# Rechenverfahren für Zahlen in Zifferndarstellung - der erste Kontakt mit algorithmischem Denken

Franz Pauer

Institut für Fachdidaktik

Universität Innsbruck

1. Juni 2023

# Algorithmen

- 825 n. Chr. Muhammad al-Chwarizmi: „Über das Rechnen mit indischen Ziffern“

# Algorithmen

- 825 n. Chr. Muhammad al-Chwarizmi: „Über das Rechnen mit indischen Ziffern“

  Algorithmen (Verfahren) zum Addieren, Subtrahieren, Multiplizieren und mit Rest Dividieren von Zahlen in Zifferndarstellung

# Algorithmen

- 825 n. Chr. Muhammad al-Chwarizmi: „Über das Rechnen mit indischen Ziffern“

  Algorithmen (Verfahren) zum Addieren, Subtrahieren, Multiplizieren und mit Rest Dividieren von Zahlen in Zifferndarstellung

- 16. Jhd. Adam Ries: erstes Rechenbuch auf Deutsch

# Algorithmen

- 825 n. Chr. Muhammad al-Chwarizmi: „Über das Rechnen mit indischen Ziffern“

  Algorithmen (Verfahren) zum Addieren, Subtrahieren, Multiplizieren und mit Rest Dividieren von Zahlen in Zifferndarstellung

- 16. Jhd. Adam Ries: erstes Rechenbuch auf Deutsch

- Ältester Algorithmus: Euklischer Algorithmus zur Berechnung des ggT zweier natürlicher Zahlen, 300 v. Chr. oder früher.

# Was sind Algorithmen?
# Was bedeutet algorithmisches Denken?

- Algorithmen sind Verfahren, mit denen eine Klasse von Problemen gelöst werden kann.

# Was sind Algorithmen?
# Was bedeutet algorithmisches Denken?

- Algorithmen sind Verfahren, mit denen eine Klasse von Problemen gelöst werden kann.
- Algorithmen müssen endlich und korrekt sein, dh.:

# Was sind Algorithmen?
# Was bedeutet algorithmisches Denken?

- Algorithmen sind Verfahren, mit denen eine Klasse von Problemen gelöst werden kann.
- Algorithmen müssen endlich und korrekt sein, dh.:

  aus den Eingabedaten erhält man in endlich vielen Schritten Ausgabedaten und
  diese sind eine Lösung des betrachteten Problem.

# Was sind Algorithmen?
# Was bedeutet algorithmisches Denken?

- Algorithmen sind Verfahren, mit denen eine Klasse von Problemen gelöst werden kann.
- Algorithmen müssen endlich und korrekt sein, dh.:

  aus den Eingabedaten erhält man in endlich vielen Schritten Ausgabedaten und
  diese sind eine Lösung des betrachteten Problem.
- Algorithmisches Denken: Algorithmen verstehen, erklären, beurteilen, modifizieren, entwickeln

# Was sind Algorithmen?
# Was bedeutet algorithmisches Denken?

- Algorithmen sind Verfahren, mit denen eine Klasse von Problemen gelöst werden kann.
- Algorithmen müssen endlich und korrekt sein, dh.:

  aus den Eingabedaten erhält man in endlich vielen Schritten Ausgabedaten und
  diese sind eine Lösung des betrachteten Problem.
- Algorithmisches Denken: Algorithmen verstehen, erklären, beurteilen, modifizieren, entwickeln
- Wichtig für Vermittlung von „algorithmischem Denken“:

# Was sind Algorithmen?
# Was bedeutet algorithmisches Denken?

- Algorithmen sind Verfahren, mit denen eine Klasse von Problemen gelöst werden kann.
- Algorithmen müssen endlich und korrekt sein, dh.:

  aus den Eingabedaten erhält man in endlich vielen Schritten Ausgabedaten und
  diese sind eine Lösung des betrachteten Problem.
- Algorithmisches Denken: Algorithmen verstehen, erklären, beurteilen, modifizieren, entwickeln
- Wichtig für Vermittlung von „algorithmischem Denken“:

  Nicht nur „So berechnet man das!“

# Was sind Algorithmen?
# Was bedeutet algorithmisches Denken?

- Algorithmen sind Verfahren, mit denen eine Klasse von Problemen gelöst werden kann.
- Algorithmen müssen endlich und korrekt sein, dh.:

  aus den Eingabedaten erhält man in endlich vielen Schritten Ausgabedaten und
  diese sind eine Lösung des betrachteten Problem.
- Algorithmisches Denken: Algorithmen verstehen, erklären, beurteilen, modifizieren, entwickeln
- Wichtig für Vermittlung von „algorithmischem Denken“:

  Nicht nur „So berechnet man das!“

  sondern auch „Warum berechnet man das so?“

# „Algorithmen“ in den Lehrplänen (Österreich)

- Lehrplan Volksschule: „Algorithmus“ kommt nicht vor, aber:
  *Gewinnen der schriftlichen Rechenverfahren*

# „Algorithmen“ in den Lehrplänen (Österreich)

- Lehrplan Volksschule: „Algorithmus“ kommt nicht vor, aber:
  *Gewinnen der schriftlichen Rechenverfahren*

- Bildungsstandards BMBWF, Kompetenzen für die 4. Schulstufe:
  *Die Schülerinnen und Schüler*
  *- verstehen die Algorithmen der schriftlichen Rechenverfahren,*
  *- können die Algorithmen der schriftlichen Verfahren für Addition, Subtraktion, Multiplikation und Division durchführen,*
  *- können die Lösung mit Hilfe einer Probe überprüfen.*

