Algorithmen und Algorithmisches Denken im Mathematikunterricht

Franz Pauer

Institut für Fachdidaktik

Universität Innsbruck

14. April 2023

Angst vor Algorithmen?

Lange Nacht der Forschung Oktober 2020, Institut für Höhere Studien und Universität Wien

Vortrag „Angst vor Algorithmen?“

Verhaltensökonomische Aspekte der Digitalisierung

von Martin Kocher, damals wissenschaftlicher Direktor des IHS, seit 2021 Minister für Arbeit und Wirtschaft

Inhalt

- Was sind Algorithmen? Was bedeutet algorithmisches Denken?
- Der älteste Algorithmus (Euklidischer Algorithmus)
- Ein Algorithmus mit Wahlmöglichkeiten (Gauß-Elimination)
- Die ersten Algorithmen in der Schule (Rechnen mit natürlichen Zahlen in Zifferndarstellung)
- Ein Algorithmus in der Sekundarstufe 2 (Bisektionsverfahren)
- Schlussbemerkungen

Was sind Algorithmen?
Was bedeutet algorithmisches Denken?

- Algorithmen sind Verfahren, mit denen eine Klasse von Problemen gelöst werden kann.
- Algorithmen müssen endlich und korrekt sein, dh.:

  aus den Eingabedaten erhält man in endlich vielen Schritten Ausgabedaten und
  diese sind eine Lösung des betrachteten Problem.
- Zur Lösung einer Klasse von Problemen kann es mehrere Algorithmen - mit verschiedener Effizienz - geben
  Es liegt nahe, den mit geringstem Aufwand zu wählen.
- Algorithmisches Denken: Algorithmen verstehen, erklären, beurteilen, modifizieren, entwickeln

„Algorithmen“ im Lehrplan der AHS

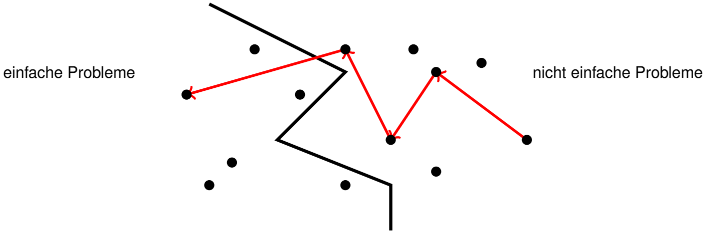
- Unterrichtsfach Digitale Grundbildung: *Algorithmen nachvollziehen und entwerfen*
- Unterrichtsfach Informatik: *Algorithmen erklären, entwerfen, implementieren, testen*
- Unterrichtsfach Darstellende Geometrie: *algorithmische Denkfähigkeit entwickeln und vertiefen*
- Unterrichtsfach Mathematik: A. kommen nur bei der Erklärung des Begriffs „formal-operatives Arbeiten“ vor, dort: *Aktivitäten, die auf Algorithmen beruhen*
- Im Mathematikunterricht lernt man viele Algorithmen kennen, manche bereits in der Volksschule.
- Nicht nur „einüben“ (oder gar „drillen“), sondern auch verständlich erklären (zugrunde liegende Strategien und Ideen erklären, Korrektheit begründen) !

Eine Strategie für Algorithmen

- Grobeinteilung mathematischer Probleme:

1. Einfache Probleme, dh. Probleme, die man durch „Hinschauen“ lösen kann
2. Nicht einfache Probleme

- Eine wichtige Strategie, ein Problem zu lösen: Gehe zu einem anderen Problem über, das dieselbe Lösung hat. Wiederhole das zielgerichtet solange, bis ein einfaches Problem erreicht wird.



Beispiele für einfache Probleme

1. Berechne ggT(123456, 123456)!
   Lösung: 123456

2. Bestimme die Lösungsmenge von $3x + 4y = 7$!
   Lösung: $\{(1, 1) + t \cdot (4, -3) \mid t \in \mathbb{R}\}$

3. Bestimme die Lösungsmenge von
   $1 \cdot x + 0 \cdot y = 3$
   $0 \cdot x + 1 \cdot y = -8$!
   Lösung: $\{(3, -8)\}$

Der Euklidische Algorithmus

Ältester Algorithmus, Elemente des Euklid 300 v. Chr., schon früher bekannt.

