Komplexe Zahlen

Franz Pauer

Institut für Fachdidaktik

Universität Innsbruck

22. April 2022

Lehrplan AHS

6. Semester Kompetenzmodul 6:
Komplexe Zahlen

- Die Zweckmäßigkeit der Erweiterung der reellen Zahlen erkennen
- Komplexe Zahlen in der Form a + b·i kennen; mit ihnen rechnen und sie zum Lösen von Gleichungen verwenden können
- Den Fundamentalsatz der Algebra kennen
- *Komplexe Zahlen in Polarform kennen*

Lehrplan HTL

Lehrplan HTL Fachrichtungen Elektrotechnik, Mechatronik, Elektronik und Technische Informatik, . . . :

- II. Jahrgang, 3. Semester – Kompetenzmodul 3:

  Bildungs- und Lehraufgabe:

  Die Schülerinnen und Schüler können im Bereich komplexe Zahlen und Geometrie

  - die elementaren Rechenoperationen mit komplexen Zahlen durchführen und deren unterschiedliche Darstellungen zur Behandlung elektrischer Netzwerke anwenden.

- Lehrstoff:
  Komplexe Zahlen (Komponentenform, Polarform, Exponentialform; elementare Operationen).

Inhalt

- *Gibt es eine Zahl, deren Quadrat -1 ist?*
  Zahlen, Zahlbereiche und Zahlbereichserweiterungen

- *Die Erweiterung von den reellen zu den komplexen Zahlen ist einfach!*
  Elementare Definition der komplexen Zahlen

- Geometrische Interpretation von Addition und Multiplikation von komplexen Zahlen

- Komplexe Lösungen von algebraischen Gleichungen

- Komplexe Zahlen in der Elektrotechnik

- Motivation für komplexe Zahlen in der Schule

- Komplexe Zahlen als Drehstreckungen

- Komplexe Zahlen als Polynome vom Grad ≤ 1

Was sind Zahlen?

- Das, was unter „Zahl“ verstanden wird, hat sich im Lauf der Geschichte verändert und ändert sich auch während der Schulzeit.
- Natürliche Zahlen sind jedenfalls Zahlen.
  Der Zahlbereich der natürlichen Zahlen besteht aus der Zahlenmenge $\{0, 1, 2, 3, \ldots\}$ und den zwei Rechenoperationen Addition $(+)$ und Multiplikation $(\cdot)$.
- Diese zwei Rechenoperationen erfüllen die folgenden grundlegenden Rechenregeln:

  Für alle natürlichen Zahlen a, b, c ist
  $(a+b)+c = a+(b+c), \quad (a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c),$
  $a+b = b+a, \quad a \cdot b = b \cdot a,$
  $(a \cdot b)+(a \cdot c) = a \cdot (b+c),$
  $a+0 = a, \quad a \cdot 1 = a.$

Was sind Zahlen?

- Ein Zahlbereich besteht aus einer Menge (*Zahlenmenge*), welche die Menge der natürlichen Zahlen enthält und aus zwei Rechenoperationen, genannt Addition ($+$) und Multiplikation ($\cdot$).

- Die Einschränkungen der Rechenoperationen auf die natürlichen Zahlen stimmen mit jenen für natürliche Zahlen überein.

- Die zwei Rechenoperationen erfüllen die grundlegenden Rechenregeln des Zahlbereichs der natürlichen Zahlen

- Die Elemente der Zahlenmenge eines Zahlbereichs nennt man *Zahlen*.

Zahlbereichserweiterungen

- Zahlbereich $(E, +_E, \cdot_E)$ ist *Erweiterung* von Zahlbereich $(D, +, \cdot)$, wenn
  - $D \subseteq E$,
  - Einschränkungen der Rechenoperationen $+_E$ und $\cdot_E$ von E auf D stimmen mit $+$ und $\cdot$ von D überein
  - alle Rechenregeln für D gelten auch für E .
- Motivation für eine Zahlbereichserweiterung:
  ein Problem ist im bekannten Zahlbereich D nicht lösbar und man vermutet, dass es in einem größeren Zahlbereich lösbar ist.
- Das heißt: Der bisherige Zahlbegriff war zu eng gefasst, man möchte ihn erweitern.