# „Algorithmen“ in den Lehrplänen (Österreich)

- Lehrplan Volksschule: „Algorithmus“ kommt nicht vor, aber:
  *Gewinnen der schriftlichen Rechenverfahren*

- Bildungsstandards BMBWF, Kompetenzen für die 4. Schulstufe:
  *Die Schülerinnen und Schüler*
  *- verstehen die Algorithmen der schriftlichen Rechenverfahren,*
  *- können die Algorithmen der schriftlichen Verfahren für Addition, Subtraktion, Multiplikation und Division durchführen,*
  *- können die Lösung mit Hilfe einer Probe überprüfen.*

- Viele Algorithmen im Mathematikunterricht (der Primar- und Sekundarstufe).
  Wichtig: Nicht nur „einüben“ (oder gar „drillen“), sondern auch verständlich erklären (zugrunde liegende Strategien und Ideen erklären, Korrektheit begründen) !

# Algorithmen zum Rechnen mit natürlichen Zahlen in Zifferndarstellung

- Was ist mit „Berechne: $78 + 53,\ 87 - 34$ und $45 \cdot 67$“ gemeint?

# Algorithmen zum Rechnen mit natürlichen Zahlen in Zifferndarstellung

- Was ist mit „Berechne: $78 + 53,\ 87 - 34$ und $45 \cdot 67$“ gemeint?

  Diese Zahlen sind eindeutig bestimmt (und als Summe, Differenz, Produkt von zwei anderen dargestellt).

# Algorithmen zum Rechnen mit natürlichen Zahlen in Zifferndarstellung

- Was ist mit „Berechne: $78 + 53,\ 87 - 34$ und $45 \cdot 67$“ gemeint?

  Diese Zahlen sind eindeutig bestimmt (und als Summe, Differenz, Produkt von zwei anderen dargestellt).

  Gemeint ist: Berechne die Zifferndarstellung (zur Basis 10) von $78 + 53,\ 87 - 34$ und $45 \cdot 67$.

# Algorithmen zum Rechnen mit natürlichen Zahlen in Zifferndarstellung

- Was ist mit „Berechne: $78 + 53,\ 87 - 34$ und $45 \cdot 67$“ gemeint?

  Diese Zahlen sind eindeutig bestimmt (und als Summe, Differenz, Produkt von zwei anderen dargestellt).

  Gemeint ist: Berechne die Zifferndarstellung (zur Basis 10) von $78 + 53,\ 87 - 34$ und $45 \cdot 67$.

- Bemerkung: Man kann auch ohne Zifferndarstellung mit Zahlen rechnen, cf. Archimedes!

# Zifferndarstellung natürlicher Zahlen

- Zifferndarstellung zur Basis 10:

# Zifferndarstellung natürlicher Zahlen

- Zifferndarstellung zur Basis 10:

  Zu jeder natürlichen Zahl $a > 0$ gibt es eindeutig bestimmte natürliche Zahlen $n, z_n, z_{n-1}, \ldots, z_1, z_0$ so, dass $n > 0$, $0 \leq z_n, z_{n-1}, \ldots, z_1, z_0 < 10$ , $z_n \neq 0$ und

  $$a = z_n \cdot 10^n + z_{n-1} \cdot 10^{n-1} + \ldots + z_0$$

  Kurzsschreibweise

  $$a = z_n z_{n-1} \ldots z_1 z_0$$

# Zifferndarstellung natürlicher Zahlen

- Zifferndarstellung zur Basis 10:

  Zu jeder natürlichen Zahl $a > 0$ gibt es eindeutig bestimmte natürliche Zahlen $n, z_n, z_{n-1}, \ldots, z_1, z_0$ so, dass $n > 0$, $0 \leq z_n, z_{n-1}, \ldots, z_1, z_0 < 10$ , $z_n \neq 0$ und

  $$a = z_n \cdot 10^n + z_{n-1} \cdot 10^{n-1} + \ldots + z_0$$

  Kurzsschreibweise

  $$a = z_n z_{n-1} \ldots z_1 z_0$$

- Zifferndarstellung einer Zahl ist „Zusatzinformation“ über diese, nützlich zum schnellen Rechnen mit natürlichen Zahlen

# Grundrechnungsarten

- Addition: Summe der Anzahlen zweier disjunkter Mengen ist Anzahl von deren Vereinigung

# Grundrechnungsarten

- Addition: Summe der Anzahlen zweier disjunkter Mengen ist Anzahl von deren Vereinigung

- Subtraktion: Umkehrung der Addition ($(4+5)-5=4$)

# Grundrechnungsarten

- Addition: Summe der Anzahlen zweier disjunkter Mengen ist Anzahl von deren Vereinigung

- Subtraktion: Umkehrung der Addition ($(4 + 5) - 5 = 4$)

- Multiplikation: Mehrfache Addition ($4 \cdot 5 = 5 + 5 + 5 + 5$)

# Grundrechnungsarten

- Addition: Summe der Anzahlen zweier disjunkter Mengen ist Anzahl von deren Vereinigung
- Subtraktion: Umkehrung der Addition ($(4 + 5) - 5 = 4$)
- Multiplikation: Mehrfache Addition ($4 \cdot 5 = 5 + 5 + 5 + 5$)
- Division mit Rest: Mehrfache Subtraktion (so oft, wie möglich; Anzahl der Subtraktionen ist ganzzahliger Quotient, letzte Differenz ist Rest)

