Division mit Rest und Division

Zwei wesentlich verschiedene Rechenoperationen

Franz Pauer

Universität Innsbruck

25. April 2025

Inhalt

- Zwei Aufgaben zu einem Brett

Inhalt

- Zwei Aufgaben zu einem Brett
- Grundvorstellungen für die zwei Rechenoperationen

Inhalt

- Zwei Aufgaben zu einem Brett
- Grundvorstellungen für die zwei Rechenoperationen
- Division mit Rest

Inhalt

- Zwei Aufgaben zu einem Brett
- Grundvorstellungen für die zwei Rechenoperationen
- Division mit Rest
- Division

Inhalt

Inhalt

Inhalt

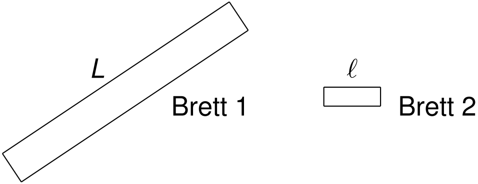
- Zwei Aufgaben zu einem Brett
- Grundvorstellungen für die zwei Rechenoperationen
- Division mit Rest
- Division
- Division mit Rest von nat. Zahlen in Zifferndarstellung
- Näherungsweises Dividieren von Dezimalzahlen
- Division mit Rest für negative Zahlen und Polynome

Inhalt

Inhalt

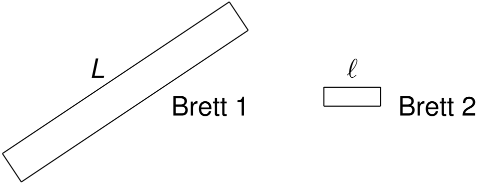
Zwei Aufgaben zu einem Brett

- Rechteckige Bretter mit Längen L und ℓ

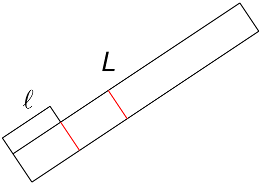


Zwei Aufgaben zu einem Brett

- Rechteckige Bretter mit Längen L und ℓ

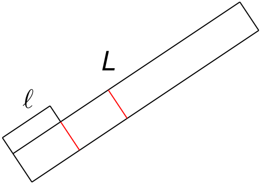


- Wieviele rechteckige Bretter der Länge ℓ (und mit derselben Breite wie Brett 1) kann man höchstens aus Brett 1 erhalten?



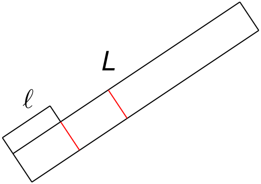
Zwei Aufgaben einem Brett

- Praktische Lösung mit einer Säge: Schneide - am Rand beginnend - vom Brett 1 (mit Länge L) solange rechteckige Bretter der Länge ℓ ab, wie das möglich ist.



Zwei Aufgaben einem Brett

- Praktische Lösung mit einer Säge: Schneide - am Rand beginnend - vom Brett 1 (mit Länge L) solange rechteckige Bretter der Länge ℓ ab, wie das möglich ist.



- „Rechnerisch“ formuliert: Subtrahiere die Länge ℓ so oft wie möglich von der Länge L.

$$L = q \cdot \ell + r \quad \text{und} \quad r < \ell$$

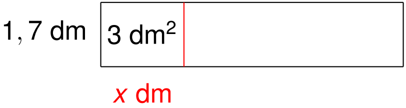
Division mit Rest von L durch ℓ,
bedeutet: „so oft wie möglich subtrahieren“.

Zwei Aufgaben zu einem Brett

- Das rechteckige Brett 1 hat die Länge L und die Breite $1,7$ dm.

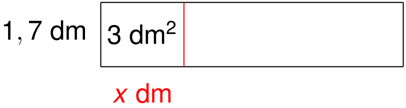
Zwei Aufgaben zu einem Brett

- Das rechteckige Brett 1 hat die Länge L und die Breite $1,7$ dm.
- Säge ein rechteckiges Brett derselben Breite so ab, dass dessen Flächeninhalt 3 dm^2 ist.



Zwei Aufgaben zu einem Brett

- Das rechteckige Brett 1 hat die Länge L und die Breite $1,7$ dm.
- Säge ein rechteckiges Brett derselben Breite so ab, dass dessen Flächeninhalt 3 dm^2 ist.

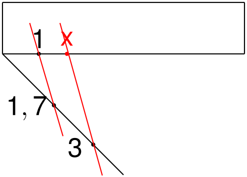


- Also: Löse die Gleichung

$$1,7 \cdot x = 3\,.$$

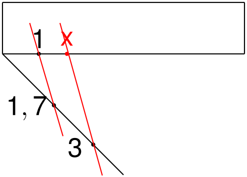
Zwei Aufgaben zu einem Brett

- Praktische Lösung mit einem Maßstab, einem Lineal und einem Dreieck.



Zwei Aufgaben zu einem Brett

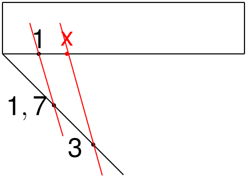
- Praktische Lösung mit einem Maßstab, einem Lineal und einem Dreieck.



- Rechnerische Lösung: Löse die Gleichung $1,7 \cdot x = 3$.

Zwei Aufgaben zu einem Brett

- Praktische Lösung mit einem Maßstab, einem Lineal und einem Dreieck.

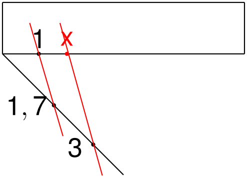


- Rechnerische Lösung: Löse die Gleichung $1,7 \cdot x = 3$.

  Löse zuerst $1,7 \cdot x = 1$, dh.: Berechne die zu $1,7$ *inverse Zahl*, Schreibweise: $1 : 1,7$ oder $1,7^{-1}$ oder $1/1,7$.

Zwei Aufgaben zu einem Brett

- Praktische Lösung mit einem Maßstab, einem Lineal und einem Dreieck.



- Rechnerische Lösung: Löse die Gleichung $1{,}7 \cdot x = 3\,.$

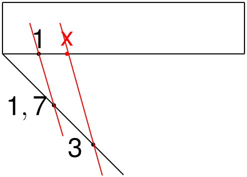
  Löse zuerst $1{,}7 \cdot x = 1$, dh.: Berechne die zu $1{,}7$ *inverse Zahl*, Schreibweise: $1 : 1{,}7$ oder $1{,}7^{-1}$ oder $1/1{,}7$.

  Dann:

$$x = 1{,}7^{-1} \cdot 1{,}7 \cdot x = 1{,}7^{-1} \cdot 3\,.$$

Zwei Aufgaben zu einem Brett

- Praktische Lösung mit einem Maßstab, einem Lineal und einem Dreieck.



- Rechnerische Lösung: Löse die Gleichung $1,7 \cdot x = 3$.

  Löse zuerst $1,7 \cdot x = 1$, dh.: Berechne die zu $1,7$ *inverse Zahl*, Schreibweise: $1 : 1,7$ oder $1,7^{-1}$ oder $1/1,7$.

  Dann:
$$x = 1,7^{-1} \cdot 1,7 \cdot x = 1,7^{-1} \cdot 3\,.$$

- *Division* von 3 durch $1,7$ ist Multiplikation von 3 mit $1,7^{-1}$.

Grundvorstellungen DmR

- Grundvorstellung zur Division mit Rest (DmR): mehrfache Subtraktion (so oft wie möglich).

Grundvorstellungen DmR

- Grundvorstellung zur Division mit Rest (DmR): mehrfache Subtraktion (so oft wie möglich).
- Wer subtrahieren kann, kann auch mit Rest dividieren.

Grundvorstellungen DmR

- Grundvorstellung zur Division mit Rest (DmR): mehrfache Subtraktion (so oft wie möglich).
- Wer subtrahieren kann, kann auch mit Rest dividieren.
- Analogie zu „Multiplikation ist mehrfache Addition“

Grundvorstellungen DmR

- Grundvorstellung zur Division mit Rest (DmR): mehrfache Subtraktion (so oft wie möglich).
- Wer subtrahieren kann, kann auch mit Rest dividieren.
- Analogie zu „Multiplikation ist mehrfache Addition“
- Voraussetzungen für die DmR:

Grundvorstellungen DmR

- Grundvorstellung zur Division mit Rest (DmR): mehrfache Subtraktion (so oft wie möglich).
- Wer subtrahieren kann, kann auch mit Rest dividieren.
- Analogie zu „Multiplikation ist mehrfache Addition“
- Voraussetzungen für die DmR:
  - Subtraktion

Grundvorstellungen DmR

- Grundvorstellung zur Division mit Rest (DmR): mehrfache Subtraktion (so oft wie möglich).
- Wer subtrahieren kann, kann auch mit Rest dividieren.
- Analogie zu „Multiplikation ist mehrfache Addition“
- Voraussetzungen für die DmR:
  - Subtraktion
  - Ordnungsrelation

Grundvorstellungen DmR

- Grundvorstellung zur Division mit Rest (DmR): mehrfache Subtraktion (so oft wie möglich).
- Wer subtrahieren kann, kann auch mit Rest dividieren.
- Analogie zu „Multiplikation ist mehrfache Addition“
- Voraussetzungen für die DmR:
  - Subtraktion
  - Ordnungsrelation
  - Ergebnis nach endlich vielen Schritten (daher ist DmR durch 0 nicht möglich)

Grundvorstellungen DmR

- Grundvorstellung zur Division mit Rest (DmR): mehrfache Subtraktion (so oft wie möglich).
- Wer subtrahieren kann, kann auch mit Rest dividieren.
- Analogie zu „Multiplikation ist mehrfache Addition“
- Voraussetzungen für die DmR:
  - Subtraktion
  - Ordnungsrelation
  - Ergebnis nach endlich vielen Schritten (daher ist DmR durch 0 nicht möglich)
- Voraussetzungen in $\mathbb{N}, \mathbb{Q}_{\geq 0}, \mathbb{R}_{\geq 0}$ und in Größenbereichen wie Länge, Volumen, Masse, ... erfüllt, nicht erfüllt in $\mathbb{C}$.

