematik AHS-Unterstufe und NMS:**
  Die Schülerinnen und Schüler sollen in Verfolgung entsprechender Lernziele produktives geistiges Arbeiten, Argumentieren und exaktes Arbeiten, kritisches Denken, Darstellen und Interpretieren als mathematische Grundtätigkeiten durchführen.
  Folgende mathematische Grundtätigkeiten sind zu entwickeln: Kritisches Denken, insbesondere: Überprüfen von Vermutungen; Überprüfen von Ergebnissen; Erkennen von Unzulänglichkeiten mathematischer Modelle; Erkennen von Mängeln in Darstellung oder Begründungen; . . .

Einige Bildungsziele des Mathematikunterrichts

- **Lehrplan Mathematik AHS-Unterstufe und NMS:**
  Die Schülerinnen und Schüler sollen in Verfolgung entsprechender Lernziele produktives geistiges Arbeiten, Argumentieren und exaktes Arbeiten, kritisches Denken, Darstellen und Interpretieren als mathematische Grundtätigkeiten durchführen.
  Folgende mathematische Grundtätigkeiten sind zu entwickeln: Kritisches Denken, insbesondere: Überprüfen von Vermutungen; Überprüfen von Ergebnissen; Erkennen von Unzulänglichkeiten mathematischer Modelle; Erkennen von Mängeln in Darstellung oder Begründungen; . . .

- **Lehrplan HAK:**
  . . . verfügen die Schülerinnen und Schüler über die Kompetenz, eine aktive und verantwortungsbewusste Rolle als Unternehmerin und Unternehmer, als Arbeitnehmerin und Arbeitnehmer oder als Konsumentin und Konsument einzunehmen; . . .

AbsolventInnen des Lehramtsstudiums mit Unterrichtsfach Mathematik können . . .

- jenen Teil der Mathematik, den sie in der Schule unterrichten, einfach und verständlich erklären, und gut motivieren.
  Man kann aber nur das einfach und verständlich erklären, was man selber sehr gut verstanden und durchdacht hat (wenn man sich in diesem Bereich also „wie der Fisch im Wasser“ fühlt).

AbsolventInnen des Lehramtsstudiums mit Unterrichtsfach Mathematik können . . .

- jenen Teil der Mathematik, den sie in der Schule unterrichten, einfach und verständlich erklären, und gut motivieren.
  Man kann aber nur das einfach und verständlich erklären, was man selber sehr gut verstanden und durchdacht hat (wenn man sich in diesem Bereich also „wie der Fisch im Wasser“ fühlt).
- alle Unterrichtsinhalte begründen und kritische Fragen zu deren Sinn qualifiziert beantworten.

AbsolventInnen des Lehramtsstudiums mit Unterrichtsfach Mathematik können . . .

- jenen Teil der Mathematik, den sie in der Schule unterrichten, einfach und verständlich erklären, und gut motivieren.
  Man kann aber nur das einfach und verständlich erklären, was man selber sehr gut verstanden und durchdacht hat (wenn man sich in diesem Bereich also „wie der Fisch im Wasser“ fühlt).
- alle Unterrichtsinhalte begründen und kritische Fragen zu deren Sinn qualifiziert beantworten.
- ihren Mathematikunterricht so gestalten, dass die Entwicklung der Kinder und Jugendlichen zu mündigen Bürgerinnen und Bürgern einer demokratischen Gesellschaft (und nicht zu unkritischen Untertanen in einer autoritären Gesellschaft) gefördert wird.

AbsolventInnen des Lehramtsstudiums mit Unterrichtsfach Mathematik können . . .

- durch ihren Unterricht sachliches und vorurteilsfreies Denken fördern.

AbsolventInnen des Lehramtsstudiums mit Unterrichtsfach Mathematik können . . .

- durch ihren Unterricht sachliches und vorurteilsfreies Denken fördern.
- ihren Unterricht selbständig planen und sich bei Lehrplanänderungen neue Inhalte selbständig erarbeiten.

AbsolventInnen des Lehramtsstudiums mit Unterrichtsfach Mathematik können ...

- durch ihren Unterricht sachliches und vorurteilsfreies Denken fördern.
- ihren Unterricht selbständig planen und sich bei Lehrplanänderungen neue Inhalte selbständig erarbeiten.
- Unterlagen dazu, insbesondere Schulbücher, kritisch verwenden und gegebenenfalls Mängel darin erkennen,

AbsolventInnen des Lehramtsstudiums mit Unterrichtsfach Mathematik können ...

- durch ihren Unterricht sachliches und vorurteilsfreies Denken fördern.
- ihren Unterricht selbständig planen und sich bei Lehrplanänderungen neue Inhalte selbständig erarbeiten.
- Unterlagen dazu, insbesondere Schulbücher, kritisch verwenden und gegebenenfalls Mängel darin erkennen,
- für Mathematik und ihre Anwendungen Interesse wecken, nützliche Fertigkeiten für die Berufs-und Arbeitswelt vermitteln

AbsolventInnen des Lehramtsstudiums mit Unterrichtsfach Mathematik können ...

- durch ihren Unterricht sachliches und vorurteilsfreies Denken fördern.
- ihren Unterricht selbständig planen und sich bei Lehrplanänderungen neue Inhalte selbständig erarbeiten.
- Unterlagen dazu, insbesondere Schulbücher, kritisch verwenden und gegebenenfalls Mängel darin erkennen,
- für Mathematik und ihre Anwendungen Interesse wecken, nützliche Fertigkeiten für die Berufs-und Arbeitswelt vermitteln
- ...

AbsolventInnen des Lehramtsstudiums mit Unterrichtsfach Mathematik können ...

- durch ihren Unterricht sachliches und vorurteilsfreies Denken fördern.
- ihren Unterricht selbständig planen und sich bei Lehrplanänderungen neue Inhalte selbständig erarbeiten.
- Unterlagen dazu, insbesondere Schulbücher, kritisch verwenden und gegebenenfalls Mängel darin erkennen,
- für Mathematik und ihre Anwendungen Interesse wecken, nützliche Fertigkeiten für die Berufs-und Arbeitswelt vermitteln
- ...
- **Und dazu braucht es auch viel an mathematischer Fachkompetenz und mathematischem Fachwissen!**

Zuerst genau hinhören und hinsehen, dann urteilen und handeln

- Aufgabe 1: Zwei Kilogramm Äpfel kosten 4 Euro. Wieviel kosten 3 Kilogramm Äpfel?

Zuerst genau hinhören und hinsehen, dann urteilen und handeln

- Aufgabe 1: Zwei Kilogramm Äpfel kosten 4 Euro. Wieviel kosten 3 Kilogramm Äpfel?
- Aufgabe 2: Im Obstgeschäft kauft Herr Meier ein Kilogramm Äpfel um 2 Euro. Zwei Tage später fährt er mit einem Lastwagen zu einem Obstbauern und kauft eine Tonne derselben Sorte Äpfel. Wieviel muss er dafür bezahlen?

Zuerst genau hinhören und hinsehen, dann urteilen und handeln

- Aufgabe 1: Zwei Kilogramm Äpfel kosten 4 Euro. Wieviel kosten 3 Kilogramm Äpfel?
- Aufgabe 2: Im Obstgeschäft kauft Herr Meier ein Kilogramm Äpfel um 2 Euro. Zwei Tage später fährt er mit einem Lastwagen zu einem Obstbauern und kauft eine Tonne derselben Sorte Äpfel. Wieviel muss er dafür bezahlen?
- **Keine Antwort möglich, solange der Zusammenhang zwischen Preis und Masse der Äpfel nicht bekannt ist.**

Zuerst genau hinhören und hinsehen, dann urteilen und handeln

- Aufgabe 1: Zwei Kilogramm Äpfel kosten 4 Euro. Wieviel kosten 3 Kilogramm Äpfel?
- Aufgabe 2: Im Obstgeschäft kauft Herr Meier ein Kilogramm Äpfel um 2 Euro. Zwei Tage später fährt er mit einem Lastwagen zu einem Obstbauern und kauft eine Tonne derselben Sorte Äpfel. Wieviel muss er dafür bezahlen?
- **Keine Antwort möglich, solange der Zusammenhang zwischen Preis und Masse der Äpfel nicht bekannt ist.**
- Wenn im Obstgeschäft die Aktion „Nimm drei, zahl zwei“ läuft, kosten 3 Kilogramm Äpfel 4 Euro.