# Grundrechnungsarten

- Addition: Summe der Anzahlen zweier disjunkter Mengen ist Anzahl von deren Vereinigung
- Subtraktion: Umkehrung der Addition ($(4 + 5) - 5 = 4$)
- Multiplikation: Mehrfache Addition ($4 \cdot 5 = 5 + 5 + 5 + 5$)
- Division mit Rest: Mehrfache Subtraktion (so oft, wie möglich; Anzahl der Subtraktionen ist ganzzahliger Quotient, letzte Differenz ist Rest)

  $123 : 45 = 2$ Rest 33 bedeutet:

  $$123 - 45 - 45 = 33$$

  bzw.

  $$123 = 2 \cdot 45 + 33$$

# Algorithmen zum Rechnen mit natürlichen Zahlen in Zifferndarstellung

- Gegeben: zwei natürliche Zahlen in Zifferndarstellung.

# Algorithmen zum Rechnen mit natürlichen Zahlen in Zifferndarstellung

- Gegeben: zwei natürliche Zahlen in Zifferndarstellung.
- Gesucht: Zifferndarstellung von Summe, Differenz (falls diese nicht negativ ist), Produkt und des ganzzahligen Quotienten und des Restes (nach Division mit Rest durch eine positive Zahl)

# Algorithmen zum Rechnen mit natürlichen Zahlen in Zifferndarstellung

- Gegeben: zwei natürliche Zahlen in Zifferndarstellung.
- Gesucht: Zifferndarstellung von Summe, Differenz (falls diese nicht negativ ist), Produkt und des ganzzahligen Quotienten und des Restes (nach Division mit Rest durch eine positive Zahl)
- Strategie:
  Führe gewisse einfache Rechnungen („Grundschritte“) mehrfach aus, um Aufgabe schrittweise zu lösen.

# Algorithmen zum Rechnen mit natürlichen Zahlen in Zifferndarstellung

- Gegeben: zwei natürliche Zahlen in Zifferndarstellung.
- Gesucht: Zifferndarstellung von Summe, Differenz (falls diese nicht negativ ist), Produkt und des ganzzahligen Quotienten und des Restes (nach Division mit Rest durch eine positive Zahl)
- Strategie:
  Führe gewisse einfache Rechnungen („Grundschritte") mehrfach aus, um Aufgabe schrittweise zu lösen.

  Verwende dazu Zifferndarstellung und die Regeln für das Rechnen mit natürlichen Zahlen.

# Algorithmen zum Rechnen mit natürlichen Zahlen in Zifferndarstellung

- Gegeben: zwei natürliche Zahlen in Zifferndarstellung.
- Gesucht: Zifferndarstellung von Summe, Differenz (falls diese nicht negativ ist), Produkt und des ganzzahligen Quotienten und des Restes (nach Division mit Rest durch eine positive Zahl)
- Strategie:
  Führe gewisse einfache Rechnungen („Grundschritte") mehrfach aus, um Aufgabe schrittweise zu lösen.

  Verwende dazu Zifferndarstellung und die Regeln für das Rechnen mit natürlichen Zahlen.
- Im Unterricht: zuerst Grundschritte einüben, dann erklären, wie und warum man durch deren mehrfaches Ausführen jede Aufgabe lösen kann.

# Grundschritte

$x, y$ natürliche Zahlen

- Addition: $x + y,\ 0 \leq x, y \leq 9$
  einstelligen Zahlen addieren, „kleines Einspluseins“

# Grundschritte

$x, y$ natürliche Zahlen

- Addition: $x + y,\ 0 \leq x, y \leq 9$
  einstelligen Zahlen addieren, „kleines Einspluseins"

- Subtraktion: $x - y,\ 0 \leq y \leq x \leq 9$ und
  $(10 + x) - y, 0 \leq x < y \leq 9$

# Grundschritte

$x, y$ natürliche Zahlen

- Addition: $x + y,\ 0 \leq x, y \leq 9$
  einstelligen Zahlen addieren, „kleines Einspluseins“

- Subtraktion: $x - y,\ 0 \leq y \leq x \leq 9$ und
  $(10 + x) - y, 0 \leq x < y \leq 9$

- Multiplikation: $x \cdot y,\ 0 \leq x, y \leq 9$
  einstellige Zahlen multiplizieren, „kleines Einmaleins“

# Grundschritte

$x, y$ natürliche Zahlen

- Addition: $x + y,\ 0 \leq x, y \leq 9$
  einstelligen Zahlen addieren, „kleines Einspluseins“
- Subtraktion: $x - y,\ 0 \leq y \leq x \leq 9$ und
  $(10 + x) - y, 0 \leq x < y \leq 9$
- Multiplikation: $x \cdot y,\ 0 \leq x, y \leq 9$
  einstellige Zahlen multiplizieren, „kleines Einmaleins“
- Division mit Rest: $x : y,\ x < 10 \cdot y$
  ganzzahliger Quotient ist einstellig, $y$ kann von $x$ höchstens 9-mal subtrahiert werden

# Grundschritte

$x, y$ natürliche Zahlen

- Addition: $x + y,\ 0 \leq x, y \leq 9$
  einstelligen Zahlen addieren, „kleines Einspluseins“
- Subtraktion: $x - y,\ 0 \leq y \leq x \leq 9$ und
  $(10 + x) - y, 0 \leq x < y \leq 9$
- Multiplikation: $x \cdot y,\ 0 \leq x, y \leq 9$
  einstellige Zahlen multiplizieren, „kleines Einmaleins“
- Division mit Rest: $x : y,\ x < 10 \cdot y$
  ganzzahliger Quotient ist einstellig, $y$ kann von $x$ höchstens 9-mal subtrahiert werden
- je 100 Grundschritte bei A, S, M, beliebig viele bei DmR

# Multiplikationsalgorithmus

- Multiplikation mit natürlichen Zahlen ist mehrfache Addition.
  Erster Algorithmus zum Multiplizieren: mehrfach Addieren.