Grundvorstellungen Division

- Grundvorstellung zur Division: Multiplikation mit der inversen Zahl des Divisors, „Umkehrung der Multiplikation“.

Grundvorstellungen Division

- Grundvorstellung zur Division: Multiplikation mit der inversen Zahl des Divisors, „Umkehrung der Multiplikation“.
- Wer multiplizieren kann und die zum Divisor inverse Zahl kennt, kann auch dividieren.

Grundvorstellungen Division

- Grundvorstellung zur Division: Multiplikation mit der inversen Zahl des Divisors, „Umkehrung der Multiplikation“.
- Wer multiplizieren kann und die zum Divisor inverse Zahl kennt, kann auch dividieren.
- Analogie zu „Subtraktion ist Umkehrung der Addition“

Grundvorstellungen Division

- Grundvorstellung zur Division: Multiplikation mit der inversen Zahl des Divisors, „Umkehrung der Multiplikation“.
- Wer multiplizieren kann und die zum Divisor inverse Zahl kennt, kann auch dividieren.
- Analogie zu „Subtraktion ist Umkehrung der Addition“
- Voraussetzungen für die Division:

Grundvorstellungen Division

- Grundvorstellung zur Division: Multiplikation mit der inversen Zahl des Divisors, „Umkehrung der Multiplikation“.
- Wer multiplizieren kann und die zum Divisor inverse Zahl kennt, kann auch dividieren.
- Analogie zu „Subtraktion ist Umkehrung der Addition“
- Voraussetzungen für die Division:
  - Multiplikation

Grundvorstellungen Division

- Grundvorstellung zur Division: Multiplikation mit der inversen Zahl des Divisors, „Umkehrung der Multiplikation“.
- Wer multiplizieren kann und die zum Divisor inverse Zahl kennt, kann auch dividieren.
- Analogie zu „Subtraktion ist Umkehrung der Addition“
- Voraussetzungen für die Division:
  - Multiplikation
  - Existenz der zum Divisor inversen Zahl (und Kenntnis derselben)

Grundvorstellungen Division

- Grundvorstellung zur Division: Multiplikation mit der inversen Zahl des Divisors, „Umkehrung der Multiplikation“.
- Wer multiplizieren kann und die zum Divisor inverse Zahl kennt, kann auch dividieren.
- Analogie zu „Subtraktion ist Umkehrung der Addition“
- Voraussetzungen für die Division:
  - Multiplikation
  - Existenz der zum Divisor inversen Zahl (und Kenntnis derselben)
- Ordnungsrelation nicht erforderlich.

Grundvorstellungen Division

- Grundvorstellung zur Division: Multiplikation mit der inversen Zahl des Divisors, „Umkehrung der Multiplikation“.
- Wer multiplizieren kann und die zum Divisor inverse Zahl kennt, kann auch dividieren.
- Analogie zu „Subtraktion ist Umkehrung der Addition“
- Voraussetzungen für die Division:
  - Multiplikation
  - Existenz der zum Divisor inversen Zahl (und Kenntnis derselben)
- Ordnungsrelation nicht erforderlich.
- Inverse Zahlen existieren in $\mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$ nur für 0 nicht. (Die Gleichung $0 \cdot x = 1$ hat keine Lösung, weil $0 \cdot x = 0$ ist).

Grundvorstellungen Division

- Grundvorstellung zur Division: Multiplikation mit der inversen Zahl des Divisors, „Umkehrung der Multiplikation“.
- Wer multiplizieren kann und die zum Divisor inverse Zahl kennt, kann auch dividieren.
- Analogie zu „Subtraktion ist Umkehrung der Addition“
- Voraussetzungen für die Division:
  - Multiplikation
  - Existenz der zum Divisor inversen Zahl (und Kenntnis derselben)
- Ordnungsrelation nicht erforderlich.
- Inverse Zahlen existieren in $\mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$ nur für 0 nicht.
  (Die Gleichung $0 \cdot x = 1$ hat keine Lösung, weil $0 \cdot x = 0$ ist).
- In $\mathbb{N}$ hat nur 1 eine inverse Zahl, daher hat die Division dort keine Bedeutung.

Division mit Rest

Im weiteren nur DmR von natürlichen Zahlen.
(Analog in $\mathbb{Q}_{\geq 0}, \mathbb{R}_{\geq 0}$ und gewissen Größenbereichen).

- Gegeben zwei natürliche Zahlen c, d mit $d \neq 0$. Gesucht sind *zwei* natürliche Zahlen q, r so, dass

$$c = q \cdot d + r \text{ und } r < d\ .$$

q *ganzzahliger Quotient* und r *Rest* (von c nach DmR durch d).

Division mit Rest

Im weiteren nur DmR von natürlichen Zahlen.
(Analog in $\mathbb{Q}_{\geq 0}, \mathbb{R}_{\geq 0}$ und gewissen Größenbereichen).

- Gegeben zwei natürliche Zahlen c, d mit $d \neq 0$. Gesucht sind *zwei* natürliche Zahlen q, r so, dass

  $$c = q \cdot d + r \;\text{ und }\; r < d \; .$$

  q *ganzzahliger Quotient* und r *Rest* (von c nach DmR durch d).

- Algorithmus für DmR: Subtrahiere d solange von c, wie die Differenz nicht negativ ist.
  Die Anzahl der Subtraktionen ist der ganzzahlige Quotient q, die letzte nicht negative Differenz ist der Rest r.

Division mit Rest

Im weiteren nur DmR von natürlichen Zahlen.
(Analog in $\mathbb{Q}_{\geq 0}, \mathbb{R}_{\geq 0}$ und gewissen Größenbereichen).

- Gegeben zwei natürliche Zahlen c, d mit $d \neq 0$. Gesucht sind *zwei* natürliche Zahlen q, r so, dass

  $$c = q \cdot d + r \;\text{ und }\; r < d \,.$$

  q *ganzzahliger Quotient* und r *Rest* (von c nach DmR durch d).

- Algorithmus für DmR: Subtrahiere d solange von c, wie die Differenz nicht negativ ist.
  Die Anzahl der Subtraktionen ist der ganzzahlige Quotient q, die letzte nicht negative Differenz ist der Rest r.

- Wichtig: DmR verbindet die drei „Grundstrukturen“ in $\mathbb{N}$: Addition ($+$), Multiplikation ($\cdot$) und Ordnungsrelation ($<$).

Anwendungen der DmR in der Mathematik

- Bestimmung der Zifferndarstellung einer natürlichen Zahl

Anwendungen der DmR in der Mathematik

- Bestimmung der Zifferndarstellung einer natürlichen Zahl
- Euklidischer Algorithmus: durch mehrfache DmR wird der ggT zweier natürlicher Zahlen berechnet,
  wichtig zum Kürzen von Bruchzahlen.

Anwendungen der DmR in der Mathematik

- Bestimmung der Zifferndarstellung einer natürlichen Zahl
- Euklidischer Algorithmus: durch mehrfache DmR wird der ggT zweier natürlicher Zahlen berechnet,
  wichtig zum Kürzen von Bruchzahlen.
- Erweiterter Euklidischer Algorithmus: zur Berechnung ganzzahliger Lösungen der Gleichung $a \cdot x + b \cdot y = c$
  (lösbar, wenn ggT(a, b) Teiler von c ist),
  wird z. B. beim RSA-Verfahren für die Verschlüsselung des PIN am Bankomat verwendet.

Anwendungen der DmR in der Mathematik

- Bestimmung der Zifferndarstellung einer natürlichen Zahl
- Euklidischer Algorithmus: durch mehrfache DmR wird der ggT zweier natürlicher Zahlen berechnet,
  wichtig zum Kürzen von Bruchzahlen.
- Erweiterter Euklidischer Algorithmus: zur Berechnung ganzzahliger Lösungen der Gleichung $a \cdot x + b \cdot y = c$
  (lösbar, wenn ggT(a, b) Teiler von c ist),
  wird z. B. beim RSA-Verfahren für die Verschlüsselung des PIN am Bankomat verwendet.
- Jedes effiziente Verfahren zum Rechnen mit ganzen Zahlen verwendet DmR, EA oder EEA. Deren gute Implementierung ist für CAS sehr wichtig.

Anwendungen der DmR im Alltag

- *„Messen“* : Wieviele Gläser mit Volumen v können höchstens mit einem Krug Wasser mit Volumen V gefüllt werden? Wieviel bleibt dann über?

Anwendungen der DmR im Alltag

- *„Messen"* : Wieviele Gläser mit Volumen v können höchstens mit einem Krug Wasser mit Volumen V gefüllt werden? Wieviel bleibt dann über?
  - Fülle mit dem Krug soviele Gläser wie möglich (subtrahiere v so oft von V wie möglich).

Anwendungen der DmR im Alltag

- *„Messen"* : Wieviele Gläser mit Volumen v können höchstens mit einem Krug Wasser mit Volumen V gefüllt werden?
  Wieviel bleibt dann über?
  - Fülle mit dem Krug soviele Gläser wie möglich (subtrahiere v so oft von V wie möglich).
  - Der ganzzahlige Quotient ist die Anzahl der gefüllten Gläser, das Volumen des im Krug verbliebenen Wassers ist der Rest.

Anwendungen der DmR im Alltag

- *„Teilen“*: Verteile möglichst viele Zuckerln aus einem Sack so auf 7 Kinder, dass jedes Kind gleich viele bekommt.
  Wieviele bekommt jedes Kind? Wieviele bleiben über?