- Gegeben: zwei positive ganze Zahlen a und b. Bestimme die größte ganze Zahl, die beide teilt („ggT(a, b)“).
- Was macht man mit dem ggT zweier Zahlen?

  Kürzen von Bruchzahlen durch ggT(Zähler, Nenner) nach jeder Rechenoperation, um Zähler und Nenner möglichst klein zu halten.
- Strategie wie oben
- Einfach zu bestimmen: ggT(a, a)

Der Euklidische Algorithmus

- Idee:

$$\mathrm{ggT}(a, b) = \mathrm{ggT}(a - b, b)$$

  Denn: $tu \pm tv = t(u \pm v)$,
  also ist jeder Teiler von a und b auch ein Teiler
  von $a + b$ und $a - b$.

- Beispiel:
  $\mathrm{ggT}(713, 589) = \mathrm{ggT}(713 - 589, 589) = \mathrm{ggT}(124, 589)$

Der Euklidische Algorithmus

- Algorithmus:
  Ersetze solange die größere Zahl durch die Differenz der größeren und der kleineren, bis die zwei Zahlen gleich sind.

  Also: gehe von (a, b) zu

  $$(\max(a, b) - \min(a, b), \min(a, b))$$

  über, bis die zwei Zahlen gleich sind.

- Bei jedem Schritt wird die größere der zwei Zahlen kleiner, also sind die zwei Zahlen nach endlich vielen Wiederholungen gleich.

- Programmcode:
  while $a \neq b$ do:
  $c := \max(a, b),\ d := \min(a, b),\ a := c - d,\ b := d;$

Der Euklidische Algorithmus

- Beispiel:

$$\mathrm{ggT}(713, 589) = \mathrm{ggT}(589, 124) = \mathrm{ggT}(465, 124) =$$

$$= \mathrm{ggT}(341, 124) = \mathrm{ggT}(217, 124) = \mathrm{ggT}(124, 93) =$$

$$= \mathrm{ggT}(93, 31) = \mathrm{ggT}(62, 31) = \mathrm{ggT}(31, 31) = 31$$

Der Euklidische Algorithmus

- Humenberger (Hrsg.): Das ist Mathematik 2, öbv, 2017.

  Salzger et al.: Mathematik verstehen 2, öbv, 2022.

  Meines Wissens die einzigen österr. Lehrbücher der Sekundarstufe 1, in denen ggT(a, b) mit euklidischem Algorithmus berechnet wird.

  Bravo!

- Motivation fehlt, da ggT vor der Einführung von Bruchzahlen besprochen wird.

- Sehr schlechter Algorithmus zur Berechnung des ggT: ggT als Produkt der gemeinsamen Primfaktoren

  (cf. RSA-Verfahren zur Verschlüsselung von PIN-Codes!)
- Primzahlen kommen im Lehrplan der Sekundarstufe 1 nicht vor.

Der Euklidische Algorithmus

- Was in Salzger et al. nicht stimmt:
  Der größte gemeinsame Teiler und das kleinste gemeinsame Vielfache von zwei Zahlen lassen sich auch mit Hilfe der Primfaktorenzerlegung ermitteln. Dieses Verfahren ist vor allem dann vorteilhaft, wenn der ggT bzw. das kgV von mehr als zwei Zahlen gesucht ist.

- Aber: $\mathrm{ggT}(a, b, c) = \mathrm{ggT}(a, \mathrm{ggT}(b, c))$

Gauß- Elimination

Hier: nur Systeme von 2 linearen Gleichungen mit 2 Unbekannten.