# Multiplikationsalgorithmus

- Multiplikation mit natürlichen Zahlen ist mehrfache Addition. Erster Algorithmus zum Multiplizieren: mehrfach Addieren.
- Effizienter Algorithmus: benutzt Zifferndarstellung und Rechenregeln.

# Multiplikationsalgorithmus

- Multiplikation mit natürlichen Zahlen ist mehrfache Addition. Erster Algorithmus zum Multiplizieren: mehrfach Addieren.
- Effizienter Algorithmus: benutzt Zifferndarstellung und Rechenregeln.
- Grundschritt: „kleines Einmaleins“ mit erstem Algorithmus (zum schnelleren Rechnen: auswendig lernen)

# Multiplikationsalgorithmus

- Multiplikation mit natürlichen Zahlen ist mehrfache Addition. Erster Algorithmus zum Multiplizieren: mehrfach Addieren.
- Effizienter Algorithmus: benutzt Zifferndarstellung und Rechenregeln.
- Grundschritt: „kleines Einmaleins“ mit erstem Algorithmus (zum schnelleren Rechnen: auswendig lernen)

  Produkt von einstelligen Zahlen ist höchstens zweistellig
  Übertrag: = Zehnerziffer dieses Produktes.

# Multiplikationsalgorithmus

- Multiplikation mit natürlichen Zahlen ist mehrfache Addition. Erster Algorithmus zum Multiplizieren: mehrfach Addieren.
- Effizienter Algorithmus: benutzt Zifferndarstellung und Rechenregeln.
- Grundschritt: „kleines Einmaleins“ mit erstem Algorithmus (zum schnelleren Rechnen: auswendig lernen)

  Produkt von einstelligen Zahlen ist höchstens zweistellig Übertrag: = Zehnerziffer dieses Produktes.
- Weiterer Grundschritt: Multiplikation mit Zehnerpotenzen $(10, 100, 1000, \ldots)$

# Multiplikationsalgorithmus

Multipliziere $x = x_n x_{n-1} \dots x_1 x_0$ mit $y = y_m y_{m-1} \dots y_1 y_0$ !

Algorithmus:

# Multiplikationsalgorithmus

Multipliziere $x = x_n x_{n-1} \ldots x_1 x_0$ mit $y = y_m y_{m-1} \ldots y_1 y_0$ !

Algorithmus:

- Für alle j: Multipliziere $x$ mit $y_j$ durch mehrfaches Anwenden des kleinen Einmaleins ($x_i \cdot y_j \cdot 10^i$, $0 \leq i \leq n$, addiere diese) und durch Multiplizieren dieses Produkts mit $10^j$.

# Multiplikationsalgorithmus

Multipliziere $x = x_n x_{n-1} \ldots x_1 x_0$ mit $y = y_m y_{m-1} \ldots y_1 y_0$ !

Algorithmus:

- Für alle j: Multipliziere $x$ mit $y_j$ durch mehrfaches Anwenden des kleinen Einmaleins ($x_i \cdot y_j \cdot 10^i$, $0 \leq i \leq n$, addiere diese) und durch Multiplizieren dieses Produkts mit $10^j$.
- Addiere für alle $j$ die Produkte $x \cdot y_j \cdot 10^j$.

# Multiplikationsalgorithmus

Multipliziere $x = x_n x_{n-1} \dots x_1 x_0$ mit $y = y_m y_{m-1} \dots y_1 y_0$ !

Algorithmus:

- Für alle j: Multipliziere $x$ mit $y_j$ durch mehrfaches Anwenden des kleinen Einmaleins ($x_i \cdot y_j \cdot 10^i$, $0 \leq i \leq n$, addiere diese) und durch Multiplizieren dieses Produkts mit $10^j$.
- Addiere für alle $j$ die Produkte $x \cdot y_j \cdot 10^j$.

Sachgerechter Aufbau des Unterrichts der Multiplikation:

# Multiplikationsalgorithmus

Multipliziere $x = x_n x_{n-1} \dots x_1 x_0$ mit $y = y_m y_{m-1} \dots y_1 y_0$ !

Algorithmus:

- Für alle j: Multipliziere $x$ mit $y_j$ durch mehrfaches Anwenden des kleinen Einmaleins ($x_i \cdot y_j \cdot 10^i$, $0 \leq i \leq n$, addiere diese) und durch Multiplizieren dieses Produkts mit $10^j$.
- Addiere für alle $j$ die Produkte $x \cdot y_j \cdot 10^j$.

Sachgerechter Aufbau des Unterrichts der Multiplikation:

- kleines Einmaleins (Grundschritt)

# Multiplikationsalgorithmus

Multipliziere $x = x_n x_{n-1} \dots x_1 x_0$ mit $y = y_m y_{m-1} \dots y_1 y_0$ !

Algorithmus:

- Für alle j: Multipliziere $x$ mit $y_j$ durch mehrfaches Anwenden des kleinen Einmaleins ($x_i \cdot y_j \cdot 10^i$, $0 \leq i \leq n$, addiere diese) und durch Multiplizieren dieses Produkts mit $10^j$.
- Addiere für alle $j$ die Produkte $x \cdot y_j \cdot 10^j$.