Anwendungen der DmR im Alltag

- *„Teilen"*: Verteile möglichst viele ZuckerIn aus einem Sack so auf 7 Kinder, dass jedes Kind gleich viele bekommt.
  Wieviele bekommt jedes Kind? Wieviele bleiben über?
  - Nimm so oft je 7 ZuckerIn aus dem Sack wie das möglich ist (Messen; mehrfache Subtraktion von 7 von der Anzahl der ZuckerIn im Sack).

Anwendungen der DmR im Alltag

- *„Teilen“*: Verteile möglichst viele Zuckerln aus einem Sack so auf 7 Kinder, dass jedes Kind gleich viele bekommt.
  Wieviele bekommt jedes Kind? Wieviele bleiben über?
  - Nimm so oft je 7 Zuckerln aus dem Sack wie das möglich ist (Messen; mehrfache Subtraktion von 7 von der Anzahl der Zuckerln im Sack).
  - Gib nach jeder Entnahme jedem Kind ein Zuckerl.

Anwendungen der DmR im Alltag

- *„Teilen“*: Verteile möglichst viele Zuckerln aus einem Sack so auf 7 Kinder, dass jedes Kind gleich viele bekommt.
  Wieviele bekommt jedes Kind? Wieviele bleiben über?
  - Nimm so oft je 7 Zuckerln aus dem Sack wie das möglich ist (Messen; mehrfache Subtraktion von 7 von der Anzahl der Zuckerln im Sack).
  - Gib nach jeder Entnahme jedem Kind ein Zuckerl.
  - Höre auf, sobald weniger als 7 Zuckerln im Sack sind.
    Der ganzzahlige Quotient ist die Anzahl der Zuckerln, die jedes Kind bekommen hat.
    Der Rest ist die Anzahl der Zuckerln, die noch im Sack sind.

Division

- Eine Zahl c durch eine Zahl $d \neq 0$ *dividieren*, heißt die Gleichung

  $$d \cdot x = c$$

  lösen (das Produkt zweier Zahlen und ein Faktor sind bekannt, berechne den anderen Faktor)

Division

- Eine Zahl c durch eine Zahl $d \neq 0$ *dividieren*, heißt die Gleichung

$$d \cdot x = c$$

  lösen (das Produkt zweier Zahlen und ein Faktor sind bekannt, berechne den anderen Faktor)

- Wenn die Gleichung $d \cdot x = 1$ im betrachteten Zahlbereich eine Lösung hat (also die zu d inverse Zahl d^{-1} existiert), dann hat für jede Zahl c die Gleichung $d \cdot x = c$ eine Lösung, und zwar

$$d^{-1} \cdot c\,.$$

  Diese heißt *Quotient* von c und d, Schreibweise: $c : d$ oder c/d.

Division

- Eine Zahl c durch eine Zahl $d \neq 0$ *dividieren*, heißt die Gleichung
$$d \cdot x = c$$
lösen (das Produkt zweier Zahlen und ein Faktor sind bekannt, berechne den anderen Faktor)

- Wenn die Gleichung $d \cdot x = 1$ im betrachteten Zahlbereich eine Lösung hat (also die zu d inverse Zahl d^{-1} existiert), dann hat für jede Zahl c die Gleichung $d \cdot x = c$ eine Lösung, und zwar
$$d^{-1} \cdot c\,.$$
Diese heißt *Quotient* von c und d, Schreibweise: $c : d$ oder c/d.

- *c durch d dividieren* heißt: c mit der zu d inversen Zahl $1/d = d^{-1}$ multiplizieren.

Division

- Eine Bruchzahl (oder rationale Zahl) $\frac{a}{b}$ ($b \neq 0$) hat eine dazu inverse Zahl, wenn ihr Zähler a nicht 0 ist:

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{b}{a} = \frac{a \cdot b}{b \cdot a} = 1 \, .$$

Division

- Eine Bruchzahl (oder rationale Zahl) $\frac{a}{b}$ ($b \neq 0$) hat eine dazu inverse Zahl, wenn ihr Zähler a nicht 0 ist:

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{b}{a} = \frac{a \cdot b}{b \cdot a} = 1\,.$$

- Die zu $\frac{a}{b}$ inverse Zahl ist der *Kehrwert* $\frac{b}{a}$.
  Durch die Bruchzahl $\frac{a}{b}$ zu dividieren heißt, mit ihrem Kehrwert multiplizieren.

Division

- Eine Bruchzahl (oder rationale Zahl) $\frac{a}{b}$ ($b \neq 0$) hat eine dazu inverse Zahl, wenn ihr Zähler a nicht 0 ist:

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{b}{a} = \frac{a \cdot b}{b \cdot a} = 1\,.$$

- Die zu $\frac{a}{b}$ inverse Zahl ist der *Kehrwert* $\frac{b}{a}$.
  Durch die Bruchzahl $\frac{a}{b}$ zu dividieren heißt, mit ihrem Kehrwert multiplizieren.

- Beispiel: Mit welcher Zahl muss man $\frac{11}{2}$ multiplizieren, um $\frac{3}{7}$ zu bekommen?
  Antwort: Mit

$$\frac{3}{7} : \frac{11}{2} = \frac{3}{7} \cdot \frac{2}{11} = \frac{6}{77}\ !$$

Division

- Jede natürliche Zahl ist eine Bruchzahl: $n = \frac{n}{1}$

Division

- Jede natürliche Zahl ist eine Bruchzahl: $n = \frac{n}{1}$
- Sei $n \neq 0$.

$$m : n = \frac{m}{1} : \frac{n}{1} = \frac{m}{1} \cdot \frac{1}{n} = \frac{m}{n}$$

Diese Division ist erst *nach* der Erweiterung von $\mathbb{N} \subset \mathbb{Q}_{\geq 0}$ möglich. Der Bruchstrich ist *kein* Divisionszeichen!

Division

- Jede natürliche Zahl ist eine Bruchzahl: $n = \frac{n}{1}$
- Sei $n \neq 0$.
$$m : n = \frac{m}{1} : \frac{n}{1} = \frac{m}{1} \cdot \frac{1}{n} = \frac{m}{n}$$
Diese Division ist erst *nach* der Erweiterung von $\mathbb{N} \subset \mathbb{Q}_{\geq 0}$ möglich. Der Bruchstrich ist *kein* Divisionszeichen!

- „Doppelbruch“:
$$\frac{\frac{c}{d}}{\frac{a}{b}} := \frac{c}{d} : \frac{a}{b} = \frac{c}{d} \cdot \frac{b}{a} = \frac{c \cdot b}{d \cdot a}$$
Der Strich zwischen den Brüchen ist *kein* Bruchstrich, sondern ein Divisionszeichen.
(Zähler und Nenner von Bruchzahlen sind ganze Zahlen !)

Division

- Jede natürliche Zahl ist eine Bruchzahl: $n = \frac{n}{1}$
- Sei $n \neq 0$.
$$m : n = \frac{m}{1} : \frac{n}{1} = \frac{m}{1} \cdot \frac{1}{n} = \frac{m}{n}$$
Diese Division ist erst *nach* der Erweiterung von $\mathbb{N} \subset \mathbb{Q}_{\geq 0}$ möglich. Der Bruchstrich ist *kein* Divisionszeichen!

- „Doppelbruch“:
$$\frac{\frac{c}{d}}{\frac{a}{b}} := \frac{c}{d} : \frac{a}{b} = \frac{c}{d} \cdot \frac{b}{a} = \frac{c \cdot b}{d \cdot a}$$
Der Strich zwischen den Brüchen ist *kein* Bruchstrich, sondern ein Divisionszeichen.
(Zähler und Nenner von Bruchzahlen sind ganze Zahlen !)

- Beispiel:
$$\frac{\frac{2}{3}}{\frac{5}{4}} := \frac{2}{3} : \frac{5}{4} = \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{5} = \frac{8}{15}$$

Division

- Division von reellen Zahlen, die nicht rationale Zahlen sind:

$$0 \neq z = \lim_{n \to \infty} \frac{a_n}{b_n}, \quad \text{wobei } 0 \neq a_n \in \mathbb{Z}, 0 \neq b_n \in \mathbb{Z}$$

Division

- Division von reellen Zahlen, die nicht rationale Zahlen sind:

$$0 \neq z = \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n}, \quad \text{wobei } 0 \neq a_n \in \mathbb{Z}, 0 \neq b_n \in \mathbb{Z}$$

- $$z^{-1} = \lim_{n\to\infty} \frac{b_n}{a_n}$$

  Division durch z heißt, mit z^{-1} multiplizieren.

Division

- Division von reellen Zahlen, die nicht rationale Zahlen sind:

$$0 \neq z = \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n}, \quad \text{wobei } 0 \neq a_n \in \mathbb{Z}, 0 \neq b_n \in \mathbb{Z}$$

- $$z^{-1} = \lim_{n\to\infty} \frac{b_n}{a_n}$$

  Division durch z heißt, mit z^{-1} multiplizieren.

- Beispiel:

$$\pi = \lim_{n\to\infty} \prod_{k=1}^{n} \frac{8k^2}{4k^2 - 1}$$

  (Wallissches Produkt)

Division

- Division von reellen Zahlen, die nicht rationale Zahlen sind:

$$0 \neq z = \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n}, \quad \text{wobei } 0 \neq a_n \in \mathbb{Z}, 0 \neq b_n \in \mathbb{Z}$$

- $$z^{-1} = \lim_{n\to\infty} \frac{b_n}{a_n}$$

  Division durch z heißt, mit z^{-1} multiplizieren.

- Beispiel:

$$\pi = \lim_{n\to\infty} \prod_{k=1}^{n} \frac{8k^2}{4k^2 - 1}$$

  (Wallissches Produkt)

- $$\pi^{-1} = \lim_{n\to\infty} \prod_{k=1}^{n} \frac{4k^2 - 1}{8k^2}$$

Division

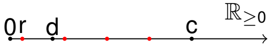
Falls reelle Zahlen als Punkte auf einer Zahlengeraden aufgefasst werden, werden DmR und Division geometrisch angegeben.