- Gegeben sind Zahlen a, b, c, d, e, f mit $(a, b, d, e) \neq (0, 0, 0, 0)$.
  Gesucht: alle Zahlenpaare (x, y) mit

$$ax + by = c$$

$$dx + ey = f$$

- Strategie wie oben: Ersetze das System durch ein einfacheres mit derselben Lösungsmenge!

  Wiederhole das solange, bis Lösungsmenge ohne weitere Rechnung angeschrieben werden kann.

Gauss-Elimination

- Was sind die einfachen Probleme?

$$\begin{array}{rcl} x & & = c \\ & y & = f \end{array}$$

Lösungsmenge: $\{(c, f)\}$

$$\begin{array}{rcrcl} ax & + & by & = & c \\ & & 0 & = & 0 \end{array}$$

Lösungsmenge $\{(\frac{a \cdot c}{a^2+b^2}, \frac{b \cdot c}{a^2+b^2}) + t \cdot (-b, a) \mid t \in \mathbb{R}\}$

$$\begin{array}{rcrcl} ax & + & by & = & c \\ & & 0 & = & 1 \end{array}$$

Lösungsmenge leer

Gauß- Elimination

- Idee: mit „elementaren Umformungen" wird ein System linearer Gleichungen in ein anderes mit gleicher Lösungsmenge übergeführt:

  Multipliziere auf beiden Seiten einer Gleichung mit einer Zahl $\neq 0$.

  Vertausche die zwei Gleichungen

  Ersetze eine Gleichung durch die Summe der zwei Gleichungen.

- Wähle Umformungen so, dass man damit den einfachen Problemen immer näher kommt.

- Algorithmus erstmals in China (ca. 150 v.Chr.) publiziert, in Europa von Rolle und Newton (ca. 1690 n. Chr.).

Gauß- Elimination

Beispiel:

$$2x + 3y = 4$$
$$-x + 5y = 2$$

Mehrere Möglichkeiten, etwa:

- Multipliziere die 2. Gleichung mit 2

$$\begin{array}{rcrcr} 2x & + & 3y & = & 4 \\ -2x & + & 10y & = & 4 \end{array}$$

- Ersetze die erste Gleichung durch die Summe der ersten und der zweiten Gleichung

$$\begin{array}{rcrcr} & & 13y & = & 8 \\ -2x & + & 10y & = & 4 \end{array}$$

Gauß- Elimination

- Multipliziere die 1. Gleichung mit $\frac{1}{13}$ und die 2. Gleichung mit $-\frac{1}{10}$

$$\begin{aligned} y &= \frac{8}{13} \\ \frac{1}{5}x - y &= -\frac{2}{5} \end{aligned}$$

- Ersetze die 2. Gleichung durch die Summe der ersten und der zweiten

$$\begin{aligned} y &= \frac{8}{13} \\ \frac{1}{5}x &= \frac{14}{65} \end{aligned}$$

- Multipliziere die 2. Gleichung mit 5 und vertausche die zwei Gleichungen

$$\begin{aligned} x &= \frac{14}{13} \\ y &= \frac{8}{13} \end{aligned}$$

- Lösungsmenge: $\{(\frac{14}{13}, \frac{8}{13})\}$

Gauß- Elimination

Beispiel:

$$2x + 3y = 4$$

$$-4x - 6y = -8$$

Mehrere Möglichkeiten, etwa:

- Multipliziere die erste Gleichung mit 2

$$4x + 6y = 8$$

$$-4x - 6y = -8$$

- Ersetze die zweite Gleichung durch die Summe der 1. und der 2. Gleichung

$$\begin{array}{ccccc} 4x & + & 6y & = & 8 \\ & & 0 & = & 0 \end{array}$$

- Lösungsmenge $\{(2,0) + t \cdot (-6,4) \mid t \in \mathbb{R}\}$

Gauß- Elimination

- Einzelschritte sind nicht vorgegeben, können je nach Situation und Vorliebe von Schüler*innen gewählt werden. Fördert selbständiges Denken.
- Für Computerprogramm Vorgabe der Einzelschritte nötig.
- Im Unterricht nicht sinnvoll: Auswahl einiger bestimmten Abfolgen der Einzelschritte und unterschiedliche Benennung des Verfahrens („Einsetzungsverfahren“, „Eliminationsverfahren“, . . .).