Sachgerechter Aufbau des Unterrichts der Multiplikation:

- kleines Einmaleins (Grundschritt)
- Multiplikation mit $10, 100, 1000, \dots$ (Grundschritt)

# Multiplikationsalgorithmus

Multipliziere $x = x_n x_{n-1} \dots x_1 x_0$ mit $y = y_m y_{m-1} \dots y_1 y_0$ !

Algorithmus:

- Für alle j: Multipliziere $x$ mit $y_j$ durch mehrfaches Anwenden des kleinen Einmaleins ($x_i \cdot y_j \cdot 10^i$, $0 \leq i \leq n$, addiere diese) und durch Multiplizieren dieses Produkts mit $10^j$.
- Addiere für alle $j$ die Produkte $x \cdot y_j \cdot 10^j$.

Sachgerechter Aufbau des Unterrichts der Multiplikation:

- kleines Einmaleins (Grundschritt)
- Multiplikation mit $10, 100, 1000, \dots$ (Grundschritt)
- Multiplikation einer Zahl mit einer einstelligen Zahl

# Multiplikationsalgorithmus

Multipliziere $x = x_n x_{n-1} \dots x_1 x_0$ mit $y = y_m y_{m-1} \dots y_1 y_0$ !

Algorithmus:

- Für alle j: Multipliziere $x$ mit $y_j$ durch mehrfaches Anwenden des kleinen Einmaleins ($x_i \cdot y_j \cdot 10^i$, $0 \leq i \leq n$, addiere diese) und durch Multiplizieren dieses Produkts mit $10^j$.
- Addiere für alle $j$ die Produkte $x \cdot y_j \cdot 10^j$.

Sachgerechter Aufbau des Unterrichts der Multiplikation:

- kleines Einmaleins (Grundschritt)
- Multiplikation mit $10, 100, 1000, \dots$ (Grundschritt)
- Multiplikation einer Zahl mit einer einstelligen Zahl
- Allgemeiner Fall

# Multiplikationsalgorithmus

Berechne die Zifferndarstellung von $45 \cdot 67$ !

- $45 \cdot 67 = 45 \cdot (6 \cdot 10 + 7) = 45 \cdot 6 \cdot 10 + 45 \cdot 7$

# Multiplikationsalgorithmus

Berechne die Zifferndarstellung von $45 \cdot 67$ !

- $45 \cdot 67 = 45 \cdot (6 \cdot 10 + 7) = 45 \cdot 6 \cdot 10 + 45 \cdot 7$
- $45 \cdot 6 = (4 \cdot 10 + 5) \cdot 6 = 270$, $45 \cdot 6 \cdot 10 = 2700$

# Multiplikationsalgorithmus

Berechne die Zifferndarstellung von $45 \cdot 67$ !

- $45 \cdot 67 = 45 \cdot (6 \cdot 10 + 7) = 45 \cdot 6 \cdot 10 + 45 \cdot 7$
- $45 \cdot 6 = (4 \cdot 10 + 5) \cdot 6 = 270$, $45 \cdot 6 \cdot 10 = 2700$
- $45 \cdot 7 = 315$

# Multiplikationsalgorithmus

Berechne die Zifferndarstellung von $45 \cdot 67$ !

- $45 \cdot 67 = 45 \cdot (6 \cdot 10 + 7) = 45 \cdot 6 \cdot 10 + 45 \cdot 7$
- $45 \cdot 6 = (4 \cdot 10 + 5) \cdot 6 = 270$, $45 \cdot 6 \cdot 10 = 2700$
- $45 \cdot 7 = 315$
- $45 \cdot 67 = 2700 + 315 \ (= 315 + 2700) = 3015$

# Multiplikationsalgorithmus

Berechne die Zifferndarstellung von $45 \cdot 67$ !

- $45 \cdot 67 = 45 \cdot (6 \cdot 10 + 7) = 45 \cdot 6 \cdot 10 + 45 \cdot 7$
- $45 \cdot 6 = (4 \cdot 10 + 5) \cdot 6 = 270$, $45 \cdot 6 \cdot 10 = 2700$
- $45 \cdot 7 = 315$
- $45 \cdot 67 = 2700 + 315\ (= 315 + 2700) = 3015$
- Schreibweise („schriftliche Multiplikation“):

$$\begin{array}{ccccc} & 4 & 5 & \cdot & 67 \\ & \_ & \_ & \_ & \_\,\_ \\ 2 & 7 & 0 & & \\ & 3 & 1 & 5 & \\ \_ & \_ & \_ & \_ & \\ 3 & 0 & 1 & 5 & \end{array} \quad \text{oder} \quad \begin{array}{ccccc} & 4 & 5 & \cdot & 67 \\ & \_ & \_ & \_ & \_\,\_ \\ & 3 & 1 & 5 & \\ 2 & 7 & 0 & & \\ \_ & \_ & \_ & \_ & \\ 3 & 0 & 1 & 5 & \end{array}$$

# Algorithmus für die Division mit Rest

- Gegeben: zwei natürliche Zahlen $x$ und $y$ in Zifferndarstellung

# Algorithmus für die Division mit Rest

- Gegeben: zwei natürliche Zahlen $x$ und $y$ in Zifferndarstellung

  Gesucht: Zifferndarstellung des ganzzahligen Quotienten ($q$) und des Restes ($r$) von $x$ nach Division mit Rest durch $y$

$$x = q \cdot y + r, \;\; 0 \leq r < y$$

# Algorithmus für die Division mit Rest

- Gegeben: zwei natürliche Zahlen $x$ und $y$ in Zifferndarstellung
  Gesucht: Zifferndarstellung des ganzzahligen Quotienten ($q$) und des Restes ($r$) von $x$ nach Division mit Rest durch $y$

$$x = q \cdot y + r, \;\; 0 \leq r < y$$

- Division mit Rest von natürlichen Zahlen ist mehrfache Subtraktion.