- Seien $c, d \in \mathbb{R}_{>0}$ Punkte der Zahlengeraden.

Division

Falls reelle Zahlen als Punkte auf einer Zahlengeraden aufgefasst werden, werden DmR und Division geometrisch angegeben.

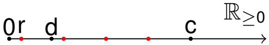
- Seien $c, d \in \mathbb{R}_{>0}$ Punkte der Zahlengeraden.
- Division mit Rest von c durch d:



Division

Falls reelle Zahlen als Punkte auf einer Zahlengeraden aufgefasst werden, werden DmR und Division geometrisch angegeben.

- Seien $c, d \in \mathbb{R}_{>0}$ Punkte der Zahlengeraden.
- Division mit Rest von c durch d:

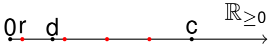


$c = 4 \cdot d + r, \ r < d$

Division

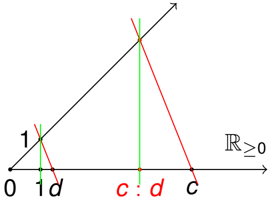
Falls reelle Zahlen als Punkte auf einer Zahlengeraden aufgefasst werden, werden DmR und Division geometrisch angegeben.

- Seien $c, d \in \mathbb{R}_{>0}$ Punkte der Zahlengeraden.
- Division mit Rest von c durch d:



$c = 4 \cdot d + r, \ r < d$

- Division von c durch d:



Division

- Division von komplexen Zahlen:

  Sei $a + bi \neq 0$, insbesondere $a^2 + b^2 \neq 0$.

Division

- Division von komplexen Zahlen:

  Sei $a + bi \neq 0$, insbesondere $a^2 + b^2 \neq 0$.

- $$(a + bi) \cdot (a - bi) = a^2 + b^2 \in \mathbb{R},$$

  also ist

  $$(a + bi)^{-1} = (a^2 + b^2)^{-1} \cdot a - (a^2 + b^2)^{-1} \cdot bi$$

Division

- Division von komplexen Zahlen:

  Sei $a + bi \neq 0$, insbesondere $a^2 + b^2 \neq 0$.

- $$(a + bi) \cdot (a - bi) = a^2 + b^2 \in \mathbb{R},$$

  also ist

  $$(a + bi)^{-1} = (a^2 + b^2)^{-1} \cdot a - (a^2 + b^2)^{-1} \cdot bi$$

- Beispiel:

  $$(2 + 3i) : (4 + i) = (2 + 3i) \cdot (\frac{4}{17} - \frac{1}{17}i) = \frac{11}{17} + \frac{10}{17}i$$

Division

- Welche Frage ist hier sinnvoll?

Division

- Welche Frage ist hier sinnvoll?
  - Wie oft ist $4 + i$ in $2 + 3i$ enthalten?

Division

- Welche Frage ist hier sinnvoll?
  - Wie oft ist $4 + i$ in $2 + 3i$ enthalten?

    oder

Division

- Welcome Frage ist hier sinnvoll?
  - Wie oft ist $4 + i$ in $2 + 3i$ enthalten?

    oder
  - Mit welcher Zahl muss ich $4 + i$ multiplizieren, um $2 + 3i$ zu erhalten?

Division

- Welche Frage ist hier sinnvoll?
  - Wie oft ist $4 + i$ in $2 + 3i$ enthalten?

    oder
  - Mit welcher Zahl muss ich $4 + i$ multiplizieren, um $2 + 3i$ zu erhalten?
- Unterricht in der Sekundarstufe 1 muss vorausschauen und die richtige Fährte legen: Passen meine Formulierungen und Erklärungen auch für das, was später darauf aufbauen soll?

Division

- Division von „algebraischen Zahlen“:

Division

- Division von „algebraischen Zahlen“:
- Sei $a + b\sqrt{2} \neq 0$ und $a, b \in \mathbb{Q}$, dann ist $a^2 - 2 \cdot b^2 \neq 0$.

Division

- Division von „algebraischen Zahlen“:
- Sei $a + b\sqrt{2} \neq 0$ und $a, b \in \mathbb{Q}$, dann ist $a^2 - 2 \cdot b^2 \neq 0$.
- $$(a + b\sqrt{2}) \cdot (a - b\sqrt{2}) = a^2 - 2 \cdot b^2 \in \mathbb{Q},$$

  also ist

  $$(a + b\sqrt{2})^{-1} = (a^2 - 2b^2)^{-1} \cdot a - (a^2 - 2b^2)^{-1} \cdot b\sqrt{2}$$

Division

- Division von „algebraischen Zahlen“:
- Sei $a + b\sqrt{2} \neq 0$ und $a, b \in \mathbb{Q}$, dann ist $a^2 - 2 \cdot b^2 \neq 0$.
- $$(a + b\sqrt{2}) \cdot (a - b\sqrt{2}) = a^2 - 2 \cdot b^2 \in \mathbb{Q},$$

  also ist

  $$(a + b\sqrt{2})^{-1} = (a^2 - 2b^2)^{-1} \cdot a - (a^2 - 2b^2)^{-1} \cdot b\sqrt{2}$$
- $$(2 + 3\sqrt{2}) : (4 + \sqrt{2}) = (2 + 3\sqrt{2}) \cdot (\frac{4}{14} - \frac{1}{14}\sqrt{2}) = \frac{1}{7} + \frac{5}{7}\sqrt{2}$$

Zifferndarstellung

- Zu jeder natürlichen Zahl $z > 0$ gibt es eindeutig bestimmte natürliche Zahlen $n, z_n, \ldots, z_1, z_0$ so, dass

$$z = z_n \cdot 10^n + \ldots + z_1 \cdot 10^1 + z_0$$

und $0 \leq z_n, \ldots, z_1, z_0 < 10$, $z_n \neq 0$.

Zifferndarstellung

- Zu jeder natürlichen Zahl $z > 0$ gibt es eindeutig bestimmte natürliche Zahlen $n, z_n, \ldots, z_1, z_0$ so, dass

$$z = z_n \cdot 10^n + \ldots + z_1 \cdot 10^1 + z_0$$

  und $0 \leq z_n, \ldots, z_1, z_0 < 10$, $z_n \neq 0$.

- Schreibweise:

$$z = z_n z_{n-1} \ldots z_1 z_0$$

  (Dezimal-)Zifferndarstellung von z, z_i *i-te (Dezimal-)Ziffer* von z

Zifferndarstellung

- Zu jeder natürlichen Zahl $z > 0$ gibt es eindeutig bestimmte natürliche Zahlen $n, z_n, \dots, z_1, z_0$ so, dass

  $$z = z_n \cdot 10^n + \dots + z_1 \cdot 10^1 + z_0$$

  und $0 \leq z_n, \dots, z_1, z_0 < 10$, $z_n \neq 0$.

- Schreibweise:

  $$z = z_n z_{n-1} \dots z_1 z_0$$

  (Dezimal-)Zifferndarstellung von z, z_i *i-te (Dezimal-)Ziffer* von z

  Beispiel: $2025 = 2 \cdot 1000 + 0 \cdot 100 + 2 \cdot 10 + 5$

Zifferndarstellung

- Zu jeder natürlichen Zahl $z > 0$ gibt es eindeutig bestimmte natürliche Zahlen $n, z_n, \ldots, z_1, z_0$ so, dass

  $$z = z_n \cdot 10^n + \ldots + z_1 \cdot 10^1 + z_0$$

  und $0 \leq z_n, \ldots, z_1, z_0 < 10$, $z_n \neq 0$.

- Schreibweise:

  $$z = z_n z_{n-1} \ldots z_1 z_0$$

  (Dezimal-)Zifferndarstellung von z, z_i *i-te (Dezimal-)Ziffer* von z

  Beispiel: $2025 = 2 \cdot 1000 + 0 \cdot 100 + 2 \cdot 10 + 5$

- Analog mit 2 statt 10: *Binärziffern*, nur 0 und 1

Zifferndarstellung

- Zu jeder natürlichen Zahl $z > 0$ gibt es eindeutig bestimmte natürliche Zahlen $n, z_n, \ldots, z_1, z_0$ so, dass

  $$z = z_n \cdot 10^n + \ldots + z_1 \cdot 10^1 + z_0$$

  und $0 \leq z_n, \ldots, z_1, z_0 < 10$, $z_n \neq 0$.

- Schreibweise:

  $$z = z_n z_{n-1} \ldots z_1 z_0$$

  (Dezimal-)Zifferndarstellung von z, z_i *i-te (Dezimal-)Ziffer* von z

  Beispiel: $2025 = 2 \cdot 1000 + 0 \cdot 100 + 2 \cdot 10 + 5$

- Analog mit 2 statt 10: *Binärziffern*, nur 0 und 1

  Beispiel: zweitausendfünfundzwanzig =
  $= 2^{10} + 2^9 + 2^8 + 2^7 + 2^6 + 2^5 + 2^3 + 1 = 11111101001$

Zifferndarstellung

- Ermittlung der Zifferndarstellung zur Basis 10 bzw. 2 durch mehrfache Division mit Rest durch 10 bzw. 2

Zifferndarstellung

- Ermittlung der Zifferndarstellung zur Basis 10 bzw. 2 durch mehrfache Division mit Rest durch 10 bzw. 2
- Beispiel: Die Anzahl der Euro-Münzen in einem Sack sei z. Bestimme Dezimalziffern von z!

Zifferndarstellung

- Ermittlung der Zifferndarstellung zur Basis 10 bzw. 2 durch mehrfache Division mit Rest durch 10 bzw. 2
- Beispiel: Die Anzahl der Euro-Münzen in einem Sack sei z. Bestimme Dezimalziffern von z!
  - Bilde so oft wie möglich Gruppen von je 10 Euro-Münzen. Die Anzahl der übrigbleibenden Münzen ist z_0.