Zahlbereichserweiterungen im Schulunterricht

- Von den natürlichen zu den positiven rationalen Zahlen:
  $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Q}_{\geq 0}$ (4., 5. und 6. Schulstufe)
  Motivation: Finde eine Zahl x so, dass $3 \cdot x = 1$ ist!

- Von den positiven rationalen Zahlen zu den rationalen Zahlen:
  $\mathbb{Q}_{\geq 0} \subseteq \mathbb{Q}$ (7. Schulstufe)
  Motivation: Finde eine Zahl x so, dass $x + 3 = 1$ ist!

- Von den rationalen Zahlen zu gewissen algebraischen Erweiterungen der rationalen Zahlen („Rechnen mit Wurzeln") :
  zum Beispiel $\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{Q}[\sqrt{2}]$ (8. und 9. Schulstufe)
  Motivation: Finde eine Zahl x so, dass $x^2 = 2$ ist!

- Von den rationalen Zahlen zu den reellen Zahlen: $\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$
  (10. Schulstufe)
  Motivation: Finde eine Zahl x so, dass
  $\lim_{n\to\infty} \left(1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \cdots + \frac{1}{n!}\right) = x$ ist!

- Von den reellen Zahlen zu den komplexen Zahlen: $\mathbb{R} \subseteq \mathbb{C}$
  (11. bzw. 10. Schulstufe)
  Motivation: Finde eine Zahl x so, dass $x^2 = -1$ ist!

Konstruktion von Zahlbereichserweiterungen

- Zuerst: neue Zahlenmenge angeben („Was sind die neuen Zahlen?“).
  Man wählt sie so, dass sie
  - die alte Zahlenmenge enthält,
  - die Lösung des motivierenden Problems ermöglicht,
  - möglichst klein ist.

- Dann: Rechenoperationen Addition und Multiplikation auf der neuen Zahlenmenge definieren und zwar so, dass
  - sie auf der alten Zahlenmenge gleich bleiben,
  - sie die Lösung des motivierenden Problems ermöglichen,
  - die Rechenregeln weiter gelten („Permanenzprinzip“).

- In allen Erweiterungen der rationalen Zahlen kann man auch subtrahieren und (außer durch 0) dividieren.

Definition der komplexen Zahlen, einfacher Zugang

- Eine komplexe Zahl ist ein Paar von reellen Zahlen.
- Die Zahlenmenge $\mathbb{C}$ der komplexen Zahlen ist daher $\mathbb{R}^2$.
- Eine reelle Zahl a fassen wir als Paar $(a, 0)$ auf, dann ist $\mathbb{R} \subseteq \mathbb{C}$.
- Die Summe von zwei komplexen Zahlen ist die komponentenweise Summe :

  $$(a, b) + (c, d) := (a + c, b + d)$$

- Das Produkt von zwei komplexen Zahlen ist **nicht** das komponentenweise Produkt, sondern:

  $$(a, b) \cdot (c, d) := (a \cdot c - b \cdot d, a \cdot d + b \cdot c)$$

  Insbesondere ist $(0, 1) \cdot (0, 1) = (-1, 0) = -1$.
- Man prüft leicht nach, dass alle Rechenregeln für reelle Zahlen auch für komplexe Zahlen gelten.

Begründung für die Definition der Multiplikation

- Wir schreiben kurz 1 für $(1, 0)$ und i (oder j) für $(0, 1)$. Dann ist

$$(a, b) = a \cdot (1, 0) + b \cdot (0, 1) = a \cdot 1 + b \cdot i =: a + bi.$$

- $(a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i$
  $(a + bi) \cdot (c + di) = (a \cdot c - b \cdot d) + (a \cdot d + b \cdot c)i$

- Dieses Produkt wurde so definiert, damit $i \cdot i = -1$ ist, $a \cdot (c + di) = a \cdot c + (a \cdot d)i$ ist und dass alle Rechenregeln der reellen Zahlen gelten.