Zuerst genau hinhören und hinsehen, dann urteilen und handeln

- Aufgabe 1: Zwei Kilogramm Äpfel kosten 4 Euro. Wieviel kosten 3 Kilogramm Äpfel?
- Aufgabe 2: Im Obstgeschäft kauft Herr Meier ein Kilogramm Äpfel um 2 Euro. Zwei Tage später fährt er mit einem Lastwagen zu einem Obstbauern und kauft eine Tonne derselben Sorte Äpfel. Wieviel muss er dafür bezahlen?
- **Keine Antwort möglich, solange der Zusammenhang zwischen Preis und Masse der Äpfel nicht bekannt ist.**
- Wenn im Obstgeschäft die Aktion „Nimm drei, zahl zwei“ läuft, kosten 3 Kilogramm Äpfel 4 Euro.
- Jeder Händler weiß, dass Herr Meier sicher viel weniger als 2000 Euro zahlen wird.

Zuerst genau hinhören und hinsehen, dann urteilen und handeln!

- Für ein steuerpflichtiges Einkommen von 25 000 Euro im Jahr 2019 zahlt man 4 200 Euro Steuer. Wie hoch ist die Steuer für ein steuerpflichtiges Einkommen von 50 000 Euro im Jahr 2019?

Zuerst genau hinhören und hinsehen, dann urteilen und handeln!

- Für ein steuerpflichtiges Einkommen von 25 000 Euro im Jahr 2019 zahlt man 4 200 Euro Steuer. Wie hoch ist die Steuer für ein steuerpflichtiges Einkommen von 50 000 Euro im Jahr 2019?
- 14 280 Euro (mehr als dreimal so viel wie für die Hälfte)

Zuerst genau hinhören und hinsehen, dann urteilen und handeln!

- Für ein steuerpflichtiges Einkommen von 25 000 Euro im Jahr 2019 zahlt man 4 200 Euro Steuer. Wie hoch ist die Steuer für ein steuerpflichtiges Einkommen von 50 000 Euro im Jahr 2019?
- 14 280 Euro (mehr als dreimal so viel wie für die Hälfte)
- Zur Beantwortung der Frage ist „ExpertInnenwissen“ nötig: Welcher Zusammenhang besteht zwischen Einkommen und Steuer?
  Die Funktion „Steuer“ ordnet jedem Einkommen die entsprechende Steuer zu.

Zuerst genau hinhören und hinsehen, dann urteilen und handeln!

- Für ein steuerpflichtiges Einkommen von 25 000 Euro im Jahr 2019 zahlt man 4 200 Euro Steuer. Wie hoch ist die Steuer für ein steuerpflichtiges Einkommen von 50 000 Euro im Jahr 2019?
- 14 280 Euro (mehr als dreimal so viel wie für die Hälfte)
- Zur Beantwortung der Frage ist „ExpertInnenwissen“ nötig: Welcher Zusammenhang besteht zwischen Einkommen und Steuer?
  Die Funktion „Steuer“ ordnet jedem Einkommen die entsprechende Steuer zu.
- Beschreibung dieser Funktion (Einkommen in Tausend Euro): keine Steuer für 0 bis 11, 11 bis 18: 25 Prozent,
  18 bis 31: 35 Prozent, 31 bis 60 : 42 Prozent, 60 bis 90: 48 Prozent, 90 bis 1 000: 50 Prozent, darüber 55 Prozent.

Vorurteilsfrei Denken

- Setze die Buchstabenfolge fort: c,d,e,f,g,...

Vorurteilsfrei Denken

- Setze die Buchstabenfolge fort: c,d,e,f,g,...
- Antwort der Klavierschülerin: c,d,e,f,g,a,...

Vorurteilsfrei Denken

- Setze die Buchstabenfolge fort: c,d,e,f,g,...
- Antwort der Klavierschülerin: c,d,e,f,g,a,...
- Antwort im Deutschunterricht: c,d,e,f,g,h, ...

Vorurteilsfrei Denken

- Setze die Buchstabenfolge fort: c,d,e,f,g,...
- Antwort der Klavierschülerin: c,d,e,f,g,a,...
- Antwort im Deutschunterricht: c,d,e,f,g,h, ...

- Leider kommen Fragen dieses Typs in Aufnahmetests vor!

Vorurteilsfrei Denken

- Setze die Zahlenfolge fort: 1,2,3,...

Vorurteilsfrei Denken

- Setze die Zahlenfolge fort: 1,2,3,...
- Antwort des Walzertänzers: 1,2,3,1,2,3,...

Vorurteilsfrei Denken

- Setze die Zahlenfolge fort: 1,2,3,...
- Antwort des Walzertänzers: 1,2,3,1,2,3,...
- Antwort nach einem Mathematikstudium: Es gibt unendlich viele Möglichkeiten, Bildungsgesetze zur Fortsetzung von 1,2,3,... anzugeben, die nur Addition und Multiplikation verwenden.

  Zum Beispiel: ”Für jede Zahl n wähle als n-tes Glied der Folge $(n-3).(n-2).(n-1)+n$”.
  Damit erhält man
  $(-2).(-1).0+1=1$,
  $(-1).0.1+2=2$,
  $0.1.2+3=3$,
  $1.2.3+4=10, \ldots$.

Vorurteilsfrei Denken

- Setze die Zahlenfolge fort: 1,2,3,...
- Antwort des Walzertänzers: 1,2,3,1,2,3,...
- Antwort nach einem Mathematikstudium: Es gibt unendlich viele Möglichkeiten, Bildungsgesetze zur Fortsetzung von 1,2,3,... anzugeben, die nur Addition und Multiplikation verwenden.

  Zum Beispiel: "Für jede Zahl n wähle als n-tes Glied der Folge $(n-3).(n-2).(n-1)+n$".
  Damit erhält man
  $(-2).(-1).0+1=1$,
  $(-1).0.1+2=2$,
  $0.1.2+3=3$,
  $1.2.3+4=10,\ldots$.
- Kommen solche Fragen in Tests vor, werden nicht kognitive Fähigkeiten überprüft, sondern ob jemand so wie die meisten denkt.

Vorurteilsfrei Denken

Beispiel:
$f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$

- $f(28) = 14$, $f(16) = 8$, $f(8) = 4$, $f(20) =?$

Vorurteilsfrei Denken

Beispiel:
$f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$

- $f(28) = 14$, $f(16) = 8$, $f(8) = 4$, $f(20) =?$
- Richtige Antwort: $f(20) = 7$

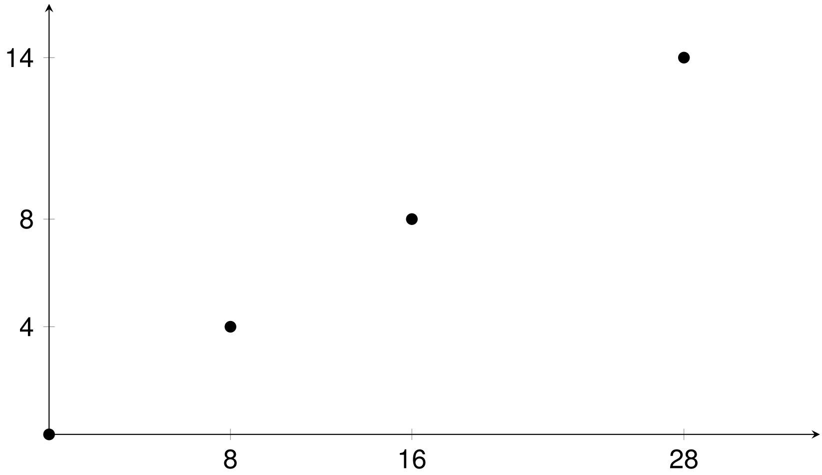
Vorurteilsfrei Denken

Beispiel:
$f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$

- $f(28) = 14$, $f(16) = 8$, $f(8) = 4$, $f(20) = ?$
- Richtige Antwort: $f(20) = 7$
- $f(n)$ ist die Anzahl der Buchstaben des deutschen Wortes für die Zahl n.