# Algorithmus für die Division mit Rest

- Gegeben: zwei natürliche Zahlen $x$ und $y$ in Zifferndarstellung

  Gesucht: Zifferndarstellung des ganzzahligen Quotienten ($q$) und des Restes ($r$) von $x$ nach Division mit Rest durch $y$

$$x = q \cdot y + r, \;\; 0 \leq r < y$$

- Division mit Rest von natürlichen Zahlen ist mehrfache Subtraktion.
- Erster Algorithmus zum Dividieren mit Rest: subtrahiere $y$ so oft wie möglich (Differenz nicht negativ) von $x$

# Algorithmus für die Division mit Rest

- Gegeben: zwei natürliche Zahlen $x$ und $y$ in Zifferndarstellung

  Gesucht: Zifferndarstellung des ganzzahligen Quotienten ($q$) und des Restes ($r$) von $x$ nach Division mit Rest durch $y$

$$x = q \cdot y + r, \;\; 0 \leq r < y$$

- Division mit Rest von natürlichen Zahlen ist mehrfache Subtraktion.
- Erster Algorithmus zum Dividieren mit Rest: subtrahiere $y$ so oft wie möglich (Differenz nicht negativ) von $x$

  der ganzzahlige Quotient ist die Anzahl der Subtraktionen,
  der Rest ist die letzte Differenz

# Algorithmus für die Division mit Rest

- Gegeben: zwei natürliche Zahlen $x$ und $y$ in Zifferndarstellung

  Gesucht: Zifferndarstellung des ganzzahligen Quotienten ($q$) und des Restes ($r$) von $x$ nach Division mit Rest durch $y$

  $$x = q \cdot y + r, \;\; 0 \leq r < y$$

- Division mit Rest von natürlichen Zahlen ist mehrfache Subtraktion.
- Erster Algorithmus zum Dividieren mit Rest: subtrahiere $y$ so oft wie möglich (Differenz nicht negativ) von $x$

  der ganzzahlige Quotient ist die Anzahl der Subtraktionen, der Rest ist die letzte Differenz

- Beispiel: Dividiere 53 mit Rest durch 24!

# Algorithmus für die Division mit Rest

- Gegeben: zwei natürliche Zahlen $x$ und $y$ in Zifferndarstellung

  Gesucht: Zifferndarstellung des ganzzahligen Quotienten ($q$) und des Restes ($r$) von $x$ nach Division mit Rest durch $y$

  $$x = q \cdot y + r, \;\; 0 \leq r < y$$

- Division mit Rest von natürlichen Zahlen ist mehrfache Subtraktion.
- Erster Algorithmus zum Dividieren mit Rest: subtrahiere $y$ so oft wie möglich (Differenz nicht negativ) von $x$

  der ganzzahlige Quotient ist die Anzahl der Subtraktionen, der Rest ist die letzte Differenz

- Beispiel: Dividiere 53 mit Rest durch 24!

  $53 - 24 = 29, \;\; 29 - 24 = 5$

# Algorithmus für die Division mit Rest

- Gegeben: zwei natürliche Zahlen $x$ und $y$ in Zifferndarstellung

  Gesucht: Zifferndarstellung des ganzzahligen Quotienten ($q$) und des Restes ($r$) von $x$ nach Division mit Rest durch $y$

$$x = q \cdot y + r, \;\; 0 \leq r < y$$

- Division mit Rest von natürlichen Zahlen ist mehrfache Subtraktion.
- Erster Algorithmus zum Dividieren mit Rest: subtrahiere $y$ so oft wie möglich (Differenz nicht negativ) von $x$

  der ganzzahlige Quotient ist die Anzahl der Subtraktionen, der Rest ist die letzte Differenz
- Beispiel: Dividiere 53 mit Rest durch 24!

  $53 - 24 = 29, \;\; 29 - 24 = 5$

  $53 = 2 \cdot 24 + 5$, Ganzzahliger Quotient: 2, Rest 5.

# Algorithmus für die Division mit Rest

- Effizienterer Algorithmus für $x, y$ in Zifferndarstellung?
  Wie können Subtraktionen eingespart werden?

# Algorithmus für die Division mit Rest

- Effizienterer Algorithmus für $x, y$ in Ziffernndarstellung?
  Wie können Subtraktionen eingespart werden?

- Idee: Wenn man 24 von 53 2-mal abziehen kann,
  dann mindestens 20-mal von 530 und
  mindestens 200-mal von 5300.

# Algorithmus für die Division mit Rest

- Effizienterer Algorithmus für $x, y$ in Zifferndarstellung?
  Wie können Subtraktionen eingespart werden?
- Idee: Wenn man 24 von 53 2-mal abziehen kann,
  dann mindestens 20-mal von 530 und
  mindestens 200-mal von 5300.
- Beispiel: Wegen
  $53 = 2 \cdot 24 + 5$ ist
  $530 = 20 \cdot 24 + 50$ und
  $5300 = 200 \cdot 24 + 500$

# Algorithmus für die Division mit Rest

- Grundschritt: Division mit Rest mit einstelligem Quotienten!
  (Dividend ist kleiner als 10 mal Divisor)

# Algorithmus für die Division mit Rest

- Grundschritt: Division mit Rest mit einstelligem Quotienten! (Dividend ist kleiner als 10 mal Divisor)

  Wird mit erstem Algorithmus (höchstens 9-maliges Subtrahieren !) ausgeführt (oder durch Versuch und Irrtum).