- Denn dann:

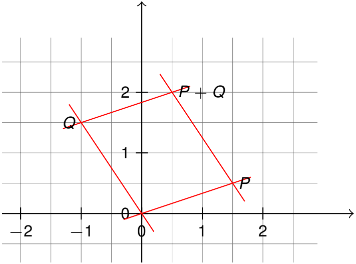
$$(a + bi) \cdot (c + di) = a \cdot c + (a \cdot d)i + (b \cdot c)i + (b \cdot d)(-1) =$$

$$= (a \cdot c - b \cdot d) + (a \cdot d + b \cdot c)i$$

Dividieren von komplexen Zahlen

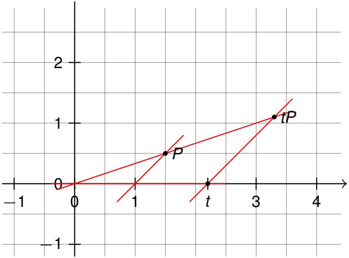
- Sei $a + ib = (a, b) \neq (0, 0)$ eine komplexe Zahl.
- Wir suchen eine komplexe Zahl (x, y) so, dass $(a, b) \cdot (x, y) = (1, 0)$ ist (*zu* (a, b) *inverse komplexe Zahl*).
- $(a, b) \cdot (x, y) = (ax - by, bx + ay) = (1, 0)$
- (x, y) ist Lösung des Systems von 2 linearen Gleichungen
$$ax - by = 1, \quad bx + ay = 0$$
- Mit Gauß-Elimination (oder Cramer'scher Regel) erhalten wir genau eine Lösung, nämlich
$$\left(\frac{a}{a^2 + b^2}, \frac{-b}{a^2 + b^2}\right)$$
- Division ist Multiplikation mit der inversen Zahl. Beispiel:
$$(2 + 3i) : (1 - i) = (2 + 3i) \cdot \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i\right) = -\frac{1}{2} + \frac{5}{2}i$$

Geometrische Interpretation der Addition

- Nach Wahl eines Koordinatensystems in der (Zeichen-)Ebene wird diese zum $\mathbb{R}^2$: Zahlenpaare können als Punkte betrachtet werden und umgekehrt.
- Der komponentenweisen Addition von Zahlenpaaren P und Q entspricht die Konstruktion des Parallelogramms mit den Eckpunkten $0, P, Q, P + Q$.
- 

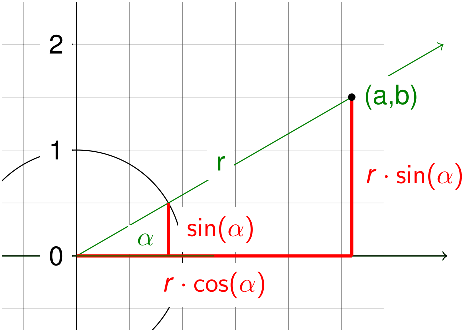
Geometrische Interpretation der Multiplikation mit reellen Zahlen

- Der (komponentenweisen) Multiplikation eines Zahlenpaares P mit einer reellen Zahl t entspricht die folgende Konstruktion:
-



Polarkoordinaten der Ebene

- Abstand von (a, b) $(\neq (0,0))$ zu $(0,0)$ ist $\sqrt{a^2 + b^2} =: r$
- $\alpha \in [0, 2\pi[$ Winkel von der positiven ersten Koordinatenachse zur Halbgeraden von $(0,0)$ durch (a, b) $(\neq (0,0))$.



- (r, α) *Polarkoordinaten* des Punktes mit kartesischen Koordinaten (a, b) $(\neq (0,0))$

$$(a, b) = (r \cdot \cos(\alpha), r \cdot \sin(\alpha)) = r \cdot (\cos(\alpha) + \sin(\alpha) i) =: re^{\alpha i}.$$

Zur Notation $e^{\alpha i}$

- Hier ist $e^{\alpha i}$ nur eine Abkürzung für $(\cos(\alpha), \sin(\alpha))$ bzw. $\cos(\alpha) + \sin(\alpha)i$.
- Grenzwert der Exponentialreihe für komplexe Argumente