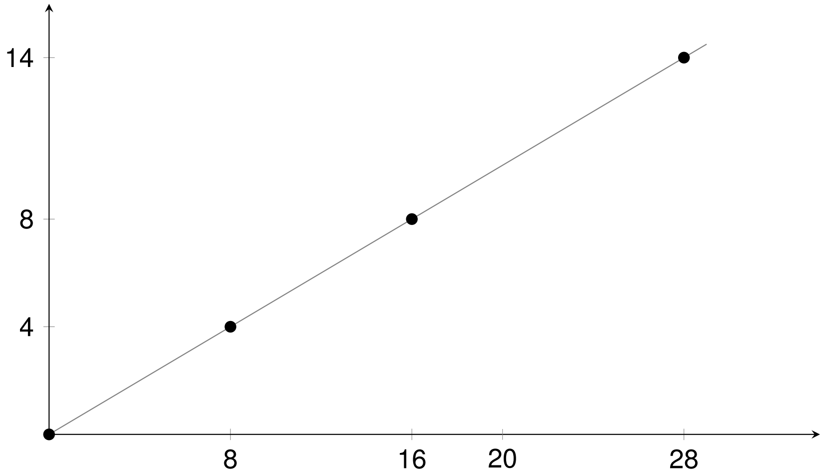
Vorurteilsfrei Denken

$f(28) = 14$, $f(16) = 8$, $f(8) = 4$, $f(20) = ?$



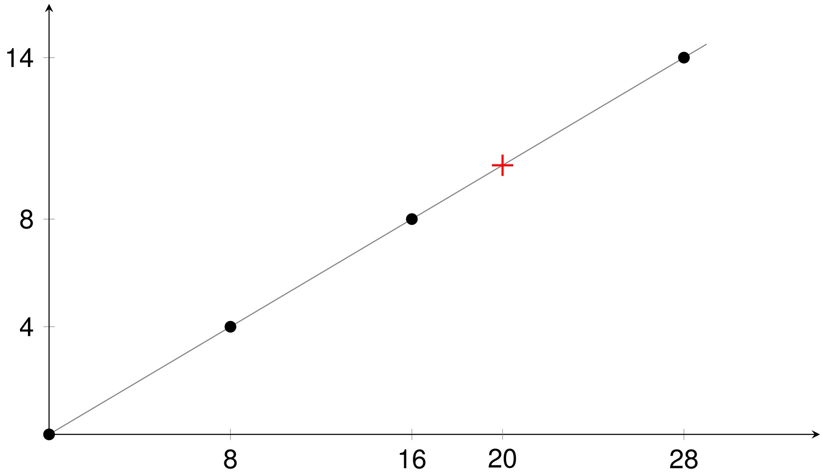
Vorurteilsfrei Denken

$f(28) = 14$, $f(16) = 8$, $f(8) = 4$, $f(20) = ?$



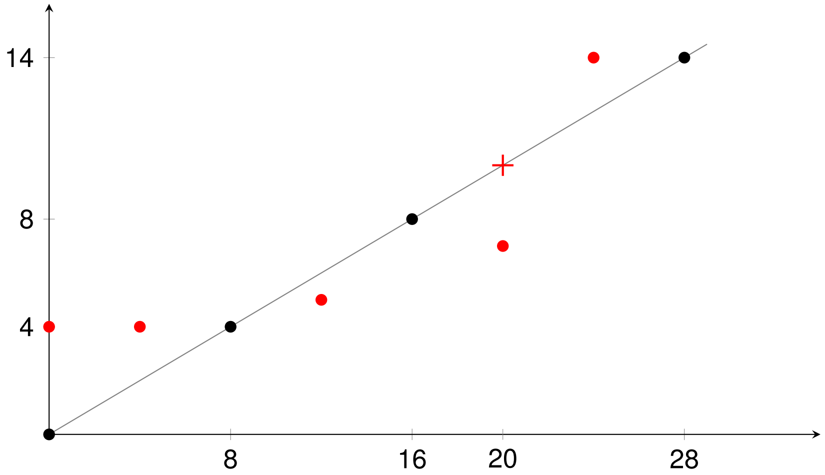
Vorurteilsfrei Denken

$f(28) = 14$, $f(16) = 8$, $f(8) = 4$, $f(20) = ?$



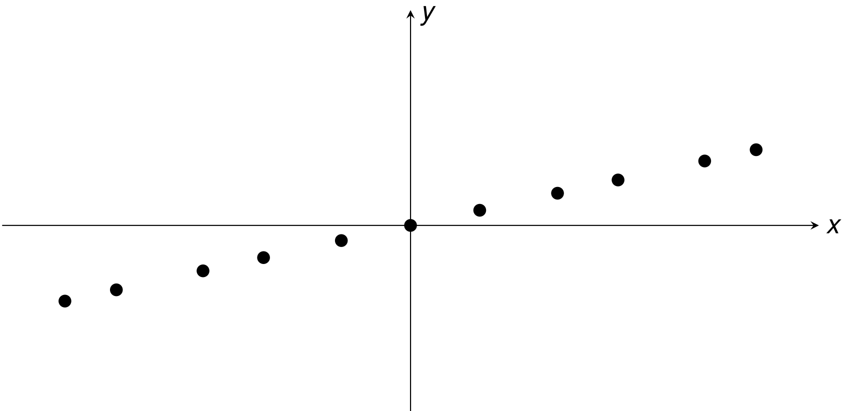
Vorurteilsfrei Denken

$f(28) = 14$, $f(16) = 8$, $f(8) = 4$, $f(20) = ?$



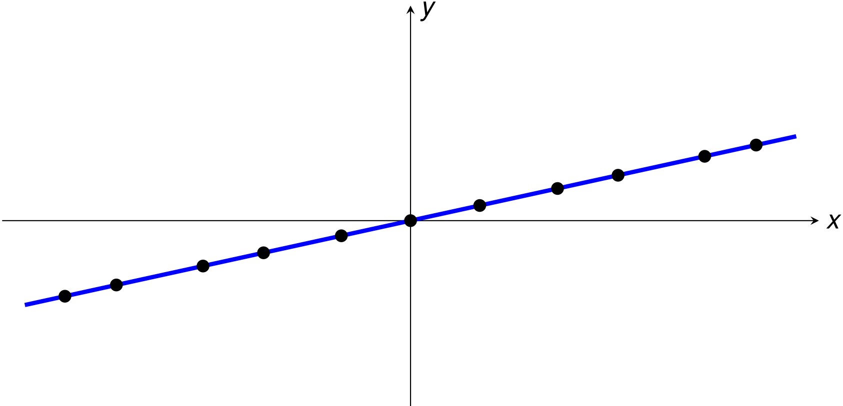
Vorurteilsfrei Denken

Gegeben sind Zahlenpaare $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \ldots, (x_n, y_n)$. Gesucht ist eine Funktion $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ mit $f(x_i) = y_i$, $i = 1, \ldots, n$.
Je nachdem, ob man annimmt, dass diese Funktion linear oder periodisch oder eine „Impulsfunktion“ ist, erhält man die folgenden Lösungen. Ohne ausreichendes Wissen über den Vorgang, aus dem die Zahlenpaare entstanden sind, kann man die Aufgabe nicht lösen.



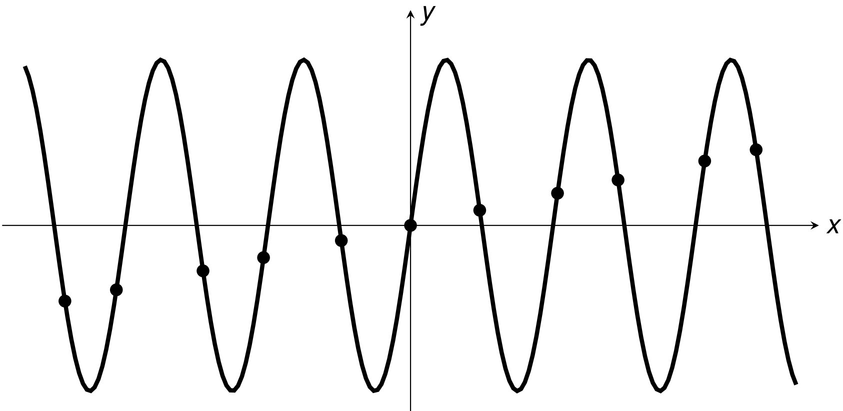
Vorurteilsfrei Denken

Gegeben sind Zahlenpaare $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \ldots, (x_n, y_n)$. Gesucht ist eine Funktion $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ mit $f(x_i) = y_i$, $i = 1, \ldots, n$.
Je nachdem, ob man annimmt, dass diese Funktion linear oder periodisch oder eine „Impulsfunktion“ ist, erhält man die folgenden Lösungen. Ohne ausreichendes Wissen über den Vorgang, aus dem die Zahlenpaare entstanden sind, kann man die Aufgabe nicht lösen.



