Schlussrechnung, Modellbildung und Interpolation

Franz Pauer

Institut für Fachdidaktik und Institut für Mathematik
Universität Innsbruck

Tag der Mathematik
Graz, 7. Februar 2013

Beispiele für Schlussrechnungen

Eine halbe Stunde Parkzeit in der Innsbrucker Innenstadt kostet 50 Cent. Wieviel kosten drei halbe Stunden Parkzeit?

Beispiele für Schlussrechnungen

Fritz zahlt (in Österreich) für ein Jahreseinkommen von 20.000 Euro 3470 Euro Einkommensteuer. Wieviel zahlt Anna (ebenfalls in Österreich) für ein Jahreseinkommen von 40.000 Euro?

Beispiele für Schlussrechnungen

Fritz kauft 2 kg Mehl und 1 kg Zucker und bezahlt dafür 4 Euro, Anna kauft 1 kg Mehl und 3 kg Zucker und bezahlt dafür 4,5 Euro.

Wieviel hätten sie für 1 kg Mehl und 2 kg Zucker zahlen müssen?

Beispiele für Schlussrechnungen

An einem Tag im Mai hatte es beim Grazer Uhrturm

um 8 Uhr 10 Grad,

um 12 Uhr 18 Grad und

um 17 Uhr 16 Grad Celsius.

Wieviel Grad hatte es um 10 Uhr?

Beispiele für Schlussrechnungen

Ein Schiff wiegt 30 Tonnen. Sein Kapitän ist vierzig Jahre alt.
Wie alt ist der Kapitän eines Schiffes, das 60 Tonnen wiegt?

Leider!

Ohne „ExpertInnenwissen“ über

- das Parken in der Innsbrucker Innenstadt
- das österreichische Steuersystem
- die Preisgestaltung in einem Supermarkt
- Wetterkunde
- ...

sind diese Aufgaben nicht lösbar!

Sie sind erst lösbar, wenn mit „Sachkenntnis“ ein „mathematisches Modell“ für den gegebenen Zusammenhang gewählt oder vorgegeben wurde.

Aus dem Praxishandbuch für „Mathematik“, 8. Schulstufe, bifie 2011.

Seite 64, Aufgabe 2 „Ergänzen, Vervollständigen“

Ergänze den fehlenden Preis:

1 kg Äpfel	*2 Euro*
3 kg Äpfel	*Euro . . .*

Didaktischer Hinweis: . . . In der Diskussion um die Behandlung der „Schlussrechnungen“ hat sich heute weitgehend die Erkenntnis durchgesetzt, dass dieser Aufgabentyp überhaupt nur unter dem Gesichtspunkt von Funktionen in seinem Kern verstanden werden kann (Vollrath& Weigand, 2007, S. 170).

Zur Aufgabe aus dem Praxishandbuch für „Mathematik“

Diese Aufgabe ist nicht eindeutig lösbar. Die vermutlich erwartete Antwort „6 Euro“ setzt voraus, dass der Preis direkt proportional dem Gewicht ist, das heißt:

> Kaufe ich doppelt so viel, zahle ich doppelt soviel,
> kaufe ich drei mal so viel, zahle ich drei mal soviel,
> kaufe ich c-mal so viel, zahle ich c-mal soviel.

Oder: Die Funktion, die jeder Zahl a den Preis (in Euro) von a kg Äpfeln zuordnet, ist linear.

Zur Aufgabe aus dem Praxishandbuch für „Mathematik“

Wenn ein Supermarkt das Sonderangebot „Nimm 3, zahl 2“ macht, wäre die Antwort „4 Euro“.
Der Zusammenhang von Gewicht und Preis muss in diesem Fall anders modelliert werden.

„Je mehr, desto mehr“ reicht nicht aus!

Funktionen

Für die mathematische Beschreibung von Beziehungen bzw. Zusammenhängen zwischen Mengen werden häufig Funktionen verwendet.