Zifferndarstellung

- Ermittlung der Zifferndarstellung zur Basis 10 bzw. 2 durch mehrfache Division mit Rest durch 10 bzw. 2
- Beispiel: Die Anzahl der Euro-Münzen in einem Sack sei z. Bestimme Dezimalziffern von z!
  - Bilde so oft wie möglich Gruppen von je 10 Euro-Münzen. Die Anzahl der übrigbleibenden Münzen ist z_0.
  - Bilde so oft wie möglich Gruppen von je 10 „Zehnergruppen“ . Die Anzahl der übrigbleibenden Zehnergruppen ist z_1.

Zifferndarstellung

- Ermittlung der Zifferndarstellung zur Basis 10 bzw. 2 durch mehrfache Division mit Rest durch 10 bzw. 2
- Beispiel: Die Anzahl der Euro-Münzen in einem Sack sei z. Bestimme Dezimalziffern von z!
  - Bilde so oft wie möglich Gruppen von je 10 Euro-Münzen. Die Anzahl der übrigbleibenden Münzen ist z_0.
  - Bilde so oft wie möglich Gruppen von je 10 „Zehnergruppen“ . Die Anzahl der übrigbleibenden Zehnergruppen ist z_1.
  - usw.

Zifferndarstellung

- Ermittlung der Zifferndarstellung zur Basis 10 bzw. 2 durch mehrfache Division mit Rest durch 10 bzw. 2
- Beispiel: Die Anzahl der Euro-Münzen in einem Sack sei z. Bestimme Dezimalziffern von z!
  - Bilde so oft wie möglich Gruppen von je 10 Euro-Münzen. Die Anzahl der übrigbleibenden Münzen ist z_0.
  - Bilde so oft wie möglich Gruppen von je 10 „Zehnergruppen“ . Die Anzahl der übrigbleibenden Zehnergruppen ist z_1.
  - usw.
- Zur Ermittlung der Binärziffern bilde „Zweiergruppen“.

DmR von Zahlen in Zifferndarstellung

- Algorithmus für die DmR von natürlichen Zahlen in Zifferndarstellung

DmR von Zahlen in Zifferndarstellung

- Algorithmus für die DmR von natürlichen Zahlen in Zifferndarstellung
- Grundidee: Kann man d von c q-mal subtrahieren, dann kann man d von $10 \cdot c$ bzw. $100 \cdot c$ bzw. ... mindestens $10 \cdot q$ - mal bzw. $100 \cdot q$ - mal bzw. ... - mal subtrahieren.

DmR von Zahlen in Zifferndarstellung

- Algorithmus für die DmR von natürlichen Zahlen in Zifferndarstellung
- Grundidee: Kann man d von c q-mal subtrahieren, dann kann man d von $10 \cdot c$ bzw. $100 \cdot c$ bzw. ... mindestens $10 \cdot q$ - mal bzw. $100 \cdot q$ - mal bzw. ... - mal subtrahieren.
- Grundschritt bei der DmR: DmR mit einstelligem Quotienten (nicht mit einstelligem Divisor!).

DmR von Zahlen in Zifferndarstellung

- Algorithmus für die DmR von natürlichen Zahlen in Zifferndarstellung
- Grundidee: Kann man d von c q-mal subtrahieren, dann kann man d von $10 \cdot c$ bzw. $100 \cdot c$ bzw. ... mindestens $10 \cdot q$ - mal bzw. $100 \cdot q$ - mal bzw. ... - mal subtrahieren.
- Grundschritt bei der DmR: DmR mit einstelligem Quotienten (nicht mit einstelligem Divisor!).
- DmR mit einstelligem Quotienten (Grundschritt, muss zuerst eingeübt werden !): höchstens 9 Subtraktionen oder „Raten und Überprüfen“.

DmR von Zahlen in Zifferndarstellung

- Beispiel: DmR von 2025 durch 12.

DmR von Zahlen in Zifferndarstellung

- Beispiel: DmR von 2025 durch 12.

  $2025 = 20 \cdot 100 + 25$

DmR von Zahlen in Zifferndarstellung

- Beispiel: DmR von 2025 durch 12.

  $2025 = 20 \cdot 100 + 25$
  $20 = 1 \cdot 12 + 8$, also $2000 = 100 \cdot 12 + 800$ und
  $2025 = 100 \cdot 12 + 825$

DmR von Zahlen in Zifferndarstellung

- Beispiel: DmR von 2025 durch 12.

  $2025 = 20 \cdot 100 + 25$
  $20 = 1 \cdot 12 + 8$, also $2000 = 100 \cdot 12 + 800$ und
  $2025 = 100 \cdot 12 + 825$

  Weiter mit 825 statt 2025: $825 = 82 \cdot 10 + 5$

DmR von Zahlen in Zifferndarstellung

- Beispiel: DmR von 2025 durch 12.

  $2025 = 20 \cdot 100 + 25$
  $20 = 1 \cdot 12 + 8$, also $2000 = 100 \cdot 12 + 800$ und
  $2025 = 100 \cdot 12 + 825$

  Weiter mit 825 statt 2025: $825 = 82 \cdot 10 + 5$
  $82 = 6 \cdot 12 + 10$, also $820 = 60 \cdot 12 + 100$ und
  $825 = 60 \cdot 12 + 105$

DmR von Zahlen in Zifferndarstellung

- Beispiel: DmR von 2025 durch 12.

  $2025 = 20 \cdot 100 + 25$
  $20 = 1 \cdot 12 + 8$, also $2000 = 100 \cdot 12 + 800$ und
  $2025 = 100 \cdot 12 + 825$

  Weiter mit 825 statt 2025: $825 = 82 \cdot 10 + 5$
  $82 = 6 \cdot 12 + 10$, also $820 = 60 \cdot 12 + 100$ und
  $825 = 60 \cdot 12 + 105$

  Weiter mit 105: $105 = 8 \cdot 12 + 9$

DmR von Zahlen in Zifferndarstellung

- Beispiel: DmR von 2025 durch 12.

  $2025 = 20 \cdot 100 + 25$
  $20 = 1 \cdot 12 + 8$, also $2000 = 100 \cdot 12 + 800$ und
  $2025 = 100 \cdot 12 + 825$

  Weiter mit 825 statt 2025: $825 = 82 \cdot 10 + 5$
  $82 = 6 \cdot 12 + 10$, also $820 = 60 \cdot 12 + 100$ und
  $825 = 60 \cdot 12 + 105$

  Weiter mit 105: $105 = 8 \cdot 12 + 9$

  $2025 = 100 \cdot 12 + 60 \cdot 12 + 8 \cdot 12 + 9 = 168 \cdot 12 + 9$

DmR von Zahlen in Zifferndarstellung

- Beispiel: DmR von 2025 durch 12.

  $2025 = 20 \cdot 100 + 25$
  $20 = 1 \cdot 12 + 8$, also $2000 = 100 \cdot 12 + 800$ und
  $2025 = 100 \cdot 12 + 825$

  Weiter mit 825 statt 2025: $825 = 82 \cdot 10 + 5$
  $82 = 6 \cdot 12 + 10$, also $820 = 60 \cdot 12 + 100$ und
  $825 = 60 \cdot 12 + 105$

  Weiter mit 105: $105 = 8 \cdot 12 + 9$

  $2025 = 100 \cdot 12 + 60 \cdot 12 + 8 \cdot 12 + 9 = 168 \cdot 12 + 9$

- Dank der Zifferndarstellung: nur 15 anstatt 168 Subtraktionen.

DmR von Zahlen in Zifferndarstellung

- Beispiel: DmR von 2025 durch 12.

  $2025 = 20 \cdot 100 + 25$
  $20 = 1 \cdot 12 + 8$, also $2000 = 100 \cdot 12 + 800$ und
  $2025 = 100 \cdot 12 + 825$

  Weiter mit 825 statt 2025: $825 = 82 \cdot 10 + 5$
  $82 = 6 \cdot 12 + 10$, also $820 = 60 \cdot 12 + 100$ und
  $825 = 60 \cdot 12 + 105$

  Weiter mit 105: $105 = 8 \cdot 12 + 9$

  $2025 = 100 \cdot 12 + 60 \cdot 12 + 8 \cdot 12 + 9 = 168 \cdot 12 + 9$

- Dank der Zifferndarstellung: nur 15 anstatt 168 Subtraktionen.

- In der Volksschule „schriftliche Division“ in platzsparender Schreibweise:

DmR von Zahlen in Zifferndarstellung

- Beispiel: DmR von 2025 durch 12.

  $2025 = 20 \cdot 100 + 25$
  $20 = 1 \cdot 12 + 8$, also $2000 = 100 \cdot 12 + 800$ und
  $2025 = 100 \cdot 12 + 825$

  Weiter mit 825 statt 2025: $825 = 82 \cdot 10 + 5$
  $82 = 6 \cdot 12 + 10$, also $820 = 60 \cdot 12 + 100$ und
  $825 = 60 \cdot 12 + 105$

  Weiter mit 105: $105 = 8 \cdot 12 + 9$

  $2025 = 100 \cdot 12 + 60 \cdot 12 + 8 \cdot 12 + 9 = 168 \cdot 12 + 9$

- Dank der Zifferndarstellung: nur 15 anstatt 168 Subtraktionen.

- In der Volksschule „schriftliche Division" in platzsparender Schreibweise:

  $2025 : 12 = 168$

DmR von Zahlen in Zifferndarstellung

- Beispiel: DmR von 2025 durch 12.