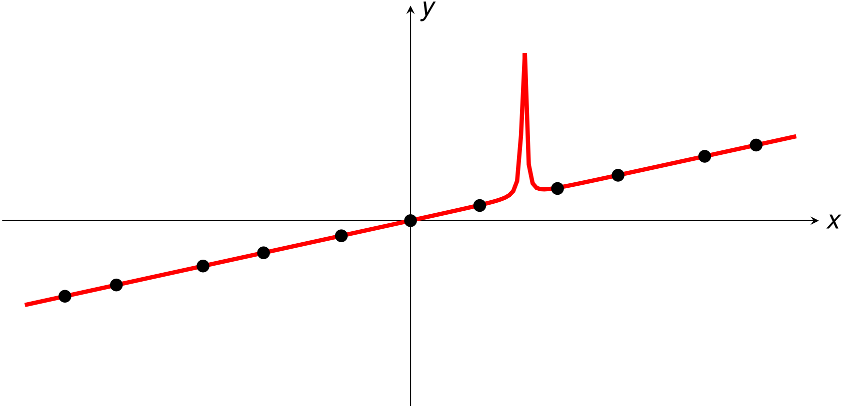
Vorurteilsfrei Denken

Gegeben sind Zahlenpaare $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \ldots, (x_n, y_n)$. Gesucht ist eine Funktion $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ mit $f(x_i) = y_i$, $i = 1, \ldots, n$.
Je nachdem, ob man annimmt, dass diese Funktion linear oder periodisch oder eine „Impulsfunktion“ ist, erhält man die folgenden Lösungen. Ohne ausreichendes Wissen über den Vorgang, aus dem die Zahlenpaare entstanden sind, kann man die Aufgabe nicht lösen.



Vorurteilsfrei Denken

Gegeben sind Zahlenpaare $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \ldots, (x_n, y_n)$. Gesucht ist eine Funktion $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ mit $f(x_i) = y_i$, $i = 1, \ldots, n$.
Je nachdem, ob man annimmt, dass diese Funktion linear oder periodisch oder eine „Impulsfunktion“ ist, erhält man die folgenden Lösungen. Ohne ausreichendes Wissen über den Vorgang, aus dem die Zahlenpaare entstanden sind, kann man die Aufgabe nicht lösen.



Klar und genau denken, verständlich und präzise sprechen

- Was heißt „Mache den Nenner wurzelfrei!“(aus einem Schulbuch der 9. Schulstufe)?

$$\frac{2\sqrt{5}+7}{3\sqrt{5}-2}$$

Klar und genau denken, verständlich und präzise sprechen

- Was heißt „Mache den Nenner wurzelfrei!“(aus einem Schulbuch der 9. Schulstufe)?

$$\frac{2\sqrt{5}+7}{3\sqrt{5}-2}$$

- Einfachste Lösung:

$$\frac{\left(\frac{2\sqrt{5}+7}{3\sqrt{5}-2}\right)}{1}$$

Klar und genau denken, verständlich und präzise sprechen

- Was heißt „Mache den Nenner wurzelfrei!“(aus einem Schulbuch der 9. Schulstufe)?
$$\frac{2\sqrt{5}+7}{3\sqrt{5}-2}$$
- Einfachste Lösung:
$$\frac{\left(\frac{2\sqrt{5}+7}{3\sqrt{5}-2}\right)}{1}$$
- Oder: $2,436626815$ $\left(= \frac{2436626815}{10^9}\right)$

Klar und genau denken, verständlich und präzise sprechen

- Klare Formulierung der Aufgabe: Berechne rationale Zahlen a und b so, dass
$$\frac{2\sqrt{5}+7}{3\sqrt{5}-2} = a\sqrt{5}+b \text{ ist.}$$

Klar und genau denken, verständlich und präzise sprechen

- Klare Formulierung der Aufgabe: Berechne rationale Zahlen a und b so, dass
$$\frac{2\sqrt{5}+7}{3\sqrt{5}-2} = a\sqrt{5}+b \text{ ist.}$$
- Die klare Formulierung legt auch schon nahe, wie man die Aufgabe lösen kann:

Klar und genau denken, verständlich und präzise sprechen

- Klare Formulierung der Aufgabe: Berechne rationale Zahlen a und b so, dass
$$\frac{2\sqrt{5}+7}{3\sqrt{5}-2} = a\sqrt{5}+b \text{ ist.}$$
- Die klare Formulierung legt auch schon nahe, wie man die Aufgabe lösen kann:
- Aus $\frac{2\sqrt{5}+7}{3\sqrt{5}-2} = a\sqrt{5}+b$ folgt
$2\sqrt{5}+7 = (a\sqrt{5}+b)\cdot(3\sqrt{5}-2)$ und
$2\sqrt{5}+7 = (3b-2a)\sqrt{5}+(-2b+15a)$.
Daher: Eine Lösung (a, b) des Gleichungssystems
$3b-2a = 2$
$-2b+15a = 7$,
ist auch eine Lösung unserer Aufgabe.

Klar und genau denken, verständlich und präzise sprechen

- Studierende im ersten Semester wissen aus der Schule noch die Summen- und Produktregel des Differenzierens:

Klar und genau denken, verständlich und präzise sprechen

- Studierende im ersten Semester wissen aus der Schule noch die Summen- und Produktregel des Differenzierens:
- Wenn zwei Funktionen differenzierbar sind, dann auch ihre Summe und ihr Produkt. Es ist

$$(f+g)' = f' + g' \quad \text{und} \quad (f \cdot g)' = f'.g + f.g'.$$

Klar und genau denken, verständlich und präzise sprechen

- Studierende im ersten Semester wissen aus der Schule noch die Summen- und Produktregel des Differenzierens:
- Wenn zwei Funktionen differenzierbar sind, dann auch ihre Summe und ihr Produkt. Es ist

$$(f+g)' = f' + g' \text{ und } (f \cdot g)' = f'.g + f.g'.$$

- Aber fast niemand weiß, was f+g und f.g bedeuten.

Mündige BürgerInnen oder Untertanen?

Beispiel: Quadratische Gleichungen

- Finde alle reellen Zahlen x so, dass $x^2 + 6x - 1 = 0$ ist!

Mündige BürgerInnen oder Untertanen?

Beispiel: Quadratische Gleichungen

- Finde alle reellen Zahlen x so, dass $x^2 + 6x - 1 = 0$ ist!

- Lösung durch „Umformen“:
  $x^2 + 6x - 1 = (x+3)^2 - 9 - 1 = (x+3)^2 - 10$, also

Mündige BürgerInnen oder Untertanen?

Beispiel: Quadratische Gleichungen

- Finde alle reellen Zahlen x so, dass $x^2 + 6x - 1 = 0$ ist!

- Lösung durch „Umformen“:
  $x^2 + 6x - 1 = (x + 3)^2 - 9 - 1 = (x + 3)^2 - 10$, also
- $(x + 3)^2 = 10$, $x + 3 = \pm\sqrt{10}$,

Mündige BürgerInnen oder Untertanen?

Beispiel: Quadratische Gleichungen

- Finde alle reellen Zahlen x so, dass $x^2 + 6x - 1 = 0$ ist!

- Lösung durch „Umformen“:
  $x^2 + 6x - 1 = (x+3)^2 - 9 - 1 = (x+3)^2 - 10$, also
- $(x+3)^2 = 10$, $x + 3 = \pm\sqrt{10}$,
- $x = -3 \pm \sqrt{10}$

Mündige BürgerInnen oder Untertanen?

Beispiel: Quadratische Gleichungen

- Finde alle reellen Zahlen x so, dass $x^2 + 6x - 1 = 0$ ist!

- Lösung durch „Umformen“:
  $x^2 + 6x - 1 = (x+3)^2 - 9 - 1 = (x+3)^2 - 10$, also
- $(x+3)^2 = 10$, $x + 3 = \pm\sqrt{10}$,
- $x = -3 \pm \sqrt{10}$

- ODER (?)

Mündige BürgerInnen oder Untertanen?

Beispiel: Quadratische Gleichungen

- Finde alle reellen Zahlen x so, dass $x^2 + 6x - 1 = 0$ ist!

- Lösung durch „Umformen“:
  $x^2 + 6x - 1 = (x + 3)^2 - 9 - 1 = (x + 3)^2 - 10$, also
- $(x + 3)^2 = 10$, $x + 3 = \pm\sqrt{10}$,
- $x = -3 \pm \sqrt{10}$

- ODER (?)