Algorithmen zum Rechnen mit natürlichen Zahlen in Zifferndarstellung

- Was ist mit „Berechne: $378 + 253,\ 987 - 234$ und $345 \cdot 67$“ gemeint?

  Diese Zahlen sind eindeutig bestimmt (und als Summe, Differenz, Produkt von zwei anderen dargestellt).

  Gemeint ist: Berechne die Zifferndarstellung (zur Basis 10) von $378 + 253,\ 987 - 234$ und $345 \cdot 67$.

Algorithmen zum Rechnen mit natürlichen Zahlen in Zifferndarstellung

- Zifferndarstellung zur Basis $b > 1$:

  Zu jeder Zahl $a > 0$ gibt es eindeutig bestimmte natürliche Zahlen $n, z_n, z_{n-1}, \ldots, z_1, z_0$ so, dass $n > 0$, $0 \leq z_n, z_{n-1}, \ldots, z_1, z_0 < b$, $z_n \neq 0$ und

  $$a = z_n b^n + z_{n-1} b^{n-1} + \ldots + z_0$$

  Wenn b fest gewählt: Kurzsschreibweise

  $$a = z_n z_{n-1} \ldots z_1 z_0$$

- Zifferndarstellung einer Zahl ist „Zusatzinformation" über diese, nützlich zum schnellen Rechnen mit natürlichen Zahlen

Algorithmen zum Rechnen mit natürlichen Zahlen in Zifferndarstellung

- 825 n. Chr. Muhammad al-Chwarizmi: „Über das Rechnen mit indischen Ziffern“

  Algorithmen zum Addieren, Subtrahieren, Multiplizieren und mit Rest Dividieren von Zahlen in Zifferndarstellung

- 16. Jhd. Adam Ries: erstes Rechenbuch auf Deutsch

- Alle Rechenverfahren für jede Basis $b > 1$ gültig.

- Man kann aber auch ohne Zifferndarstellung mit Zahlen rechnen, cf. Archimedes!

Algorithmen zum Rechnen mit natürlichen Zahlen in Zifferndarstellung

- Gegeben: zwei natürliche Zahlen in Zifferndarstellung.
- Gesucht: Zifferndarstellung von Summe, Differenz (falls diese nicht negativ ist), Produkt und des ganzzahligen Quotienten und des Restes (nach Division mit Rest durch eine positive Zahl)

- Strategie:
  Verwende Zifferndarstellung und die Regeln für das Rechnen mit natürlichen Zahlen.

  Führe einfache „Grundschritte“ mehrfach aus, um Aufgabe schrittweise zu lösen.

- Im Unterricht: zuerst Grundschritte einüben, dann erklären, wie und warum man durch deren mehrfaches Ausführen jede Aufgabe lösen kann.

Additionsalgorithmus

- Gegeben: zwei natürliche Zahlen in Zifferndarstellung
  Gesucht: Zifferndarstellung ihrer Summe
- Grundschritt: „kleines Eins plus Eins“
  Summe von einstelligen Zahlen ist höchstens zweistellig
  Übertrag: = 1, wenn Summe zweistellig, sonst 0.
- Algorithmus funktioniert für alle Basen, nicht nur für Basis 10
- Wende Rechenregeln (Summanden vertauschen, Klammern umsetzen, Herausheben) an!