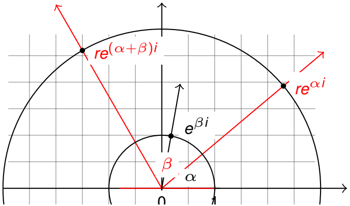
$$e^{\alpha i} := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\alpha i)^n}{n!} =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{\alpha^{2n}}{(2n)!} + \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{\alpha^{2n+1}}{(2n+1)!} i = \cos(\alpha) + \sin(\alpha)i$$

Geometrische Interpretation der Multiplikation

- $$e^{\alpha i} \cdot e^{\beta i} = (\cos(\alpha) + \sin(\alpha) i) \cdot (\cos(\beta) + \sin(\beta) i) =$$
  $$= (\cos(\alpha)\cdot\cos(\beta) - \sin(\alpha)\cdot\sin(\beta)) + (\sin(\alpha)\cdot\cos(\beta) + \cos(\alpha)\cdot\sin(\beta)) i =$$
  $$= \cos(\alpha + \beta) + \sin(\alpha + \beta) i = e^{(\alpha+\beta) i}$$

- $z := re^{\alpha i}$
  $z \cdot e^{\beta i} = re^{(\alpha+\beta)i}$
  Multiplikation von z mit $e^{\beta i}$ (eine komplexe Zahl auf dem Einheitskreis) bedeutet, z um den Winkel β zu drehen.

- 

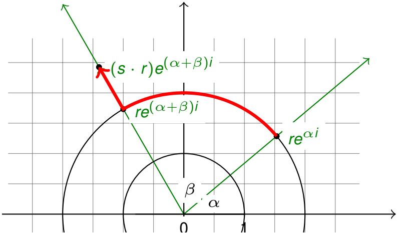
Geometrische Interpretation der Multiplikation

- $z := re^{\alpha i}$, $w := se^{\beta i}$

$$z \cdot w = (r \cdot s)e^{(\alpha+\beta)i}$$

- Multiplikation von z mit $se^{\beta i}$ bedeutet, z um den Winkel β zu drehen und dann mit s multiplizieren.

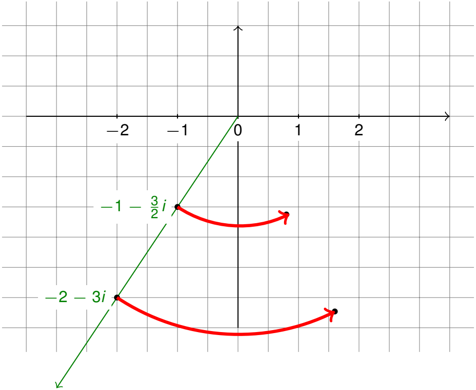
- Drehstreckung



Beispiel Drehung

Drehung von $-2-3i$ und $-1-\frac{3}{2}i$ um $\frac{\pi}{3}$ bzw. 60°:

$$e^{\frac{\pi}{3}i}\cdot(-2-3i)=(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i)\cdot(-2-3i)=\frac{3\sqrt{3}-2}{2}-\frac{3+2\sqrt{3}}{2}i$$



Geometrische Interpretation der Multiplikation

- Rechenoperation auf $[0, 2\pi[$:

$$\alpha \check{+} \beta := \begin{cases} \alpha + \beta & \alpha + \beta < 2\pi \\ \alpha + \beta - 2\pi & \alpha + \beta > 2\pi \end{cases}$$

- Rechenoperation auf $\mathbb{R}_{>0}$: Multiplikation
- Komponentenweise Rechenoperation auf $\mathbb{R}_{>0} \times [0, 2\pi[$:

$$(r, \alpha) \cdot (s, \beta) = (r \cdot s, \alpha \check{+} \beta)$$

- Diese Rechenoperation wird von der bijektiven Funktion

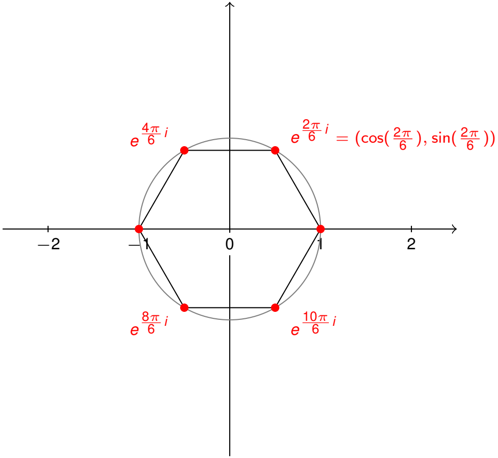
$$\mathbb{R}_{>0} \times [0, 2\pi[\longrightarrow \mathbb{C} \setminus \{0\}, (r, \alpha) \longmapsto re^{i\alpha}$$

auf $\mathbb{C}$ übertragen und entspricht dort der Multiplikation.

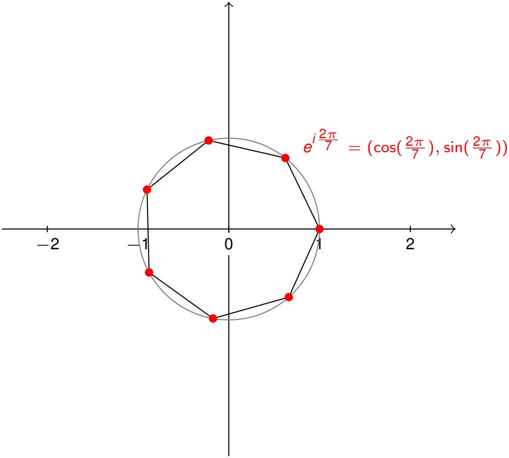
Anwendung: Satz von Moivre, Einheitswurzeln

- $$(e^{\alpha i})^n = e^{n\alpha i}$$
- $$(\cos(\alpha) + \sin(\alpha)i)^n = \cos(n\alpha) + \sin(n\alpha)i$$
- $$(e^{\frac{2\pi}{n}i})^n = e^{2\pi i} = \cos(2\pi) + \sin(2\pi)i = 1$$
- $$(e^{\frac{2k\pi}{n}i})^n = e^{2k\pi i} = \cos(2k\pi) + \sin(2k\pi)i = 1$$
- $\{e^{\frac{2k\pi}{n}i} \mid 0 \leq k < n\}$ ist Nullstellenmenge des Polynoms $X^n - 1$.

6-te Einheitswurzeln



7-te Einheitswurzeln



Ordnung von komplexen Zahlen?

- Die Ordnung $<$ der reellen Zahlen ist mit Addition und Multiplikation verträglich, dh. für alle reellen Zahlen a, b, c gilt:
  aus $a < b$ folgt $a + c < b + c$
  aus $a < b$ und $c > 0$ folgt $a \cdot c < b \cdot c$

- Für komplexe Zahlen gibt es keine solche Ordnung:

  - wäre $0 < i$, dann wäre
    $0 = i \cdot 0 < i \cdot i = -1$,
  - $1 = 0 + 1 < -1 + 1 = 0$,
  - $i = i \cdot 1 < i \cdot 0 = 0$. Widerspruch.

  - wäre $0 > i$, dann wäre
    $-i = -i + 0 > -i + i = 0$,
    $1 = (-i) \cdot i < (-i) \cdot 0 = 0$,
    $-i = (-i) \cdot 1 < (-i) \cdot 0 = 0$. Widerspruch.

Bezeichnungen

- Die erste bzw. zweite Komponente von $(a, b) = a + bi$ heißt *Realteil* bzw. *Imaginärteil* der komplexen Zahl (a, b).
  Schreibweise: $\mathrm{Re}(a + bi) := a$, $\mathrm{Im}(a + bi) := b$

- $(a, -b) = a - bi =: \overline{a + bi}$ heißt die zu $(a, b) = a + bi$ *konjugiert komplexe Zahl*

- $|a + bi| := \sqrt{a^2 + b^2}$ heißt der *Betrag* von (a, b).