- Setze 6 für p und -1 für q in die Lösungsformel $-\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}$ ein!

Mündige BürgerInnen oder Untertanen?

Beispiel: Quadratische Gleichungen

- Finde alle reellen Zahlen x so, dass $x^2 + 6x - 1 = 0$ ist!

- Lösung durch „Umformen“:
  $x^2 + 6x - 1 = (x+3)^2 - 9 - 1 = (x+3)^2 - 10$, also
- $(x+3)^2 = 10$, $x + 3 = \pm\sqrt{10}$,
- $x = -3 \pm \sqrt{10}$

- ODER (?)

- Setze 6 für p und -1 für q in die Lösungsformel $-\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}$ ein!
- $x = -\frac{6}{2} \pm \sqrt{\frac{6^2}{4} - (-1)} = -3 \pm \sqrt{10}$

Mündige BürgerInnen oder Untertanen?

Welcher Unterricht passt zu einer Demokratie, welcher zu einem autoritären System?
Welcher Unterricht erfordert von der Lehrperson mehr mathematische Fachkompetenz, welcher weniger?

1. Die Schülerinnen und Schüler lernen eine Formel auswendig und lösen die Aufgabe durch „Einsetzen in die Formel“.

Mündige BürgerInnen oder Untertanen?

Welcher Unterricht passt zu einer Demokratie, welcher zu einem autoritären System?
Welcher Unterricht erfordert von der Lehrperson mehr mathematische Fachkompetenz, welcher weniger?

1. Die Schülerinnen und Schüler lernen eine Formel auswendig und lösen die Aufgabe durch „Einsetzen in die Formel“.
2. Die Schülerinnen und Schüler verstehen, wie und warum man die Lösung einer Aufgabe findet.

Fachliche Anforderungen in der Sekundarstufe 1

werden häufig unterschätzt!

Einführung von Grundkonzepten:

- Zahlbereichserweiterungen

Fachliche Anforderungen in der Sekundarstufe 1

werden häufig unterschätzt!

Einführung von Grundkonzepten:

- Zahlbereichserweiterungen
- Umgang mit Rechenregeln

Fachliche Anforderungen in der Sekundarstufe 1

werden häufig unterschätzt!

Einführung von Grundkonzepten:

- Zahlbereichserweiterungen
- Umgang mit Rechenregeln
- Rationale Zahlen (Rechenoperationen, Darstellung)

Fachliche Anforderungen in der Sekundarstufe 1

werden häufig unterschätzt!

Einführung von Grundkonzepten:

- Zahlbereichserweiterungen
- Umgang mit Rechenregeln
- Rationale Zahlen (Rechenoperationen, Darstellung)
- Lösen von Aufgaben (z.B. Gleichungen) durch äquivalentes Umformen (Grundstrategie)

Fachliche Anforderungen in der Sekundarstufe 1

werden häufig unterschätzt!

Einführung von Grundkonzepten:

- Zahlbereichserweiterungen
- Umgang mit Rechenregeln
- Rationale Zahlen (Rechenoperationen, Darstellung)
- Lösen von Aufgaben (z.B. Gleichungen) durch äquivalentes Umformen (Grundstrategie)
- Beschreibung von unendlichen Lösungsmengen durch endlich viele Daten

Fachliche Anforderungen in der Sekundarstufe 1

werden häufig unterschätzt!

Einführung von Grundkonzepten:

- Zahlbereichserweiterungen
- Umgang mit Rechenregeln
- Rationale Zahlen (Rechenoperationen, Darstellung)
- Lösen von Aufgaben (z.B. Gleichungen) durch äquivalentes Umformen (Grundstrategie)
- Beschreibung von unendlichen Lösungsmengen durch endlich viele Daten
- Grundbegriffe der Geometrie (Länge, Winkel, Flächeninhalt, Volumen, parallel Verschieben, Drehung)

Fachliche Anforderungen in der Sekundarstufe 1

werden häufig unterschätzt!

Einführung von Grundkonzepten:

- Zahlbereichserweiterungen
- Umgang mit Rechenregeln
- Rationale Zahlen (Rechenoperationen, Darstellung)
- Lösen von Aufgaben (z.B. Gleichungen) durch äquivalentes Umformen (Grundstrategie)
- Beschreibung von unendlichen Lösungsmengen durch endlich viele Daten
- Grundbegriffe der Geometrie (Länge, Winkel, Flächeninhalt, Volumen, parallel Verschieben, Drehung)
- Koordinatensystem in der Ebene (Ebene als $\mathbb{R}^2$)

Fachliche Anforderungen in der Sekundarstufe 1

werden häufig unterschätzt!

Einführung von Grundkonzepten:

- Zahlbereichserweiterungen
- Umgang mit Rechenregeln
- Rationale Zahlen (Rechenoperationen, Darstellung)
- Lösen von Aufgaben (z.B. Gleichungen) durch äquivalentes Umformen (Grundstrategie)
- Beschreibung von unendlichen Lösungsmengen durch endlich viele Daten
- Grundbegriffe der Geometrie (Länge, Winkel, Flächeninhalt, Volumen, parallel Verschieben, Drehung)
- Koordinatensystem in der Ebene (Ebene als $\mathbb{R}^2$)
- beschreibende Statistik (Funktionen)

Fachliche Anforderungen in der Sekundarstufe 1

werden häufig unterschätzt!

Einführung von Grundkonzepten:

- Zahlbereichserweiterungen
- Umgang mit Rechenregeln
- Rationale Zahlen (Rechenoperationen, Darstellung)
- Lösen von Aufgaben (z.B. Gleichungen) durch äquivalentes Umformen (Grundstrategie)
- Beschreibung von unendlichen Lösungsmengen durch endlich viele Daten
- Grundbegriffe der Geometrie (Länge, Winkel, Flächeninhalt, Volumen, parallel Verschieben, Drehung)
- Koordinatensystem in der Ebene (Ebene als $\mathbb{R}^2$)
- beschreibende Statistik (Funktionen)
- mathematische Modellierung („Schlussrechnung“)

Fachliche Anforderungen in der Sekundarstufe 1

werden häufig unterschätzt!

Einführung von Grundkonzepten:

- Zahlbereichserweiterungen
- Umgang mit Rechenregeln
- Rationale Zahlen (Rechenoperationen, Darstellung)
- Lösen von Aufgaben (z.B. Gleichungen) durch äquivalentes Umformen (Grundstrategie)
- Beschreibung von unendlichen Lösungsmengen durch endlich viele Daten
- Grundbegriffe der Geometrie (Länge, Winkel, Flächeninhalt, Volumen, parallel Verschieben, Drehung)
- Koordinatensystem in der Ebene (Ebene als $\mathbb{R}^2$)
- beschreibende Statistik (Funktionen)
- mathematische Modellierung („Schlussrechnung“)
- Algorithmisches Denken

Die richtige Fährte legen: Binomische Formeln

- Oft wird ein „Term“ als „sinnvoller mathematischer Ausdruck“ oder „Rechenausdruck“ bezeichnet.

Die richtige Fährte legen: Binomische Formeln

- Oft wird ein „Term“ als „sinnvoller mathematischer Ausdruck“ oder „Rechenausdruck“ bezeichnet.
- Aus einem österreichischen Schulbuch der 7. Schulstufe:
  Terme der Art $(a+b)$, $(a-b)$ *heißen Binome.*
  Es gilt: $(a+b)\cdot(a-b) = a^2 - b^2$.

Die richtige Fährte legen: Binomische Formeln

- Oft wird ein „Term“ als „sinnvoller mathematischer Ausdruck“ oder „Rechenausdruck“ bezeichnet.
- Aus einem österreichischen Schulbuch der 7. Schulstufe:
  Terme der Art $(a+b)$, $(a-b)$ *heißen Binome.*
  Es gilt: $(a+b)\cdot(a-b) = a^2 - b^2$.
- Matrizenrechnung in der 10. Schulstufe (BHS): Es gibt 2×2-Matrizen a, b mit $(a+b)\cdot(a-b) \neq a^2 - b^2$

Die richtige Fährte legen: Binomische Formeln

- Oft wird ein „Term“ als „sinnvoller mathematischer Ausdruck“ oder „Rechenausdruck“ bezeichnet.
- Aus einem österreichischen Schulbuch der 7. Schulstufe:
  Terme der Art $(a + b)$, $(a - b)$ *heißen Binome.*
  Es gilt: $(a + b) \cdot (a - b) = a^2 - b^2$.
- Matrizenrechnung in der 10. Schulstufe (BHS): Es gibt 2×2-Matrizen a, b mit $(a + b) \cdot (a - b) \neq a^2 - b^2$
- Was ist falsch?
  Kann man mit Matrizen keinen „Rechenausdruck“ oder keinen „sinnvollen mathematischen Ausdruck“bilden?