  $2025 = 20 \cdot 100 + 25$
  $20 = 1 \cdot 12 + 8$, also $2000 = 100 \cdot 12 + 800$ und
  $2025 = 100 \cdot 12 + 825$

  Weiter mit 825 statt 2025: $825 = 82 \cdot 10 + 5$
  $82 = 6 \cdot 12 + 10$, also $820 = 60 \cdot 12 + 100$ und
  $825 = 60 \cdot 12 + 105$

  Weiter mit 105: $105 = 8 \cdot 12 + 9$

  $2025 = 100 \cdot 12 + 60 \cdot 12 + 8 \cdot 12 + 9 = 168 \cdot 12 + 9$

- Dank der Zifferndarstellung: nur 15 anstatt 168 Subtraktionen.

- In der Volksschule „schriftliche Division" in platzsparender Schreibweise:

  $2025 : 12 = 168$
   82

DmR von Zahlen in Zifferndarstellung

- Beispiel: DmR von 2025 durch 12.

  $2025 = 20 \cdot 100 + 25$
  $20 = 1 \cdot 12 + 8$, also $2000 = 100 \cdot 12 + 800$ und
  $2025 = 100 \cdot 12 + 825$

  Weiter mit 825 statt 2025: $825 = 82 \cdot 10 + 5$
  $82 = 6 \cdot 12 + 10$, also $820 = 60 \cdot 12 + 100$ und
  $825 = 60 \cdot 12 + 105$

  Weiter mit 105: $105 = 8 \cdot 12 + 9$

  $2025 = 100 \cdot 12 + 60 \cdot 12 + 8 \cdot 12 + 9 = 168 \cdot 12 + 9$

- Dank der Zifferndarstellung: nur 15 anstatt 168 Subtraktionen.

- In der Volksschule „schriftliche Division“ in platzsparender Schreibweise:

  $2025 : 12 = 168$
  82
  105

DmR von Zahlen in Zifferndarstellung

- Beispiel: DmR von 2025 durch 12.

  $2025 = 20 \cdot 100 + 25$
  $20 = 1 \cdot 12 + 8$, also $2000 = 100 \cdot 12 + 800$ und
  $2025 = 100 \cdot 12 + 825$

  Weiter mit 825 statt 2025: $825 = 82 \cdot 10 + 5$
  $82 = 6 \cdot 12 + 10$, also $820 = 60 \cdot 12 + 100$ und
  $825 = 60 \cdot 12 + 105$

  Weiter mit 105: $105 = 8 \cdot 12 + 9$

  $2025 = 100 \cdot 12 + 60 \cdot 12 + 8 \cdot 12 + 9 = 168 \cdot 12 + 9$

- Dank der Zifferndarstellung: nur 15 anstatt 168 Subtraktionen.

- In der Volksschule „schriftliche Division" in platzsparender Schreibweise:

  2025 : 12 = 168
   82
   105
      9 Rest

DmR von Zahlen in Zifferndarstellung

- Beispiel zur DmR mit durch Binärziffern dargestellte Zahlen:

DmR von Zahlen in Zifferndarstellung

- Beispiel zur DmR mit durch Binärziffern dargestellte Zahlen:
- Rechnerisch besonders einfach, weil Grundschritt aus höchstens einer Subtraktion besteht.
  Nachteil für Menschen: Zahlen haben (sehr) viele Ziffern.

DmR von Zahlen in Zifferndarstellung

- Beispiel zur DmR mit durch Binärziffern dargestellte Zahlen:
- Rechnerisch besonders einfach, weil Grundschritt aus höchstens einer Subtraktion besteht.
  Nachteil für Menschen: Zahlen haben (sehr) viele Ziffern.

```
11111101001 : 1100 = 101010001
  111
  1111
    110
    1101
       10
       100
       1001 Rest
```

Dezimalzahlen

- Bruchzahlen (rationale Zahlen), deren Nenner eine Zehnerpotenz (bzw. Zweierpotenz) sein kann, heißen *Dezimalzahlen* (bzw. *Binärzahlen*).

Dezimalzahlen

- Bruchzahlen (rationale Zahlen), deren Nenner eine Zehnerpotenz (bzw. Zweierpotenz) sein kann, heißen *Dezimalzahlen* (bzw. *Binärzahlen*).
- Beispiele:

$$\frac{3}{100}, \quad \frac{9987}{1000}, \quad \frac{15}{30} = \frac{5}{10}, \quad \frac{7}{5} = \frac{14}{10}, \quad \frac{3}{8} = \frac{375}{1000}, \quad 79$$

  sind Dezimalzahlen,

$$\frac{1}{3}, \quad \frac{45678}{7000}, \quad \frac{12}{233}$$

  sind keine Dezimalzahlen.

Dezimalzahlen

- Bruchzahlen (rationale Zahlen), deren Nenner eine Zehnerpotenz (bzw. Zweierpotenz) sein kann, heißen *Dezimalzahlen* (bzw. *Binärzahlen*).
- Beispiele:

$$\frac{3}{100}, \quad \frac{9987}{1000}, \quad \frac{15}{30} = \frac{5}{10}, \quad \frac{7}{5} = \frac{14}{10}, \quad \frac{3}{8} = \frac{375}{1000}, \quad 79$$

  sind Dezimalzahlen,

$$\frac{1}{3}, \quad \frac{45678}{7000}, \quad \frac{12}{233}$$

  sind keine Dezimalzahlen.
- Eine maximal gekürzte Bruchzahl ist genau dann eine Dezimalzahl, wenn nur 2 oder 5 Primfaktoren ihres Nenners sind.

Dezimalzahlen

- Platzsparende Schreibweise für Dezimalzahlen (Clavius im 16. Jhd., oder Bianchini im 15. Jhd.):

$$0,03 := \frac{3}{100}, \quad 9,987 := \frac{9987}{1000}, \quad 0,1 := \frac{1}{10}$$

Dezimalzahlen

- Platzsparende Schreibweise für Dezimalzahlen (Clavius im 16. Jhd., oder Bianchini im 15. Jhd.):

$$0,03 := \frac{3}{100}, \quad 9,987 := \frac{9987}{1000}, \quad 0,1 := \frac{1}{10}$$

- Nicht jede Bruchzahl ist eine Dezimalzahl, aber jede Bruchzahl kann beliebig genau durch eine Dezimalzahl angenähert werden.

Dezimalzahlen

- Gegeben: Eine durch Zähler und Nenner dargestellte positive Bruchzahl $\frac{a}{b}$ und eine natürliche Zahl n.
  Berechne einer Dezimalzahl z mit $0 \leq \frac{a}{b} - z < \frac{1}{10^n}$!

Dezimalzahlen

- Gegeben: Eine durch Zähler und Nenner dargestellte positive Bruchzahl $\frac{a}{b}$ und eine natürliche Zahl n.
  Berechne einer Dezimalzahl z mit $0 \leq \frac{a}{b} - z < \frac{1}{10^n}$!
- Division mit Rest von $a \cdot 10^n$ durch b :
  $a \cdot 10^n = q \cdot b + r$, $r < b$.

$$\frac{a}{b} = \frac{a \cdot 10^n}{b \cdot 10^n} = \frac{q \cdot b + r}{b \cdot 10^n} = \frac{q \cdot b}{b \cdot 10^n} + \frac{r}{b \cdot 10^n} = \frac{q}{10^n} + \frac{r}{b \cdot 10^n}$$

Dezimalzahlen

- Gegeben: Eine durch Zähler und Nenner dargestellte positive Bruchzahl $\frac{a}{b}$ und eine natürliche Zahl n.
  Berechne einer Dezimalzahl z mit $0 \leq \frac{a}{b} - z < \frac{1}{10^n}$!
- Division mit Rest von $a \cdot 10^n$ durch b :
  $a \cdot 10^n = q \cdot b + r$, $r < b$.

  $$\frac{a}{b} = \frac{a \cdot 10^n}{b \cdot 10^n} = \frac{q \cdot b + r}{b \cdot 10^n} = \frac{q \cdot b}{b \cdot 10^n} + \frac{r}{b \cdot 10^n} = \frac{q}{10^n} + \frac{r}{b \cdot 10^n}$$

  Die gesuchte Dezimalzahl ist $\frac{q}{10^n}$. Wegen $r < b$ ist $\frac{r}{b \cdot 10^n} < \frac{1}{10^n}$.

Dezimalzahlen

- Gegeben: Eine durch Zähler und Nenner dargestellte positive Bruchzahl $\frac{a}{b}$ und eine natürliche Zahl n.
  Berechne einer Dezimalzahl z mit $0 \leq \frac{a}{b} - z < \frac{1}{10^n}$!
- Division mit Rest von $a \cdot 10^n$ durch b :
  $a \cdot 10^n = q \cdot b + r$, $r < b$.

  $$\frac{a}{b} = \frac{a \cdot 10^n}{b \cdot 10^n} = \frac{q \cdot b + r}{b \cdot 10^n} = \frac{q \cdot b}{b \cdot 10^n} + \frac{r}{b \cdot 10^n} = \frac{q}{10^n} + \frac{r}{b \cdot 10^n}$$

  Die gesuchte Dezimalzahl ist $\frac{q}{10^n}$. Wegen $r < b$ ist $\frac{r}{b \cdot 10^n} < \frac{1}{10^n}$.
- Beispiel: $\frac{a}{b} = \frac{17}{7}$, $n = 3$.
  $17000 = 2428 \cdot 7 + 4$, also

  $$\frac{17}{7} \approx 2,428$$

  und $\frac{17}{7} - 2,428 < \frac{1}{1000}$, genauer Fehler $\frac{4}{7000}$.

Dezimalzahlen

- Summen, Differenzen und Produkte von Dezimalzahlen sind Dezimalzahlen.

Dezimalzahlen

- Summen, Differenzen und Produkte von Dezimalzahlen sind Dezimalzahlen.
- Die zu einer Dezimalzahl inverse Zahl (ihr Kehrwert) ist nur dann wieder eine Dezimalzahl, wenn nach maximalen Kürzen auch der Zähler nur 2 oder 5 als Primfaktoren hat.