Zur Erinnerung: Eine *Funktion* von einer Menge M nach einer Menge N ist eine Vorschrift, die jedem Element von M genau ein Element von N zuordnet. M heißt dann der *Definitionsbereich* und N der *Wertebereich* der Funktion. Die Schreibweise

$$f : M \to N\,,\ m \mapsto f(m)\,,$$

bedeutet, dass f eine Funktion von M nach N ist, die dem Element $m \in M$ das Element $f(m) \in N$ zuordnet.

Funktionswerte

Das Element $f(m)$ heißt *Funktionswert* von f an der Stelle m (oder *Bild* von f bezüglich m).

Jedes Element $m \in M$ mit $f(m) = n \in N$ ist ein *Urbild* von n (bezüglich f).

Funktionen können auf verschiedene Weise dargestellt werden: durch eine Tabelle, durch ihren Graphen, durch eine Rechenvorschrift, ...

W. Schlöglmann, 1982

Aus W. Schlöglmann, *Die Schlußrechnung vom Modellstandpunkt betrachtet*, Didaktik der Mathematik 3 (1982), 210-216:

- In einer Welt, in der immer stärker mathematische Methoden verwendet werden, wenn auch oft nur, um den Anschein der Wissenschaftlichkeit oder Unantastbarkeit zu erwerben, ist es notwendig, daß die Problematik des Modells allen Schülern zugänglich gemacht wird. Dies muß vor allem auch als Beitrag der Mathematik zur demokratischen Erziehung gesehen werden, denn die Demokratie erfordert die Möglichkeit der Bürger zur Kontrolle und damit auch die Entmystifizierung der sogenannten „Sachentscheidungen“.

Aus dem Lehrplan der AHS-Unterstufe (11. Mai 2000):

- Das *Bilden mathematischer Modelle und das Erkennen ihrer Grenzen* soll zu einem verantwortungsvollen Umgang mit Aussagen führen, die mittels mathematischer Methoden entstanden sind.
- Folgende mathematische Grundtätigkeiten sind zu entwickeln: *Kritisches Denken*, insbesondere: Überprüfen von Vermutungen; Überprüfen von Ergebnissen; *Erkennen von Unzulänglichkeiten mathematischer Modelle*; Erkennen von Mängeln in Darstellungen oder Begründungen.

Schlussrechnungen

„Schlussrechnungen“ sind Aufgaben. Ihre Lösung erfordert drei grundlegende mathematische Tätigkeiten:

- Modellieren
- Interpolation (dabei ist eine lineare Gleichung zu lösen)
- Auswerten einer Funktion.

Beispiel:

- Fritz zahlt für 2 kg Äpfel 4 Euro, wieviel hätte er für 3 kg zahlen müssen?

Modellierung

Nach Wahl der Einheiten (Euro bzw. Kilogramm) werden Preis und Gewicht durch rationale Zahlen beschrieben, der Zusammenhang zwischen ihnen durch eine Funktion

$$p : \mathbf{Q} \longrightarrow \mathbf{Q}\,,$$

$$a \longmapsto \text{Preis in Euro von } a \text{ Kilogramm Äpfel}$$

Welche Eigenschaften soll diese Funktion haben? Wir nehmen an, dass sich der Preis verdoppelt, halbiert, verdreifacht, ... , wenn man das Gewicht verdoppelt, halbiert, verdreifacht, ... (Es gibt keinen Rabatt und keine Sonderaktion). Kurz: Für alle $c, x \in \mathbf{Q}$ soll

$$p(c \cdot x) = c \cdot p(x)$$

sein Das heißt: wir nehmen an, dass die Funktion p *linear* ist.

(Homogene)lineare Funktionen

Eine *(homogene) lineare Funktion* f von $\mathbf{Q}$ nach $\mathbf{Q}$ ist eine Funktion mit der Eigenschaft: Für alle $c, x \in \mathbf{Q}$ ist

$$f(c \cdot x) = c \cdot f(x).$$

(„Das Bild des Vielfachen ist das Vielfache des Bildes“).