Die richtige Fährte legen: Binomische Formeln

- Oft wird ein „Term“ als „sinnvoller mathematischer Ausdruck“ oder „Rechenausdruck“ bezeichnet.
- Aus einem österreichischen Schulbuch der 7. Schulstufe:
  Terme der Art $(a + b)$, $(a - b)$ *heißen Binome.*
  Es gilt: $(a + b) \cdot (a - b) = a^2 - b^2$.
- Matrizenrechnung in der 10. Schulstufe (BHS): Es gibt 2×2-Matrizen a, b mit $(a + b) \cdot (a - b) \neq a^2 - b^2$
- Was ist falsch?
  Kann man mit Matrizen keinen „Rechenausdruck“ oder keinen „sinnvollen mathematischen Ausdruck“bilden?
- Der Unterricht muss einerseits auf dem Vorwissen der Schülerinnen und Schüler aufbauen, andererseits auch so gestaltet werden, dass in späteren Schuljahren gut darauf aufgebaut werden kann.

Die richtige Fährte legen: Binomische Formeln

- „Termrechnung“ bedeutet „Rechnen in kommutativen Ringen“. Wegen $(a+b)(a-b) = a \cdot a - a \cdot b + b \cdot a - b \cdot b = a^2 - b^2$ gilt diese binomische Formel in allen kommutativen Ringen. Die Matrizenmultiplikation ist aber nicht kommutativ.

Die richtige Fährte legen: Binomische Formeln

- „Termrechnung“ bedeutet „Rechnen in kommutativen Ringen“. Wegen $(a+b)(a-b) = a \cdot a - a \cdot b + b \cdot a - b \cdot b = a^2 - b^2$ gilt diese binomische Formel in allen kommutativen Ringen. Die Matrizenmultiplikation ist aber nicht kommutativ.
- Im Schulunterricht treten im wesentlichen zwei Beispiele von kommutativen Ringen auf: Zahlbereiche und der Ring aller reellwertigen Funktionen
  In der Sekundarstufe 1 bedeutet „Termrechnung“ „Einüben der Rechenregeln für das Rechnen mit ganzen und rationalen Zahleln“.

Die richtige Fährte legen: Binomische Formeln

- Bessere Formulierung der binomischen Formeln in der Sekundarstufe 1: Für alle Zahlen a und b ist $a^2 - b^2 = (a + b) \cdot (a - b)$.

Die richtige Fährte legen: Binomische Formeln

- Bessere Formulierung der binomischen Formeln in der Sekundarstufe 1: Für alle Zahlen a und b ist $a^2 - b^2 = (a + b) \cdot (a - b)$.
- In Worten: Die Differenz der Quadrate zweier Zahlen ist das Produkt von deren Summe und deren Differenz.

Die richtige Fährte legen: Binomische Formeln

- Bessere Formulierung der binomischen Formeln in der Sekundarstufe 1: Für alle Zahlen a und b ist $a^2 - b^2 = (a + b) \cdot (a - b)$.
- In Worten: Die Differenz der Quadrate zweier Zahlen ist das Produkt von deren Summe und deren Differenz.
- Wer kann im Kopf $401^2 - 399^2$ berechnen?

Die richtige Fährte legen: Binomische Formeln

- Bessere Formulierung der binomischen Formeln in der Sekundarstufe 1: Für alle Zahlen a und b ist $a^2 - b^2 = (a + b) \cdot (a - b)$.
- In Worten: Die Differenz der Quadrate zweier Zahlen ist das Produkt von deren Summe und deren Differenz.
- Wer kann im Kopf $401^2 - 399^2$ berechnen?
- $401^2 - 399^2 = (401 + 399) \cdot (401 - 399) = 800 \cdot 2 = 1600$

Die richtige Fährte legen: Primzahlen

- In den meisten österreichischen Schulbüchern der 6. Schulstufe wird der ggT zweier natürlicher Zahlen „einfach“ durch Primfaktorzerlegung ermittelt (obwohl Primzahlen gar nicht im Lehrplan stehen).

Die richtige Fährte legen: Primzahlen

- In den meisten österreichischen Schulbüchern der 6. Schulstufe wird der ggT zweier natürlicher Zahlen „einfach“ durch Primfaktorzerlegung ermittelt (obwohl Primzahlen gar nicht im Lehrplan stehen).
- In den BHS wird in der 12. Schulstufe der RSA-Algorithmus zur Verschlüsselung mit öffentlichem Schlüssel erklärt:

Die richtige Fährte legen: Primzahlen

- In den meisten österreichischen Schulbüchern der 6. Schulstufe wird der ggT zweier natürlicher Zahlen „einfach“ durch Primfaktorzerlegung ermittelt (obwohl Primzahlen gar nicht im Lehrplan stehen).
- In den BHS wird in der 12. Schulstufe der RSA-Algorithmus zur Verschlüsselung mit öffentlichem Schlüssel erklärt:
- Der Empfänger gibt zwei große Zahlen n und e bekannt.

Die richtige Fährte legen: Primzahlen

- In den meisten österreichischen Schulbüchern der 6. Schulstufe wird der ggT zweier natürlicher Zahlen „einfach“ durch Primfaktorzerlegung ermittelt (obwohl Primzahlen gar nicht im Lehrplan stehen).
- In den BHS wird in der 12. Schulstufe der RSA-Algorithmus zur Verschlüsselung mit öffentlichem Schlüssel erklärt:
- Der Empfänger gibt zwei große Zahlen n und e bekannt.
- Der Sender will a verschlüsseln und berechnet $b := a^e \mathit{mod}\, n$, den Rest der Potenz a^e nach Division mit Rest durch n.

Die richtige Fährte legen: Primzahlen

- In den meisten österreichischen Schulbüchern der 6. Schulstufe wird der ggT zweier natürlicher Zahlen „einfach“ durch Primfaktorzerlegung ermittelt (obwohl Primzahlen gar nicht im Lehrplan stehen).
- In den BHS wird in der 12. Schulstufe der RSA-Algorithmus zur Verschlüsselung mit öffentlichem Schlüssel erklärt:
- Der Empfänger gibt zwei große Zahlen n und e bekannt.
- Der Sender will a verschlüsseln und berechnet $b := a^e \, mod \, n$, den Rest der Potenz a^e nach Division mit Rest durch n.
- Der Empfänger weiß, dass $n = p.q$ das Produkt von zwei Primzahlen p und q ist und hat mit dem Erweiterten Euklidischen Algorithmus eine natürliche Zahl d mit $(p-1)(q-1).c + e.d = 1$ berechnet.

Die richtige Fährte legen: Primzahlen

- In den meisten österreichischen Schulbüchern der 6. Schulstufe wird der ggT zweier natürlicher Zahlen „einfach“ durch Primfaktorzerlegung ermittelt (obwohl Primzahlen gar nicht im Lehrplan stehen).
- In den BHS wird in der 12. Schulstufe der RSA-Algorithmus zur Verschlüsselung mit öffentlichem Schlüssel erklärt:
- Der Empfänger gibt zwei große Zahlen n und e bekannt.
- Der Sender will a verschlüsseln und berechnet $b := a^e \mathit{mod}\, n$, den Rest der Potenz a^e nach Division mit Rest durch n.
- Der Empfänger weiß, dass $n = p.q$ das Produkt von zwei Primzahlen p und q ist und hat mit dem Erweiterten Euklidischen Algorithmus eine natürliche Zahl d mit $(p-1)(q-1).c + e.d = 1$ berechnet.
- Der Empfänger berechnet $b^d \mathit{mod}\, n$, den Rest der Potenz b^d nach Division mit Rest durch n, und das ist a.