Dezimalzahlen

- Summen, Differenzen und Produkte von Dezimalzahlen sind Dezimalzahlen.
- Die zu einer Dezimalzahl inverse Zahl (ihr Kehrwert) ist nur dann wieder eine Dezimalzahl, wenn nach maximalen Kürzen auch der Zähler nur 2 oder 5 als Primfaktoren hat.
- Division von Dezimalzahlen:

Dezimalzahlen

- Summen, Differenzen und Produkte von Dezimalzahlen sind Dezimalzahlen.
- Die zu einer Dezimalzahl inverse Zahl (ihr Kehrwert) ist nur dann wieder eine Dezimalzahl, wenn nach maximalen Kürzen auch der Zähler nur 2 oder 5 als Primfaktoren hat.
- Division von Dezimalzahlen:

  Der Quotient von Dezimalzahlen ($\neq 0$) ist immer eine Bruchzahl (rationale Zahl), aber nicht immer eine Dezimalzahl.
  Er kann aber (mit Hilfe einer DmR) durch eine Dezimalzahl beliebig genau angenähert werden.

Dezimalzahlen

- Beispiel:

$$0,023 : 45,67 = \frac{23}{1000} : \frac{4567}{100} = \frac{23}{1000} \cdot \frac{100}{4567} = \frac{23}{45670}$$

Dezimalzahlen

- Beispiel:

$$0,023 : 45,67 = \frac{23}{1000} : \frac{4567}{100} = \frac{23}{1000} \cdot \frac{100}{4567} = \frac{23}{45670}$$

Exaktes Ergebnis der Division (rationale Zahl, aber nicht Dezimalzahl).

Dezimalzahlen

- Beispiel:

$$0,023 : 45,67 = \frac{23}{1000} : \frac{4567}{100} = \frac{23}{1000} \cdot \frac{100}{4567} = \frac{23}{45670}$$

  Exaktes Ergebnis der Division (rationale Zahl, aber nicht Dezimalzahl).

- Näherung durch eine Dezimalzahl mit Hilfe einer DmR, $n = 6$: $23000000 = 503 \cdot 45670 + 27990$, also

$$\frac{23}{45670} \approx \frac{503}{1000000} = 0,000503\,,$$

  Fehler kleiner als $0,000001$.

Erweiterungen von DmR und Division

- DmR in $\mathbb{N}$ bzw. $\mathbb{R}_{\geq 0}$ kann auf $\mathbb{Z}$ bzw. $\mathbb{R}$ erweitert werden.

Erweiterungen von DmR und Division

- DmR in $\mathbb{N}$ bzw. $\mathbb{R}_{\geq 0}$ kann auf $\mathbb{Z}$ bzw. $\mathbb{R}$ erweitert werden.
  Nicht einheitlich.

  Beispiel: $-17 = (-4) \cdot 4 - 1$ (Betrag des Restes möglichst klein)
  oder $-17 = (-5) \cdot 4 + 3$ (Rest positiv)

Erweiterungen von DmR und Division

- DmR in $\mathbb{N}$ bzw. $\mathbb{R}_{\geq 0}$ kann auf $\mathbb{Z}$ bzw. $\mathbb{R}$ erweitert werden.
  Nicht einheitlich.

  Beispiel: $-17 = (-4) \cdot 4 - 1$ (Betrag des Restes möglichst klein)
  oder $-17 = (-5) \cdot 4 + 3$ (Rest positiv)

- DmR für Polynome: mehrfache Subtraktion von geeigneten Vielfachen des Divisors.

Erweiterungen von DmR und Division

- DmR in $\mathbb{N}$ bzw. $\mathbb{R}_{\geq 0}$ kann auf $\mathbb{Z}$ bzw. $\mathbb{R}$ erweitert werden.
  Nicht einheitlich.

  Beispiel: $-17 = (-4) \cdot 4 - 1$ (Betrag des Restes möglichst klein)
  oder $-17 = (-5) \cdot 4 + 3$ (Rest positiv)

- DmR für Polynome: mehrfache Subtraktion von geeigneten Vielfachen des Divisors.

  c, d Polynome, $d \neq 0$: es gibt Polynome q, r mit
  $c = q \cdot d + r$ und $[r = 0$ oder $grad(r) < grad(d)]$

Erweiterungen von DmR und Division

- Beispiel: $c = 3x^3 + x - 1, \quad d = x - 2$

Erweiterungen von DmR und Division

- Beispiel: $c = 3x^3 + x - 1, \quad d = x - 2$

$$c - 3x^2 \cdot d = 6x^2 + x - 1$$

Erweiterungen von DmR und Division

- Beispiel: $c = 3x^3 + x - 1, \quad d = x - 2$

$$c - 3x^2 \cdot d = 6x^2 + x - 1$$

$$(6x^2 + x - 1) - 6x \cdot d = 13x - 1$$

Erweiterungen von DmR und Division

- Beispiel: $c = 3x^3 + x - 1, \quad d = x - 2$

$$c - 3x^2 \cdot d = 6x^2 + x - 1$$

$$(6x^2 + x - 1) - 6x \cdot d = 13x - 1$$

$$(13x - 1) - 13 \cdot d = 25$$

Erweiterungen von DmR und Division

- Beispiel: $c = 3x^3 + x - 1, \quad d = x - 2$

$$c - 3x^2 \cdot d = 6x^2 + x - 1$$

$$(6x^2 + x - 1) - 6x \cdot d = 13x - 1$$

$$(13x - 1) - 13 \cdot d = 25$$

$$0 = grad(25) < grad(d) = 1$$

Erweiterungen von DmR und Division

- Beispiel: $c = 3x^3 + x - 1, \quad d = x - 2$

$$c - 3x^2 \cdot d = 6x^2 + x - 1$$

$$(6x^2 + x - 1) - 6x \cdot d = 13x - 1$$

$$(13x - 1) - 13 \cdot d = 25$$

$$0 = grad(25) < grad(d) = 1$$

Also:

$$c = (3x^2 + 6x + 13) \cdot d + 25$$

Erweiterungen von DmR und Division

- Division für rationale Funktionen: Multiplikation mit dem Kehrwert

Erweiterungen von DmR und Division

- Division für rationale Funktionen: Multiplikation mit dem Kehrwert
- Beispiel:

$$\frac{x+1}{x^2+x-1} : \frac{x^3+x}{3x-2} = \frac{(x+1)\cdot(3x-2)}{(x^2+x-1)\cdot(x^3+x)}$$

Erweiterungen von DmR und Division

- Division für rationale Funktionen: Multiplikation mit dem Kehrwert
- Beispiel:

$$\frac{x+1}{x^2+x-1} : \frac{x^3+x}{3x-2} = \frac{(x+1)\cdot(3x-2)}{(x^2+x-1)\cdot(x^3+x)}$$

- Division für reellwertige Funktionen

Erweiterungen von DmR und Division

- Division für rationale Funktionen: Multiplikation mit dem Kehrwert
- Beispiel:

$$\frac{x+1}{x^2+x-1} : \frac{x^3+x}{3x-2} = \frac{(x+1)\cdot(3x-2)}{(x^2+x-1)\cdot(x^3+x)}$$

- Division für reellwertige Funktionen

  Eine Funktion $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ hat eine inverse Funktion, wenn sie keine Nullstellen hat.

Erweiterungen von DmR und Division

- Division für rationale Funktionen: Multiplikation mit dem Kehrwert
- Beispiel:

$$\frac{x+1}{x^2+x-1} : \frac{x^3+x}{3x-2} = \frac{(x+1)\cdot(3x-2)}{(x^2+x-1)\cdot(x^3+x)}$$

- Division für reellwertige Funktionen

  Eine Funktion $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ hat eine inverse Funktion, wenn sie keine Nullstellen hat.

  Zu f inverse Funktion $1/f$ ordnet jeder Zahl x die zu $f(x)$ inverse Zahl $f(x)^{-1} = 1/f(x)$ zu.

Erweiterungen von DmR und Division

- Division für rationale Funktionen: Multiplikation mit dem Kehrwert
- Beispiel:

$$\frac{x+1}{x^2+x-1} : \frac{x^3+x}{3x-2} = \frac{(x+1)\cdot(3x-2)}{(x^2+x-1)\cdot(x^3+x)}$$

- Division für reellwertige Funktionen

  Eine Funktion $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ hat eine inverse Funktion, wenn sie keine Nullstellen hat.

  Zu f inverse Funktion $1/f$ ordnet jeder Zahl x die zu $f(x)$ inverse Zahl $f(x)^{-1} = 1/f(x)$ zu.

- Beispiel: Exponentialfunktionen

Erweiterungen von DmR und Division

- Division für rationale Funktionen: Multiplikation mit dem Kehrwert
- Beispiel:

$$\frac{x+1}{x^2+x-1} : \frac{x^3+x}{3x-2} = \frac{(x+1)\cdot(3x-2)}{(x^2+x-1)\cdot(x^3+x)}$$

- Division für reellwertige Funktionen

  Eine Funktion $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ hat eine inverse Funktion, wenn sie keine Nullstellen hat.

  Zu f inverse Funktion $1/f$ ordnet jeder Zahl x die zu $f(x)$ inverse Zahl $f(x)^{-1} = 1/f(x)$ zu.

- Beispiel: Exponentialfunktionen

  $a \in \mathbb{R}_{>0}$, $exp_a : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ mit $exp_a(x) := a^x$

Erweiterungen von DmR und Division

- Division für rationale Funktionen: Multiplikation mit dem Kehrwert
- Beispiel:

$$\frac{x+1}{x^2+x-1} : \frac{x^3+x}{3x-2} = \frac{(x+1)\cdot(3x-2)}{(x^2+x-1)\cdot(x^3+x)}$$

- Division für reellwertige Funktionen

  Eine Funktion $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ hat eine inverse Funktion, wenn sie keine Nullstellen hat.