- $(a + bi) \cdot (a - bi) = (a^2 + b^2) \in \mathbb{R}$

$$(a + bi)^{-1} = \frac{1}{|a + bi|^2} \cdot \overline{(a + bi)}$$

Quadratische Gleichungen

- Aufgabe: „Gegeben sind komplexe Zahlen p und q, gesucht sind alle komplexen Zahlen z so, dass
$$z^2 + p \cdot z + q = 0$$
ist.“(*quadratische Gleichung* mit komplexen Koeffizienten)

- Umschreiben in Scheitelform
$$(z + \frac{p}{2})^2 - (\frac{p^2}{4} - q) = 0$$
ergibt: Die gesuchten Zahlen sind $-\frac{p}{2} + w$ und $-\frac{p}{2} - w$, wobei w eine komplexe Zahl mit $w^2 = \frac{p^2}{4} - q =: d$ ist.

- Stelle d in Polarform dar: $d = re^{\alpha i}$.
Dann: $w = \sqrt{r}e^{\frac{\alpha}{2}i}$ oder $w = -\sqrt{r}e^{\frac{\alpha}{2}i}$.

- Beispiel: $z^2 + 2i \cdot z + (-1 + i) = 0$ hat die Lösungen $-i + w$ und $-i - w$ mit $w = \pm e^{\frac{\pi}{4}i} = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}(1 + i)$.

Algebraische Gleichungen höherer Ordnung

- „Fundamentalsatz der Algebra“: Jedes nicht-konstante Polynom mit komplexen Koeffizienten hat mindestens eine komplexe Nullstelle.
- Ist ein Satz der (komplexen) Analysis, Beweis benutzt Eigenschaften der reellen Zahlen.
- z Nullstelle von Polynom $f \Leftrightarrow X - z$ Teiler von f
- Daraus folgt: Jedes Polynom mit komplexen Koeffizienten ist Produkt von Linearfaktoren:

  $$f = c \prod_{i=1}^{n} (X - z_i)$$

  Nullstellen von f: $z_1, \ldots, z_n$
  Leitkoeffizient von f: $c \in \mathbb{C}$
- Vereinfacht viele Überlegungen über Polynome (auch in mehreren Variablen)!

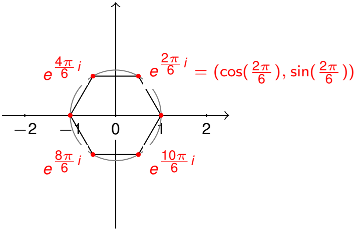
Polynome mit reellen Koeffizienten

- Situation komplizierter: Jedes Polynom mit reellen Koeffizienten ist Produkt von linearen und quadratischen Faktoren (mit reellen Koeffizienten).
- Beweis mithilfe der komplexen Zahlen:
- f Polynom mit reellen Koeffizienten, $z \in \mathbb{C}$
- $f(z) = 0 \Leftrightarrow f(\bar{z}) = 0$
- $z_1, \dots, z_n, \bar{z}_1, \dots, \bar{z}_n$ Nullstellen von f, die nicht reell sind, $z_{n+1}, \dots, z_m$ reelle Nullstellen von f.
- $$f = c \prod_{i=1}^{n} (X - z_i)(X - \bar{z}_i) \prod_{i=n+1}^{m} (X - z_i)$$
- Die Produkte

  $(X - z_i)(X - \bar{z}_i) = X^2 - (z_i + \bar{z}_i)X - z_i \cdot \bar{z}_i = X^2 - 2\mathrm{Re}(z_i)X + |z_i|^2$

  sind Polynome mit reellen Koeffizienten vom Grad 2.

Beispiel

- 

- $$X^6 - 1 = \prod_{k=0}^{5}(X - e^{\frac{2k\pi}{6}i}) =$$
$$= (X-1)(X+1)(X+\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i)(X+\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i)(X-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i)(X-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i)$$