Die richtige Fährte legen: Primzahlen

- In den meisten österreichischen Schulbüchern der 6. Schulstufe wird der ggT zweier natürlicher Zahlen „einfach“ durch Primfaktorzerlegung ermittelt (obwohl Primzahlen gar nicht im Lehrplan stehen).
- In den BHS wird in der 12. Schulstufe der RSA-Algorithmus zur Verschlüsselung mit öffentlichem Schlüssel erklärt:
- Der Empfänger gibt zwei große Zahlen n und e bekannt.
- Der Sender will a verschlüsseln und berechnet $b := a^e \mathit{mod}\, n$, den Rest der Potenz a^e nach Division mit Rest durch n.
- Der Empfänger weiß, dass $n = p.q$ das Produkt von zwei Primzahlen p und q ist und hat mit dem Erweiterten Euklidischen Algorithmus eine natürliche Zahl d mit $(p-1)(q-1).c + e.d = 1$ berechnet.
- Der Empfänger berechnet $b^d \mathit{mod}\, n$, den Rest der Potenz b^d nach Division mit Rest durch n, und das ist a.
- Warum kann nicht jeder „einfach“ n in Primfaktoren zerlegen und d berechnen?

Die richtige Fährte legen: Primzahlen

- Berechnet man in der Sekundarstufe 1 den ggT mit der schwierigen Primfaktorzerlegung anstatt mit dem einfachen euklidischen Algorithmus, wird eine falsche Vorstellung erweckt (und die Chance vertan, die grundlegende Strategie des erlaubten Umformens früh einzuführen).

Die richtige Fährte legen: Primzahlen

- Berechnet man in der Sekundarstufe 1 den ggT mit der schwierigen Primfaktorzerlegung anstatt mit dem einfachen euklidischen Algorithmus, wird eine falsche Vorstellung erweckt (und die Chance vertan, die grundlegende Strategie des erlaubten Umformens früh einzuführen).

- In allen Computeralgebrasystemen wird zur Berechnung des ggT der euklidische Algorithmus verwendet, er ist leicht zu programmieren und sehr effizient.

Die richtige Fährte legen: Primzahlen

- Berechnet man in der Sekundarstufe 1 den ggT mit der schwierigen Primfaktorzerlegung anstatt mit dem einfachen euklidischen Algorithmus, wird eine falsche Vorstellung erweckt (und die Chance vertan, die grundlegende Strategie des erlaubten Umformens früh einzuführen).
- In allen Computeralgebrasystemen wird zur Berechnung des ggT der euklidische Algorithmus verwendet, er ist leicht zu programmieren und sehr effizient.
- Die Primfaktorzerlegung ist sehr schwierig und wird in keinem effizienten Verfahren verwendet.Für „sehr große“ Zahlen würden alle Computer der Welt gemeinsam 100 Jahre brauchen, um ihre Primfaktoren zu berechnen.

Die richtige Fährte legen: Lineare Gleichungen

Was haben die folgenden drei Aufgaben gemeinsam?

- 8. Schulstufe: Finde alle Paare reeller Zahlen (x, y) mit
  $3x + 4y = 5$!
  (lineare Gleichung mit 2 Unbekannten)

Die richtige Fährte legen: Lineare Gleichungen

Was haben die folgenden drei Aufgaben gemeinsam?

- 8. Schulstufe: Finde alle Paare reeller Zahlen (x, y) mit
  $3x + 4y = 5$!
  (lineare Gleichung mit 2 Unbekannten)

- 11. Schulstufe: Finde alle Folgen $(a(n))_{n\in\mathbb{N}}$ mit:
  für alle natürlichen Zahlen n ist $a(n+1) - 2.a(n) = 6$!
  (lineare Differenzengleichung der Ordnung 1)

Die richtige Fährte legen: Lineare Gleichungen

Was haben die folgenden drei Aufgaben gemeinsam?

- 8. Schulstufe: Finde alle Paare reeller Zahlen (x, y) mit
  $3x + 4y = 5$!
  (lineare Gleichung mit 2 Unbekannten)

- 11. Schulstufe: Finde alle Folgen $(a(n))_{n \in \mathbb{N}}$ mit:
  für alle natürlichen Zahlen n ist $a(n+1) - 2.a(n) = 6$!
  (lineare Differenzengleichung der Ordnung 1)

- 12. Schulstufe: Finde alle differenzierbaren Funktionen f mit
  $f' - 2f = 7$!
  (lineare Differenzialgleichung der Ordnung 1)

Die richtige Fährte legen: Lineare Gleichungen

Bei allen drei löst man zuerst die entsprechende homogene Gleichung und stellt fest, dass mit einer Lösung auch alle Vielfachen Lösungen sind und dass alle Lösungen Vielfache einer einzigen sind.

- Finde alle Paare reeller Zahlen (x, y) mit 3x+4y=0 !
  Lösungsmenge: alle Vielfachen von $(-4, 3)$

Die richtige Fährte legen: Lineare Gleichungen

Bei allen drei löst man zuerst die entsprechende homogene Gleichung und stellt fest, dass mit einer Lösung auch alle Vielfachen Lösungen sind und dass alle Lösungen Vielfache einer einzigen sind.

- Finde alle Paare reeller Zahlen (x, y) mit 3x+4y=0 !
  Lösungsmenge: alle Vielfachen von $(-4, 3)$
- Finde alle Folgen $(a(n))_{n\in\mathbb{N}}$ mit:
  für alle natürlichen Zahlen n ist $a(n+1) - 2.a(n) = 0$!
  Lösungsmenge: alle Vielfachen der „geometrischen Folge “ $(2^n)_{n\in\mathbb{N}}$

Die richtige Fährte legen: Lineare Gleichungen

Bei allen drei löst man zuerst die entsprechende homogene Gleichung und stellt fest, dass mit einer Lösung auch alle Vielfachen Lösungen sind und dass alle Lösungen Vielfache einer einzigen sind.

- Finde alle Paare reeller Zahlen (x, y) mit 3x+4y=0 !
  Lösungsmenge: alle Vielfachen von $(-4, 3)$
- Finde alle Folgen $(a(n))_{n\in\mathbb{N}}$ mit:
  für alle natürlichen Zahlen n ist $a(n+1) - 2.a(n) = 0$!
  Lösungsmenge: alle Vielfachen der „geometrischen Folge “ $(2^n)_{n\in\mathbb{N}}$
- Finde alle differenzierbaren Funktionen f mit $f' - 2f = 0$!
  Lösungsmenge: alle Vielfachen der „Exponentialfunktion“ g mit $g(t) = e^{2t}$

Beispiel: Lineare Gleichungen

Finde dann irgendeine Lösung der ursprünglichen Gleichung und addiere diese zu jedem Element der Lösungsmenge der homogenen Gleichung! Alle drei Aufgaben waren lineare Gleichungen mit eindimensionaler Lösungsmenge.

- $\{(1, \frac{1}{2}) + c.(-4, 3) \mid c \in \mathbb{R}\}$ Lm. von $3x + 4y = 5$ (8. Schulstufe)

Beispiel: Lineare Gleichungen

Finde dann irgendeine Lösung der ursprünglichen Gleichung und addiere diese zu jedem Element der Lösungsmenge der homogenen Gleichung! Alle drei Aufgaben waren lineare Gleichungen mit eindimensionaler Lösungsmenge.

- $\{(1, \frac{1}{2}) + c.(-4, 3) \mid c \in \mathbb{R}\}$ Lm. von $3x + 4y = 5$
  (8. Schulstufe)

- $\{(-6)_{n\in\mathbb{N}} + c.(2^n)_{n\in\mathbb{N}} \mid c \in \mathbb{R}\}$ Lm. von $a(n+1) - 2.a(n) = 6$
  (11. Schulstufe)

Beispiel: Lineare Gleichungen

Finde dann irgendeine Lösung der ursprünglichen Gleichung und addiere diese zu jedem Element der Lösungsmenge der homogenen Gleichung! Alle drei Aufgaben waren lineare Gleichungen mit eindimensionaler Lösungsmenge.

- $\{(1, \frac{1}{2}) + c.(-4, 3) \mid c \in \mathbb{R}\}$ Lm. von $3x + 4y = 5$
  (8. Schulstufe)

- $\{(-6)_{n\in\mathbb{N}} + c.(2^n)_{n\in\mathbb{N}} \mid c \in \mathbb{R}\}$ Lm. von $a(n+1) - 2.a(n) = 6$
  (11. Schulstufe)
- $\{\frac{-7}{2} + c.g \mid c \in \mathbb{R}\}$, dabei ist g die Funktion mit $g(t) = e^{2t}$.
  Lm. von $f' - 2f = 7$
  (12. Schulstufe)

Die richtige Fährte legen

- Bei der Planung des Unterrichts ist es einerseits wichtig, zurück zu schauen: Was haben die Schülerinnen und Schüler bisher gelernt? Worauf kann der Unterricht aufbauen?