# Algorithmus für die Division mit Rest

- Grundschritt: Division mit Rest mit einstelligem Quotienten! (Dividend ist kleiner als 10 mal Divisor)

  Wird mit erstem Algorithmus (höchstens 9-maliges Subtrahieren !) ausgeführt (oder durch Versuch und Irrtum).

  (Unterschied zu ersten drei Rechenoperationen: Anzahl der Grundschrittoperationen nicht endlich, können daher nicht auswendig gelernt werden).

# Algorithmus für die Division mit Rest

- Grundschritt: Division mit Rest mit einstelligem Quotienten! (Dividend ist kleiner als 10 mal Divisor)

  Wird mit erstem Algorithmus (höchstens 9-maliges Subtrahieren !) ausgeführt (oder durch Versuch und Irrtum).

  (Unterschied zu ersten drei Rechenoperationen: Anzahl der Grundschrittoperationen nicht endlich, können daher nicht auswendig gelernt werden).

- Beispiele für Grundschritte bei der Division mit Rest: $4321 : 567$, $234 : 56$, $56 : 234$, $41 : 7$

# Algorithmus für die Division mit Rest

- Grundschritt: Division mit Rest mit einstelligem Quotienten! (Dividend ist kleiner als 10 mal Divisor)

  Wird mit erstem Algorithmus (höchstens 9-maliges Subtrahieren !) ausgeführt (oder durch Versuch und Irrtum).

  (Unterschied zu ersten drei Rechenoperationen: Anzahl der Grundschrittoperationen nicht endlich, können daher nicht auswendig gelernt werden).

- Beispiele für Grundschritte bei der Division mit Rest: $4321 : 567$, $234 : 56$, $56 : 234$, $41 : 7$

- Die Divisionen mit Rest $91 : 7$ und $38 : 3$ gehören nicht zu den Grundschritten!

# Algorithmus für die Division mit Rest

Dividiere 2023 mit Rest durch 16!

$20 = 1 \cdot 16 + 4$, daher $2000 = 100 \cdot 16 + 400$

# Algorithmus für die Division mit Rest

Dividiere 2023 mit Rest durch 16!

$20 = 1 \cdot 16 + 4$, daher $2000 = 100 \cdot 16 + 400$

$2023 = 100 \cdot 16 + 423$

# Algorithmus für die Division mit Rest

Dividiere 2023 mit Rest durch 16!

$20 = 1 \cdot 16 + 4$, daher $2000 = 100 \cdot 16 + 400$

$2023 = 100 \cdot 16 + 423$

Weiter wie oben mit 423 (statt 2023):
$42 = 2 \cdot 16 + 10$, daher $420 = 20 \cdot 16 + 100$

# Algorithmus für die Division mit Rest

Dividiere 2023 mit Rest durch 16!

$20 = 1 \cdot 16 + 4$, daher $2000 = 100 \cdot 16 + 400$

$2023 = 100 \cdot 16 + 423$

Weiter wie oben mit 423 (statt 2023):
$42 = 2 \cdot 16 + 10$, daher $420 = 20 \cdot 16 + 100$

$423 = 20 \cdot 16 + 103$

# Algorithmus für die Division mit Rest

Dividiere 2023 mit Rest durch 16!

$20 = 1 \cdot 16 + 4$, daher $2000 = 100 \cdot 16 + 400$

$2023 = 100 \cdot 16 + 423$

Weiter wie oben mit 423 (statt 2023):
$42 = 2 \cdot 16 + 10$, daher $420 = 20 \cdot 16 + 100$

$423 = 20 \cdot 16 + 103$

Weiter wie oben mit 103:
$103 = 6 \cdot 16 + 7$

# Algorithmus für die Division mit Rest

Dividiere 2023 mit Rest durch 16!

$20 = 1 \cdot 16 + 4$, daher $2000 = 100 \cdot 16 + 400$

$2023 = 100 \cdot 16 + 423$

Weiter wie oben mit 423 (statt 2023):
$42 = 2 \cdot 16 + 10$, daher $420 = 20 \cdot 16 + 100$

$423 = 20 \cdot 16 + 103$

Weiter wie oben mit 103:
$103 = 6 \cdot 16 + 7$

$2023 = 100 \cdot 16 + 20 \cdot 16 + 6 \cdot 16 + 7 = 126 \cdot 16 + 7$

# Algorithmus für die Division mit Rest

Dividiere 2023 mit Rest durch 16!

$20 = 1 \cdot 16 + 4$, daher $2000 = 100 \cdot 16 + 400$

$2023 = 100 \cdot 16 + 423$

Weiter wie oben mit 423 (statt 2023):
$42 = 2 \cdot 16 + 10$, daher $420 = 20 \cdot 16 + 100$

$423 = 20 \cdot 16 + 103$

Weiter wie oben mit 103:
$103 = 6 \cdot 16 + 7$

$2023 = 100 \cdot 16 + 20 \cdot 16 + 6 \cdot 16 + 7 = 126 \cdot 16 + 7$

Statt 126 Subtraktionen wurden nur 9 Subtraktionen benötigt!