  Zu f inverse Funktion $1/f$ ordnet jeder Zahl x die zu $f(x)$ inverse Zahl $f(x)^{-1} = 1/f(x)$ zu.

- Beispiel: Exponentialfunktionen

  $a \in \mathbb{R}_{>0}$, $exp_a : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ mit $exp_a(x) := a^x$

  dazu inverse Funktion (nicht Umkehrfunktion!) $1/exp_a = exp_{a^{-1}}$ mit $exp_{a^{-1}}(x) = a^{-x}$.

Erweiterungen von DmR und Division

- Division für rationale Funktionen: Multiplikation mit dem Kehrwert
- Beispiel:

$$\frac{x+1}{x^2+x-1} : \frac{x^3+x}{3x-2} = \frac{(x+1)\cdot(3x-2)}{(x^2+x-1)\cdot(x^3+x)}$$

- Division für reellwertige Funktionen

  Eine Funktion $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ hat eine inverse Funktion, wenn sie keine Nullstellen hat.

  Zu f inverse Funktion $1/f$ ordnet jeder Zahl x die zu $f(x)$ inverse Zahl $f(x)^{-1} = 1/f(x)$ zu.

- Beispiel: Exponentialfunktionen

  $a \in \mathbb{R}_{>0}$, $exp_a : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ mit $exp_a(x) := a^x$

  dazu inverse Funktion (nicht Umkehrfunktion!) $1/exp_a = exp_{a^{-1}}$ mit $exp_{a^{-1}}(x) = a^{-x}$.

  Division durch exp_a ist Multiplikation mit $exp_{a^{-1}}$.

Résumé

- In $\mathbb{N}$: nur DmR (nur 1 hat inverse Zahl)

Résumé

- In $\mathbb{N}$: nur DmR (nur 1 hat inverse Zahl)
  - DmR ist mehrfache Subtraktion, berechnet *zwei* natürliche Zahlen.

Résumé

- In $\mathbb{N}$: nur DmR (nur 1 hat inverse Zahl)
  - DmR ist mehrfache Subtraktion, berechnet *zwei* natürliche Zahlen.
  - Lösung von $c \cdot x = d$ nur in Sonderfällen (Rest 0) möglich.

Résumé

- In $\mathbb{N}$: nur DmR (nur 1 hat inverse Zahl)
  - DmR ist mehrfache Subtraktion, berechnet *zwei* natürliche Zahlen.
  - Lösung von $c \cdot x = d$ nur in Sonderfällen (Rest 0) möglich.
  - Divisionsalgorithmus für Zahlen in Zifferndarstellung, Grundschritt ist DmR mit einstelligem Quotienten

Résumé

- In $\mathbb{N}$: nur DmR (nur 1 hat inverse Zahl)
  - DmR ist mehrfache Subtraktion, berechnet *zwei* natürliche Zahlen.
  - Lösung von $c \cdot x = d$ nur in Sonderfällen (Rest 0) möglich.
  - Divisionsalgorithmus für Zahlen in Zifferndarstellung, Grundschritt ist DmR mit einstelligem Quotienten
- In $\mathbb{C}$: nur Division (keine Ordnungsrelation)

Résumé

- In $\mathbb{N}$: nur DmR (nur 1 hat inverse Zahl)
  - DmR ist mehrfache Subtraktion, berechnet *zwei* natürliche Zahlen.
  - Lösung von $c \cdot x = d$ nur in Sonderfällen (Rest 0) möglich.
  - Divisionsalgorithmus für Zahlen in Zifferndarstellung, Grundschritt ist DmR mit einstelligem Quotienten
- In $\mathbb{C}$: nur Division (keine Ordnungsrelation)
  - Division ist Multiplikation mit der inversen Zahl des Divisors, berechnet *eine* Zahl, die Lösung von $c \cdot x = d$.

Résumé

- In $\mathbb{N}$: nur DmR (nur 1 hat inverse Zahl)
  - DmR ist mehrfache Subtraktion, berechnet *zwei* natürliche Zahlen.
  - Lösung von $c \cdot x = d$ nur in Sonderfällen (Rest 0) möglich.
  - Divisionsalgorithmus für Zahlen in Zifferndarstellung, Grundschritt ist DmR mit einstelligem Quotienten
- In $\mathbb{C}$: nur Division (keine Ordnungsrelation)
  - Division ist Multiplikation mit der inversen Zahl des Divisors, berechnet *eine* Zahl, die Lösung von $c \cdot x = d$.
  - alle Zahlen $\neq 0$ haben inverse Zahl, kann leicht ermittelt werden.

Résumé

- In $\mathbb{Q}$: DmR und Division

Résumé

- In $\mathbb{Q}$: DmR und Division
  - DmR (in $\mathbb{Q}_{\geq 0}$) berechnet durch mehrfache Subtraktion eine natürliche Zahl (ganzzahliger Quotient) und eine rationale Zahl (Rest).

Résumé

- In $\mathbb{Q}$: DmR und Division
  - DmR (in $\mathbb{Q}_{\geq 0}$) berechnet durch mehrfache Subtraktion eine natürliche Zahl (ganzzahliger Quotient) und eine rationale Zahl (Rest).
  - Division ist Multiplikation mit dem Kehrwert des Divisors ($\neq 0$), berechnet die Lösung von $c \cdot x = d$ (*eine* rationale Zahl).

Résumé

- In $\mathbb{Q}$: DmR und Division
  - DmR (in $\mathbb{Q}_{\geq 0}$) berechnet durch mehrfache Subtraktion eine natürliche Zahl (ganzzahliger Quotient) und eine rationale Zahl (Rest).
  - Division ist Multiplikation mit dem Kehrwert des Divisors ($\neq 0$), berechnet die Lösung von $c \cdot x = d$ (*eine* rationale Zahl).
  - Quotient von Dezimalzahlen ist rationale Zahl, aber im allg. nicht Dezimalzahl.
    Durch Zähler und Nenner dargestellte Zahl kann durch DmR (von natürlichen Zahlen) durch Dezimalzahl angenähert werden.

Résumé

- In $\mathbb{Q}$: DmR und Division
  - DmR (in $\mathbb{Q}_{\geq 0}$) berechnet durch mehrfache Subtraktion eine natürliche Zahl (ganzzahliger Quotient) und eine rationale Zahl (Rest).
  - Division ist Multiplikation mit dem Kehrwert des Divisors ($\neq 0$), berechnet die Lösung von $c \cdot x = d$ (*eine* rationale Zahl).
  - Quotient von Dezimalzahlen ist rationale Zahl, aber im allg. nicht Dezimalzahl.
    Durch Zähler und Nenner dargestellte Zahl kann durch DmR (von natürlichen Zahlen) durch Dezimalzahl angenähert werden.
  - Beispiel:

Résumé

- In $\mathbb{Q}$: DmR und Division
  - DmR (in $\mathbb{Q}_{\geq 0}$) berechnet durch mehrfache Subtraktion eine natürliche Zahl (ganzzahliger Quotient) und eine rationale Zahl (Rest).
  - Division ist Multiplikation mit dem Kehrwert des Divisors ($\neq 0$), berechnet die Lösung von $c \cdot x = d$ (*eine* rationale Zahl).
  - Quotient von Dezimalzahlen ist rationale Zahl, aber im allg. nicht Dezimalzahl.
    Durch Zähler und Nenner dargestellte Zahl kann durch DmR (von natürlichen Zahlen) durch Dezimalzahl angenähert werden.
  - Beispiel:
    DmR $0,5 : 3 = 0$ Rest $0,5$,

Résumé

- In $\mathbb{Q}$: DmR und Division
  - DmR (in $\mathbb{Q}_{\geq 0}$) berechnet durch mehrfache Subtraktion eine natürliche Zahl (ganzzahliger Quotient) und eine rationale Zahl (Rest).
  - Division ist Multiplikation mit dem Kehrwert des Divisors ($\neq 0$), berechnet die Lösung von $c \cdot x = d$ (*eine* rationale Zahl).
  - Quotient von Dezimalzahlen ist rationale Zahl, aber im allg. nicht Dezimalzahl.
    Durch Zähler und Nenner dargestellte Zahl kann durch DmR (von natürlichen Zahlen) durch Dezimalzahl angenähert werden.
  - Beispiel:
    DmR $0,5 : 3 = 0$ Rest $0,5$,
    Division $0,5 : 3 = \frac{1}{6} \approx 0,166$

Literatur

Van Brummelen, G.: Decimal fractional numeration and the decimal point in 15th-century Italy. Historia Mathematica 66 (2024), 1-13

Forster, O.: Analysis 1. vieweg Verlag, 4. Auflage (1983)

Pauer, F.: Algorithmen und algorithmisches Denken im Mathematikunterricht. Schriftenreihe zur Didaktik der Mathematik der ÖMG Nr. 55 (2023), 101-116

Pauer, F.: Komplexe Zahlen. Schriftenreihe zur Didaktik der Mathematik der ÖMG Nr. 54 (2022), 53-70

Pauer, F., Stampfer, F.: Rationale Zahlen und rationale Funktionen: Was ist ihnen gemeinsam? Wie werden sie dargestellt? Schriftenreihe zur Didaktik der Mathematik der ÖMG Nr. 51 (2018), 45-55

Pauer, F.: „Wurzel aus 2" und „Wurzel aus -1" - Was ist das und wie rechnet man damit? Schriftenreihe zur Didaktik der Mathematik der ÖMG Nr. 41 (2009), 71-84

Pauer, F.: Division mit Rest - der heimliche Hauptsatz der Algebra. Schriftenreihe zur Didaktik der Mathematik der ÖMG Nr. 37 (2005), 100-111

Pauer, F.: Algebra und Geometrie im Schulunterricht. 3. Auflage. Skriptum. Universität Innsbruck 2019

Danke für die Aufmerksamkeit!

http://www.uibk.ac.at/mathematik/personal/pauer/

franz.pauer@uibk.ac.at