Die richtige Fährte legen

- Bei der Planung des Unterrichts ist es einerseits wichtig, zurück zu schauen: Was haben die Schülerinnen und Schüler bisher gelernt? Worauf kann der Unterricht aufbauen?
- Andererseits ist es auch wichtig, nach Vorne zu schauen: Was wird in folgenden Schuljahren auf das zu unterrichtende Thema aufbauen? Wie soll es unterrichtet werden, damit die Schülerinnen und Schüler einen „roten Faden“ erkennen können?

Die richtige Fährte legen

- Bei der Planung des Unterrichts ist es einerseits wichtig, zurück zu schauen: Was haben die Schülerinnen und Schüler bisher gelernt? Worauf kann der Unterricht aufbauen?
- Andererseits ist es auch wichtig, nach Vorne zu schauen: Was wird in folgenden Schuljahren auf das zu unterrichtende Thema aufbauen? Wie soll es unterrichtet werden, damit die Schülerinnen und Schüler einen „roten Faden“ erkennen können?
- Das ist einer der Gründe, warum es wichtig ist, dass Lehrpersonen der Sekundarstufe 1 für den Unterricht in der gesamten Sekundarstufe ausgebildet werden.

Persönlichkeitsbildung im Mathematikunterricht

- Im Mathematikunterricht lernt man nicht nur nützliche Verfahren zum Lösen verschiedener Aufgaben, sondern auch vorurteilsfrei und kritisch zu denken.

Persönlichkeitsbildung im Mathematikunterricht

- Im Mathematikunterricht lernt man nicht nur nützliche Verfahren zum Lösen verschiedener Aufgaben, sondern auch vorurteilsfrei und kritisch zu denken.
- Für eine demokratische Gesellschaft ist es wichtig, dass möglichst viele Bürger/innen Behauptungen, Nachrichten oder Versprechungen nicht einfach für wahr halten, ohne Begründungen zu fordern oder zumindest „Ist das wirklich so?“ gefragt zu haben.

Persönlichkeitsbildung im Mathematikunterricht

- Wenn im Mathematikunterricht erlernt wird, klar und genau zu denken, verständlich und präzise zu sprechen, Aufgaben systematisch abzuarbeiten, dann wird damit auch das Selbstbewusstsein der Kinder und Jugendlichen gestärkt.

Persönlichkeitsbildung im Mathematikunterricht

- Wenn im Mathematikunterricht erlernt wird, klar und genau zu denken, verständlich und präzise zu sprechen, Aufgaben systematisch abzuarbeiten, dann wird damit auch das Selbstbewusstsein der Kinder und Jugendlichen gestärkt.
- Wer erfahren hat, dass man mathematische Aufgaben durch Nachdenken und Diskussion lösen kann, überträgt das vielleicht auch auf den persönlichen Bereich und kann dann Konflikte mit anderen Schüler/inne/n intelligenter lösen als durch Zuschlagen.

Schlussbemerkungen

- Die Sprache im Mathematikunterricht muss einfach und verständlich sein und möglichst wenige Fachbegriffe verwenden.

Schlussbemerkungen

- Die Sprache im Mathematikunterricht muss einfach und verständlich sein und möglichst wenige Fachbegriffe verwenden.
- Die notwendigen Fachbegriffe müssen sorgfältig und präzise eingeführt werden (wenn auch nicht immer durch Definitionen im Sinn der Mathematik).

Schlussbemerkungen

- Die Sprache im Mathematikunterricht muss einfach und verständlich sein und möglichst wenige Fachbegriffe verwenden.
- Die notwendigen Fachbegriffe müssen sorgfältig und präzise eingeführt werden (wenn auch nicht immer durch Definitionen im Sinn der Mathematik).
- Die Inhalte sollen so dargestellt werden, dass sie für die Schüler/innen (in der jeweiligen Altersstufe und mit ihrem jeweiligen Wissensstand) gut verständlich sind.

Schlussbemerkungen

- Die Sprache im Mathematikunterricht muss einfach und verständlich sein und möglichst wenige Fachbegriffe verwenden.
- Die notwendigen Fachbegriffe müssen sorgfältig und präzise eingeführt werden (wenn auch nicht immer durch Definitionen im Sinn der Mathematik).
- Die Inhalte sollen so dargestellt werden, dass sie für die Schüler/innen (in der jeweiligen Altersstufe und mit ihrem jeweiligen Wissensstand) gut verständlich sind.
- Möglichst viele Inhalte sollen nachvollziehbar hergeleitet werden.

Schlussbemerkungen

- Die Übungsaufgaben müssen zugleich einfach und präzise formuliert werden. Sie sollen das kritische und vorurteilsfreie Denken, Modellieren und Problemlösen trainieren.

Schlussbemerkungen

- Die Übungsaufgaben müssen zugleich einfach und präzise formuliert werden. Sie sollen das kritische und vorurteilsfreie Denken, Modellieren und Problemlösen trainieren.
- Stehen für ein Thema mehrere Algorithmen zur Auswahl, soll jener verwendet werden, der einfach zu erklären und „rechnerisch gut“ ist.

Schlussbemerkungen

- Die Übungsaufgaben müssen zugleich einfach und präzise formuliert werden. Sie sollen das kritische und vorurteilsfreie Denken, Modellieren und Problemlösen trainieren.
- Stehen für ein Thema mehrere Algorithmen zur Auswahl, soll jener verwendet werden, der einfach zu erklären und „rechnerisch gut“ ist.
- Die Planung des Unterrichts muss nicht nur berücksichtigen, was zu einem Thema schon bekannt ist, sondern auch, was in späteren Jahren darauf aufbauen soll.

Schlussbemerkungen

- Die Übungsaufgaben müssen zugleich einfach und präzise formuliert werden. Sie sollen das kritische und vorurteilsfreie Denken, Modellieren und Problemlösen trainieren.
- Stehen für ein Thema mehrere Algorithmen zur Auswahl, soll jener verwendet werden, der einfach zu erklären und „rechnerisch gut“ ist.
- Die Planung des Unterrichts muss nicht nur berücksichtigen, was zu einem Thema schon bekannt ist, sondern auch, was in späteren Jahren darauf aufbauen soll.
- **Umsetzung erfordert Lehrpersonen mit hoher fachlicher und didaktischer Qualität.**

Schlussbemerkungen

- Bachelor- und Masterstudium Lehramt Sekundarstufe mit insgesamt 6 Jahren für *alle* Lehrpersonen in der Sekundarstufe war ein bildungspolitisch wichtiger Schritt.

Schlussbemerkungen

- Bachelor- und Masterstudium Lehramt Sekundarstufe mit insgesamt 6 Jahren für *alle* Lehrpersonen in der Sekundarstufe war ein bildungspolitisch wichtiger Schritt.
- Zieht man die hohe Verantwortung des Lehrberufs, die umfangreichen fachlichen, fachdidaktischen und pädagogischen Aufgaben und die damit verbundenen Herausforderungen an die Lehrpersonen in Betracht, dann sind 6 Jahre Studium keineswegs zu lang.

Schlussbemerkungen

- Bachelor- und Masterstudium Lehramt Sekundarstufe mit insgesamt 6 Jahren für *alle* Lehrpersonen in der Sekundarstufe war ein bildungspolitisch wichtiger Schritt.
- Zieht man die hohe Verantwortung des Lehrberufs, die umfangreichen fachlichen, fachdidaktischen und pädagogischen Aufgaben und die damit verbundenen Herausforderungen an die Lehrpersonen in Betracht, dann sind 6 Jahre Studium keineswegs zu lang.
- Wer wird nach dem 6-jährigen Studium noch in der Sekundarstufe 1 unterrichten wollen?

Schlussbemerkungen

- Bachelor- und Masterstudium Lehramt Sekundarstufe mit insgesamt 6 Jahren für *alle* Lehrpersonen in der Sekundarstufe war ein bildungspolitisch wichtiger Schritt.
- Zieht man die hohe Verantwortung des Lehrberufs, die umfangreichen fachlichen, fachdidaktischen und pädagogischen Aufgaben und die damit verbundenen Herausforderungen an die Lehrpersonen in Betracht, dann sind 6 Jahre Studium keineswegs zu lang.
- Wer wird nach dem 6-jährigen Studium noch in der Sekundarstufe 1 unterrichten wollen?
- Hoffentlich die Besten!

Alles Gute für Ihr Studium! Danke für die Aufmerksamkeit!

http://www.uibk.ac.at/mathematik/personal/pauer/

franz.pauer@uibk.ac.at