Sie ist eindeutig durch ihren Funktionswert $f(1)$ in 1 bestimmt:

$$f(x) = f(x \cdot 1) = x \cdot f(1)\,.$$

Interpolation

Annahme: der Zusammenhang von Gewicht und Preis ist (homogen) linear
(oder: Gewicht und Preis sind *direkt proportional*).
Daher ist p durch $p(1)$ eindeutig bestimmt. Wir wissen: $p(2) = 4$.

Löse also die *Interpolationsaufgabe* „Finde eine lineare Funktion von $\mathbf{Q}$ nach $\mathbf{Q}$, deren Wert an der Stelle 2 gleich 4 ist“.

Interpolation

Wegen

$$4 = p(2) = 2 \cdot p(1)$$

können wir (durch Lösen einer linearen Gleichung in einer Unbekannten) $p(1)$, den Preis von 1 Kilogramm Äpfel, ausrechnen. Damit ist p gut beschrieben:

$$\text{Für alle Zahlen } z \text{ ist } p(z) = z \cdot p(1) = 2z.$$

Auswerten

Um die Schlussrechnung zu beenden, müssen wir noch p in 3 auswerten:

$$p(3) = 2 \cdot 3 = 6 \; .$$

Wichtig!

- Das „Modell“ war nicht *eine* lineare Funktion, sondern die Menge aller (homogonen) linearen Funktionen von $\mathbf{Q}$ nach $\mathbf{Q}$.
- Das Modell wurde gewählt bzw. vorgegeben, alles weitere wurde berechnet. Wenn richtig gerechnet wurde, Fritz für 3 kg Äpfel aber nicht 6 Euro bezahlen muss, dann muss das Modell verändert werden.
- Wer bei einer Schlussrechnung eine eindeutige Antwort erwartet, muss dazu das Modell vorgeben.

Zur Wahl des Modells

Wir betrachten im Folgenden die Menge $F(M, \mathbf{Q})$ aller Funktionen von einer Menge M nach $\mathbf{Q}$. In dieser Menge kann in natürlicher Weise addiert und mit rationalen Zahlen multipliziert werden, dabei gelten die Rechenregeln eines Vektorraums.

Wenn wir eine Funktion von M nach $\mathbf{Q}$ zur Beschreibung einer Situation finden wollen, legen wir zuerst Eigenschaften fest, die diese Funktion haben soll.

Häufig ist dann die Menge aller Funktionen, die diese Eigenschaften haben, ein Untervektorraum von $F(M, \mathbf{Q})$. Dieser heißt dann ein *Modell* der Situation.

Beispiele für Modelle

- Die Menge aller linearen Funktionen von $\mathbf{Q}$ nach $\mathbf{Q}$ ist ein Untervektorraum von $F(\mathbf{Q}, \mathbf{Q})$.
- Die Menge aller Polynomfunktionen, deren Grad kleiner als eine vorgegebene positive ganze Zahl ist, ist ein Untervektorraum von $F(\mathbf{Q}, \mathbf{Q})$.
- Die Menge

  $$\{f : \mathbf{Q} \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbf{Q} \mid f(x) = c/x,\ c \in \mathbf{Q}\}$$

  ist ein Untervektorraum von $F(\mathbf{Q} \setminus \{0\}, \mathbf{Q})$ (und beschreibt die *indirekte Proportionalität*).

Interpolation und Systeme linearer Gleichungen

Seien $t_1, \ldots, t_n$ paarweise verschiedene Elemente der Menge M. Dann ist die *Auswertungsfunktion*

$$A : F(M, \mathbf{Q}) \longrightarrow \mathbf{Q}^n \, , f \longmapsto (f(t_1), \ldots, f(t_n))$$

linear.

Wähle einen Untervektorraum V von $F(M, \mathbf{Q})$ so, dass die Einschränkung der Auswertungsfunktion auf V bijektiv ist, das heißt: jedes Element von $\mathbf{Q}^n$ hat genau ein Urbild in V hat. Seien $y_1, \ldots, y_n$ rationale Zahlen. Eine Funktion $g \in V$ mit der Eigenschaft

$$g(t_i) = y_i \ , \quad 0 \leq i \leq n$$

heißt *interpolierende Funktion*. Eine solche Funktion ist das eindeutig bestimmte Urbild von $(y_1, \ldots, y_n)$ in V bezüglich A.