Additionsalgorithmus

- Beispiel (Basis 10):

  $378 + 253 = (3 \cdot 100 + 7 \cdot 10 + 8) + (2 \cdot 100 + 5 \cdot 10 + 3) =$

  $= (3 + 2) \cdot 100 + (7 + 5) \cdot 10 + (8 + 3) =$
  $5 \cdot 100 + (10 + 2) \cdot 10 + 10 + 1 =$

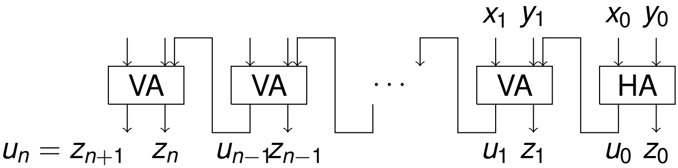
  $= 6 \cdot 100 + 3 \cdot 10 + 1 = 631$

Additionsalgorithmus

Gegeben: x mit Ziffern $x_n, x_{n-1}, \ldots, x_1, x_0$ und
y mit Ziffern $y_n, y_{n-1}, \ldots, y_1, y_0$
Berechne Ziffern $z_{n+1}, z_n, z_{n-1}, \ldots, z_1, z_0$ von $x + y$!

Grundschritt: $x_i + y_i + u_{i-1} = u_i \cdot b + z_i$, u_i „Übertrag“, $i > 0$

Addierwerk



VA. . . Volladdierer
HA. . . Halbaddierer

Multiplikationsalgorithmus

- Gegeben: zwei natürliche Zahlen x und y in Zifferndarstellung

  Gesucht: Zifferndarstellung ihres Produktes
- Multiplikation mit natürlichen Zahlen ist mehrfache Addition.
  Erster Algorithmus zum Multiplizieren: mehrfach Addieren.
- Effizienter Algorithmus: benutzt Zifferndarstellung und Rechenregeln.
- Grundschritt: „kleines Einmaleins" mit erstem Algorithmus (zum schnelleren Rechnen: auswendig lernen)

  Produkt von einstelligen Zahlen ist höchstens zweistellig
  Übertrag: = Zehnerziffer dieses Produktes.
- Weiterer Grundschritt: Multiplikation mit Zehnerpotenzen $(10, 100, 1000, \ldots)$

Multiplikationsalgorithmus

- Algorithmus:
- Für alle j: Multipliziere x mit y_j durch mehrfaches Ausführen des kleinen Einmaleins (mit Beachtung des Übertrags) und multipliziere dieses Produkt mit 10^j.
- Addiere für alle j die Produkte $x \cdot y_j \cdot 10^j$.

- Sachgerechter Aufbau des Unterrichts der Multiplikation:

  kleines Einmaleins (Grundschritt)

  Multiplikation mit $10, 100, 1000, \ldots$ (Grundschritt)

  Multiplikation einer Zahl mit einer einstelligen Zahl

  Allgemeiner Fall

Multiplikationsalgorithmus

Berechne die Zifferndarstellung von $345 \cdot 67$!

- $345 \cdot 67 = 345 \cdot (6 \cdot 10 + 7) = 345 \cdot 6 \cdot 10 + 345 \cdot 7$
- $345 \cdot 6 = (3 \cdot 100 + 4 \cdot 10 + 5) \cdot 6 = 2070,$
  $345 \cdot 6 \cdot 10 = 20700$
- $345 \cdot 7 = 2415$
- $345 \cdot 67 = 20700 + 2415 (= 2415 + 20700) = 23115$
- Schreibweise:

$$
\begin{array}{cccccc}
 & 3 & 4 & 5 & \cdot & 67 \\
 & - & - & - & - & -- \\
2 & 0 & 7 & 0 & & \\
 & 2 & 4 & 1 & 5 & \\
- & - & - & - & - & \\
2 & 3 & 1 & 1 & 5 &
\end{array}
\quad \text{oder} \quad
\begin{array}{cccccc}
 & 3 & 4 & 5 & \cdot & 67 \\
 & - & - & - & - & -- \\
 & 2 & 4 & 1 & 5 & \\
2 & 0 & 7 & 0 & & \\
- & - & - & - & - & \\
2 & 3 & 1 & 1 & 5 &
\end{array}
$$

Algorithmus für die Division mit Rest

- Gegeben: zwei natürliche Zahlen x und y in Zifferndarstellung

  Gesucht: Zifferndarstellung des ganzzahligen Quotienten (q) und des Restes (r) von x nach Division mit Rest durch y

  $$x = q \cdot y + r, \;\; 0 \leq r < y$$

- Division mit Rest von natürlichen Zahlen ist mehrfache Subtraktion.
- Erster Algorithmus zum Dividieren mit Rest: subtrahiere y so oft wie möglich (Differenz nicht negativ) von x

  der ganzzahlige Quotient ist die Anzahl der Subtraktionen, der Rest ist die letzte Differenz

- Beispiel: Dividiere 53 mit Rest durch 24!