- $$X^6 - 1 = (X-1)(X+1)(X^2+X+1)(X^2-X+1)$$

Komplexe Zahlen in der Elektrotechnik, Idee

- Gegeben: reelle Zahlen $a \geq 0, b \geq 0, \omega, \alpha, \beta$.
  Finde Zahlen $\gamma \in [0, 2\pi[$, $c \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ so, dass für alle $t \in \mathbb{R}$:
  $$a \cdot \sin(\omega t + \alpha) + b \cdot \sin(\omega t + \beta) = c \cdot \sin(\omega t + \gamma)$$
- Idee: $a \cdot \sin(\omega t + \alpha)$ ist Imaginärteil von $ae^{(\omega t + \alpha)i}$
- Löse Aufgabe auf „Umweg“ über komplexe Zahlen.
- $$ae^{(\omega t+\alpha)i} + be^{(\omega t+\beta)i} = ce^{(\omega t+\gamma)i}$$
- $$ae^{\alpha i} + be^{\beta i} = ce^{\gamma i}$$
- Berechne Polarkoordinaten (c, γ) von $ae^{\alpha i} + be^{\beta i}$
- $c \cdot \sin(\omega t + \gamma) = \mathrm{Im}(ce^{(\omega t+\gamma)i}) = \mathrm{Im}(ae^{(\omega t+\alpha)i} + be^{(\omega t+\beta)i}) =$
  $= \mathrm{Im}(ae^{(\omega t+\alpha)i}) + \mathrm{Im}(be^{(\omega t+\beta)i}) = a \cdot \sin(\omega t + \alpha) + b \cdot \sin(\omega t + \beta)$

Komplexe Wechselstromrechnung

- Spannung zur Zeit t: $u(t) = a \cdot \cos(\omega t + \alpha)$, a Amplitude, α Nullphasenwinkel, $u(t)$ ist Realteil von

$$\underline{u}(t) = ae^{(\omega t + \alpha)j} = ae^{\alpha j} \cdot e^{\omega tj}$$

- Stromstärke zur Zeit t: $i(t) = b \cdot \cos(\omega t + \beta)$, Realteil von

$$\underline{i}(t) = be^{(\omega t + \beta)j}$$

  $\varphi := \alpha - \beta$ Phasenverschiebung

- $$\underline{Z} := \frac{\underline{u}(t)}{\underline{i}(t)} = \frac{a}{b} e^{\varphi j}$$

  Impedanz, hängt nicht von der Zeit ab.
  Realteil bzw. Imaginärteil der Impedanz heißen *Wirkwiderstand* bzw. *Blindwiderstand*.

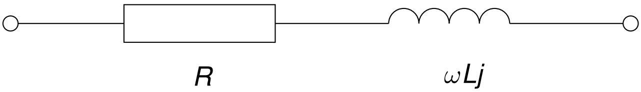
- Impedanz bei Ohm'schen Widerstand: R

- Impedanz bei Spule: ωLj, L Induktivität

Komplexe Wechselstromrechnung

- Für die Serien- bzw. Parallelschaltung von Impedanzen gelten die gleichen Regeln wie für Ohm'sche Widerstände:
- Serienschaltung:
$$Z = \sum_k Z_k$$
- Parallelschaltung:
$$\frac{1}{Z} = \sum_k \frac{1}{Z_k}$$
- Beispiel: Impedanz bei Serienschaltung von Spule (mit Induktivität L) und Ohm'schen Widerstand (R):
$$R + \omega L j$$
- Beispiel: Impedanz bei Parallelschaltung von Spule (mit Induktivität L) und Ohm'schen Widerstand (R):
$$\frac{1}{\frac{1}{R} + \frac{1}{\omega L j}} = \frac{R\omega L j}{R + \omega L j} = \frac{R\omega^2 L^2}{R^2 + \omega^2 L^2} + \frac{R^2 \omega L}{R^2 + \omega^2 L^2} j$$

Komplexe Wechselstromrechnung

- 

- Spannung zur Zeit t in Volt: $u(t) = 230\cos(\omega t)$;
- Ermittle Stromstärke $i(t)$ in Ampère zur Zeit t für $R = 40$ und $\omega L = 30$ (in Ω)!
- $\underline{u}(t) = 230e^{\omega tj}$, $\underline{i}(t) = ce^{(\omega t+\beta)j} = \frac{\underline{u}(t)}{\underline{Z}}$
- $\underline{Z} = R + \omega Lj = 40 + 30j$
- $\underline{i}(t) = \frac{230e^{\omega tj}}{40+30j} = (3,68 - 2,76j) \cdot e^{\omega tj}$
- $3,68 - 2,76j = 4,6e^{0,64j}$
- $i(t) = \mathrm{Re}(4,6e^{(\omega t+0,64)j)}) = 4,6\cos(\omega t + 0,64)$