Sie zu berechnen bedeutet, eine lineare Gleichung (bzw. ein System linearer Gleichungen) zu lösen.

Beispiel: zweidimensionales lineares Modell

Fritz kauft 2 kg Mehl und 1 kg Zucker und bezahlt dafür 4 Euro, Anna kauft 1 kg Mehl und 3 kg Zucker und bezahlt dafür 4.5 Euro. Wieviel hätten sie für 1 kg Mehl und 2 kg Zucker zahlen müssen?

Einkäufe von Fritz und von Anna: $t_1 := (2, 1)$ und $t_2 := (1, 3)$
Der Zusammenhang zwischen Einkauf und Preis wird durch eine Funktion g von $\mathbf{Q}^2$ nach $\mathbf{Q}$ beschrieben.

Wir nehmen an, dass diese Funktion linear ist (das heißt: Hätte Fritz oder Anna doppelt, dreimal, ... soviel gekauft, hätte er oder sie doppelt, dreimal, ... soviel bezahlt. Hätten Fritz und Anna die eingekauften Waren gemeinsam bezahlt, dann hätten sie die Summe dessen bezahlt, was sie getrennt bezahlt hätten.)

Beispiel: zweidimensionales lineares Modell

Annahme: Diese Funktion g ist linear, also: Für alle x, y ist $g(x, y) = x.g(1, 0) + y.g(0, 1)$.

$a := g(1, 0)$ und $b := g(0, 1)$. Dann: $g(x, y) = ax + by$, für alle $x, y \in \mathbf{Q}$. Die Auswertungsfunktion bildet g auf

$$(g(2, 1), g(1, 3)) = (2a + b, a + 3b)$$

ab. Dieses Zahlenpaar soll gleich

$$(y_1, y_2) := (4, 4.5)$$

sein.

Durch Lösen eines Systems von zwei linearen Gleichungen in zwei Unbekannten erhalten wir $(a, b) = (1.5, 1)$, also

$$g(x, y) = 1.5 \cdot x + y \ .$$

Auswerten: $g(1, 2) = 1.5 + 2 = 3.5$

Für 1 kg Mehl und 2 kg Zucker sind 3.5 Euro zu bezahlen.

Beispiel: quadratisches Modell

An einem Tag im Mai hatte es beim Grazer Uhrturm um 8 Uhr 10 Grad, um 12 Uhr 18 Grad und um 17 Uhr 16 Grad Celsius.

Wieviel Grad hatte es um 10 Uhr?

Zeit und Temperatur können durch rationale Zahlen beschrieben werden. Der Zusammenhang zwischen Zeit und Temperatur kann durch eine Funktion von $\mathbf{Q}$ nach $\mathbf{Q}$ beschrieben werden, näherungsweise vielleicht (im Zeitintervall von 7 bis 19 Uhr) durch eine quadratische Funktion.

Modell: Menge aller quadratischen Funktionen. Sei

$$h : \mathbf{Q} \longrightarrow \mathbf{Q},\ x \longmapsto c_0 + c_1 x + c_2 x^2\ ,$$

die Polynomfunktion in V mit

$$h(8) = 10,\ h(12) = 18,\ h(17) = 16\ .$$

Durch Lösen eines Systems von drei linearen Gleichungen in drei Unbekannten (oder mit Lagrange- oder Newtoninterpolation) erhalten wir

$$c_0 = -\frac{142}{5},\ c_1 = \frac{20}{3},\ c_2 = -\frac{7}{30}\ .$$

Auswerten: $h(10) = \frac{224}{15}$.
Antwort: Um 10 Uhr hatte es ca. 15 Grad.

Danke für die Aufmerksamkeit!

http://www.uibk.ac.at/mathematik/personal/pauer/

franz.pauer@uibk.ac.at

Pauer, F.: Schlussrechnung, Modellbildung und Interpolation. Didaktikheft der Österreichischen Mathematischen Gesellschaft Nr. 40 (2008), Seiten 91-98.