  $53 - 24 = 29, \;\; 29 - 24 = 5$

  $53 = 2 \cdot 24 + 5$, Ganzzahliger Quotient: 2, Rest 5.

Algorithmus für die Division mit Rest

- Effizienterer Algorithmus für x, y in Zifferndarstellung? Wie können Subtraktionen eingespart werden?

- Idee: Wenn man 24 von 53 2-mal abziehen kann, dann mindestens 20-mal von 530 und mindestens 200-mal von 5300.

- Beispiel: Wegen
  $53 = 2 \cdot 24 + 5$ ist
  $530 = 20 \cdot 24 + 50$ und
  $5300 = 200 \cdot 24 + 500$

Algorithmus für die Division mit Rest

- Grundschritt: Division mit Rest mit einstelligem Quotienten! (Dividend ist kleiner als 10 mal Divisor)

  Wird mit erstem Algorithmus (mehrfaches - höchstens 9-maliges - Subtrahieren) ausgeführt (oder durch Versuch und Irrtum).

  (Unterschied zu ersten drei Rechenoperationen: Anzahl der Grundschrittoperationen nicht endlich, können daher nicht auswendig gelernt werden).

- Beispiele für Grundschritte bei der Division mit Rest: $4321 : 567, \quad 234 : 56, \quad 56 : 234, \quad 41 : 7$

- Die Divisionen mit Rest $91 : 7$ und $38 : 3$ gehören nicht zu den Grundschritten!

Algorithmus für die Division mit Rest

Dividiere 2023 mit Rest durch 16!

$20 = 1 \cdot 16 + 4$, daher $2000 = 100 \cdot 16 + 400$

$2023 = 100 \cdot 16 + 423$

Weiter wie oben mit 423 (statt 2023):
$42 = 2 \cdot 16 + 10$, daher $420 = 20 \cdot 16 + 100$

$423 = 20 \cdot 16 + 103$

Weiter wie oben mit 103:
$103 = 6 \cdot 16 + 7$

$2023 = 100 \cdot 16 + 20 \cdot 16 + 6 \cdot 16 + 7 = 126 \cdot 16 + 7$

Statt 126 Subtraktionen wurden nur 9 Subtraktionen benötigt!

Algorithmus für die Division mit Rest

- Sachgerechter Aufbau des Unterrichts der Division mit Rest:

  Division mit Rest mit einstelligem Quotienten (Grundschritt)

  (Die Anzahl der Stellen von Dividend und Divisor spielt keine Rolle!)

  Allgemeiner Fall (beginnend mit einfachen Zahlen)

- Lehrplan Volksschule

  3. Schulstufe: Multiplizieren mit einstelligem Multiplikator, Dividieren durch einstelligen Divisor (ohne und mit Rest)

  4. Schulstufe Dividieren durch ein- und zweistelligen Divisor (ohne und mit Rest) mit sinnvollen Schwierigkeitsgraden

- Bei der Division mit Rest ist die Anzahl der Stellen des ganzzahligen Quotienten entscheidend, nicht die Anzahl der Stellen des Divisors!

Ein Algorithmus zur Berechnung von Nullstellen: Bisektionsverfahren

- Gegeben: $a, b \in \mathbb{R},\ a < b,\ f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ stetige Funktion, $f(a) \cdot f(b) < 0$, $\varepsilon > 0$.
- Gesucht: ein Intervall der Länge $< \varepsilon$, das eine Nullstelle von f enthält.