Motivation für komplexe Zahlen in der Schule

- Nachdenken über den Zahlbegriff, Reflexion über dessen Erweiterungen im Lauf der Schulzeit
- Komplexe Zahlen erleichtern Beantwortung von manchen Fragen, die mit reellen Zahlen formuliert wurden (daher eher „simple Zahlen“!)
- Anwendungen in Physik (dafür aber Polardarstellung wichtig!), ermöglicht fächerübergreifenden Unterricht

Komplexe Zahlen als Drehstreckungen

- Drehungen um den Nullpunkt $(0, 0)$ sind lineare Funktionen von $\mathbb{R}^2$ nach $\mathbb{R}^2$, können also durch 2×2-Matrizen dargestellt werden.
- $$\begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha \end{pmatrix}$$
  beschreibt die Drehung um den Winkel α .
- $$j := \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$
  beschreibt die Drehung um den Winkel 90° bzw. $\frac{\pi}{2}$.
- $$a := \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}$$
  beschreibt die Streckung (mit Zentrum $(0, 0)$) um den Faktor a.
- Dann:
  $$j^2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = -1$$

Komplexe Zahlen als Drehstreckungen

- $$a + bj = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$$

- Die Menge der 2×2-Matrizen $\{a + bj \mid a, b \in \mathbb{R}\}$ ist unter Addition und Multiplikation von Matrizen abgeschlossen, die Multiplikation dieser Matrizen ist kommutativ.

- Mit Ausnahme der Nullmatrix sind alle diese Matrizen invertierbar:
$$\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \cdot \left(\frac{1}{a^2 + b^2} \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- Äquivalente Definition von $\mathbb{C}$: Menge der Matrizen $\{\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{R}\}$ mit Addition und Multiplikation von Matrizen.

- Oder: Menge der Drehstreckungen mit Addition und Hintereinanderausführung (nicht Multiplikation!) von Funktionen.

Komplexe Zahlen als Polynome mit Grad ≤ 1

- „Algebraischer Zugang“ zu komplexen Zahlen:
- Zahlenmenge: $\mathbb{C} := \{a + bX \mid a, b \in \mathbb{R}\}$
- Addition von Polynomen
- Multiplikation: $(a + bX) \cdot (c + dX) :=$ Rest des Produktes der Polynome $a + bX$ und $c + dX$ nach Division mit Rest durch $X^2 + 1$
- Insbesondere: $X^2 = 1.(X^2 + 1) - 1$, somit ist $X \cdot X = -1$. Schreibweise : i oder j statt X, dann $a + bi := a + bX$.
- Schulbücher, die komplexe Zahlen als „mathematischen Ausdruck der Form $a + b \cdot i$ “ einführen, haben vermutlich diesen Zugang als Hintergrund (dieser sollte dann auch erklärt werden).

Komplexe Zahlen als Polynome mit Grad ≤ 1

- Dieser Zugang kann auch für Erweiterungen von $\mathbb{Q}$ durch algebraische Zahlen verwendet werden:
- Zum Beispiel: Erweiterung von $\mathbb{Q}$ zu $\mathbb{Q}[\sqrt{2}]$
- Zahlenmenge: $\mathbb{Q}[\sqrt{2}] := \{a + bX \mid a, b \in \mathbb{Q}\}$
- Addition von Polynomen
- Multiplikation: $(a + bX) \cdot (c + dX) :=$ Rest des Produktes der Polynome $a + bX$ und $c + dX$ nach Division mit Rest durch $X^2 - 2$
- Insbesondere: $X^2 = 1.(X^2 - 2) + 2$, somit ist $X \cdot X = 2$. Schreibweise : $\sqrt{2}$ statt X, dann $a + b\sqrt{2} := a + bX$.

Danke für die Aufmerksamkeit!

http://www.uibk.ac.at/mathematik/personal/pauer/
franz.pauer@uibk.ac.at