- Die Aufgabe ist einfach zu lösen, wenn $b - a < \varepsilon$.
  Dann ist $[a, b]$ das gesuchte Intervall.

  Dazu muss aber noch gezeigt werden, dass f in $[a, b]$ mindestens eine Nullstelle hat (Zwischenwertsatz). Später.

- Idee: Gehe zu gleicher Aufgabe, nur mit kleinerem Definitionsbereich, über.

Ein Algorithmus zur Berechnung von Nullstellen: Bisektionsverfahren

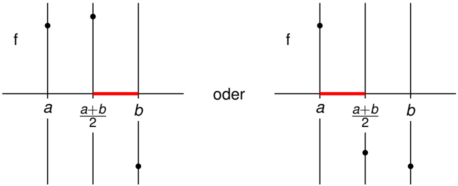
- Grundschritt: Sei $c := \frac{1}{2}(a+b)$ das arithmetische Mittel von a und b.

  $a < c < b$

  Wenn $f(c) = 0$, ist c eine Nullstelle von f. Ende.

  Wenn $f(a) \cdot f(c) > 0$, ersetze a durch c.

  Wenn $f(a) \cdot f(c) < 0$, ersetze b durch c.



Ein Algorithmus zur Berechnung von Nullstellen: Bisektionsverfahren

- Das neue Intervall $[a, b]$ ist halb so lang wie das alte.
- Die Einschränkung der Funktion f auf das neue Intervall erfüllt die gleichen Bedingungen wie f.
- Führe den Grundschritt n-mal aus, wobei n so gewählt wird, dass
$$\frac{1}{2^n}(b-a) < \varepsilon$$

Ein Algorithmus zur Berechnung von Nullstellen: Bisektionsverfahren

- Warum gibt es in jedem der betrachteten Intervalle (mindestens) eine Nullstelle?

- Sei $(c_1 := \frac{1}{2}(a+b), c_2, c_3, \ldots)$ die Folge der wie im Verfahren berechneten Mittelwerte.

- Diese Folge ist eine Cauchyfolge (für $k < \ell$ ist $|c_k - c_\ell| < \frac{1}{2^k}(b-a)$), hat also einen Grenzwert z.

  f ist stetig, also konvergiert auch die Folge $(f(c_1), f(c_2), f(c_3), \ldots)$ und ihr Grenzwert ist $f(z)$.

  Diese Folge hat eine Teilfolge mit nur positiven Gliedern und eine Teilfolge mit nur negativen Gliedern, beide müssen auch gegen $f(z)$ konvergieren.

  Daher muss $f(z) = 0$ sein. Wegen $a < z < b$ folgt die Behauptung.

Schlussbemerkungen

- Im Mathematikunterricht werden von der 2. bis zur 12./13. Schulstufe viele Algorithmen unterrichtet.
- Es gibt viele andere Algorithmen aus dem Lebensbereich der Schüler*innen, die in der Schule unterrichtet werden könnten, z.B.:

  RSA-Algorithmus (Verschlüsselung des PIN-Codes einer Debitkarte)

  Algorithmus von Dijkstra (kürzeste Wege)

  Algorithmus von Prim oder Kruskal (Minimalgerüste)

  Ungarischer Algorithmus (Personalzuteilung)

  . . .

Schlussbemerkungen

- Kenntnis einiger Strategien und Ideen erleichtert es, Algorithmen für weitere Probleme zu entwickeln.
- Wichtig für Vermittlung von „algorithmischem Denken“:
  Nicht nur „So berechnet man das!“
  sondern auch „Warum berechnet man das so?“

  Und: „Warum interessiert man sich dafür?“
- Selbstbewusstsein der Schüler*innen kann wachsen:
  „Ich kann durch Nachdenken Probleme lösen“
- Vor Algorithmen braucht man keine Angst zu haben, aber vielleicht vor den Menschen, die sie verwenden.

Danke für die Aufmerksamkeit!

http://www.uibk.ac.at/mathematik/personal/pauer/
franz.pauer@uibk.ac.at