# Schreibweise für die Division mit Rest

- Dividiere 2023 mit Rest durch 16!

# Schreibweise für die Division mit Rest

- Dividiere 2023 mit Rest durch 16!
- Schreibweise („schriftliche Division“):

$$
\begin{array}{cccccc}
2 & 0 & 2 & 3 & : & 16 = 126 \\
1 & 6 & & & & \\
- & - & - & - & & \\
 & 4 & 2 & & & \\
 & 3 & 2 & & & \\
 & - & - & - & & \\
 & 1 & 0 & 3 & & \\
 & & 9 & 6 & & \\
 & - & - & - & & \\
 & & & 7 & \text{Rest} &
\end{array}
$$

# Algorithmus für die Division mit Rest

- Sachgerechter Aufbau des Unterrichts der Division mit Rest:

# Algorithmus für die Division mit Rest

- Sachgerechter Aufbau des Unterrichts der Division mit Rest: Grundvorstellung: DmR als mehrfache Subtraktion

# Algorithmus für die Division mit Rest

- Sachgerechter Aufbau des Unterrichts der Division mit Rest:
  Grundvorstellung: DmR als mehrfache Subtraktion
  Division mit Rest mit einstelligem Quotienten (Grundschritt)

# Algorithmus für die Division mit Rest

- Sachgerechter Aufbau des Unterrichts der Division mit Rest:
  Grundvorstellung: DmR als mehrfache Subtraktion
  Division mit Rest mit einstelligem Quotienten (Grundschritt)
  (Die Anzahl der Stellen von Dividend und Divisor spielt keine Rolle!)

# Algorithmus für die Division mit Rest

- Sachgerechter Aufbau des Unterrichts der Division mit Rest:
  Grundvorstellung: DmR als mehrfache Subtraktion
  Division mit Rest mit einstelligem Quotienten (Grundschritt)
  (Die Anzahl der Stellen von Dividend und Divisor spielt keine Rolle!)
  Allgemeiner Fall (beginnend mit einfachen Zahlen)

# Algorithmus für die Division mit Rest

- Sachgerechter Aufbau des Unterrichts der Division mit Rest:
  Grundvorstellung: DmR als mehrfache Subtraktion
  Division mit Rest mit einstelligem Quotienten (Grundschritt)
  (Die Anzahl der Stellen von Dividend und Divisor spielt keine Rolle!)
  Allgemeiner Fall (beginnend mit einfachen Zahlen)
- Lehrplan Volksschule

# Algorithmus für die Division mit Rest

- Sachgerechter Aufbau des Unterrichts der Division mit Rest:

  Grundvorstellung: DmR als mehrfache Subtraktion

  Division mit Rest mit einstelligem Quotienten (Grundschritt)

  (Die Anzahl der Stellen von Dividend und Divisor spielt keine Rolle!)

  Allgemeiner Fall (beginnend mit einfachen Zahlen)

- Lehrplan Volksschule

  3. Schulstufe: Multiplizieren mit einstelligem Multiplikator, Dividieren durch einstelligen Divisor (ohne und mit Rest)

# Algorithmus für die Division mit Rest

- Sachgerechter Aufbau des Unterrichts der Division mit Rest:

  Grundvorstellung: DmR als mehrfache Subtraktion

  Division mit Rest mit einstelligem Quotienten (Grundschritt)

  (Die Anzahl der Stellen von Dividend und Divisor spielt keine Rolle!)

  Allgemeiner Fall (beginnend mit einfachen Zahlen)

- Lehrplan Volksschule

  3. Schulstufe: Multiplizieren mit einstelligem Multiplikator, Dividieren durch einstelligen Divisor (ohne und mit Rest)

  4. Schulstufe: Dividieren durch ein- und zweistelligen Divisor (ohne und mit Rest) mit sinnvollen Schwierigkeitsgraden

# Änderungsvorschlag für den Lehrplan

- 3. Schulstufe: Multiplizieren mit einstelligem Multiplikator, Dividieren (mit Rest) mit einstelligem Quotienten im Zahlenraum 1000

# Änderungsvorschlag für den Lehrplan

- 3. Schulstufe: Multiplizieren mit einstelligem Multiplikator, Dividieren (mit Rest) mit einstelligem Quotienten im Zahlenraum 1000
- 4. Schulstufe: Dividieren (mit Rest) mit sinnvollen Schwierigkeitsgraden im Zahlenraum 100000

# Bemerkungen

- Diplomarbeit Julia Pöll

# Bemerkungen

- Diplomarbeit Julia Pöll

  In den Niederlanden wird die DmR wie oben vorgeschlagen unterrichtet. cf. Treffers, Anghileri, ... .

# Bemerkungen

- Diplomarbeit Julia Pöll

  In den Niederlanden wird die DmR wie oben vorgeschlagen unterrichtet. cf. Treffers, Anghileri, ... .

  Anghileri/Beizhuiszen/van Putten: Vergleichsstudie England - Niederlande zur DmR. Besseres Abschneiden der Niederländer.

# Bemerkungen

- Diplomarbeit Julia Pöll

  In den Niederlanden wird die DmR wie oben vorgeschlagen unterrichtet. cf. Treffers, Anghileri, ... .

  Anghileri/Beizhuiszen/van Putten: Vergleichsstudie England - Niederlande zur DmR. Besseres Abschneiden der Niederländer.

- DmR ist nicht Division (Umkehrung der Multiplikation)! Division erst bei Bruchzahlen möglich (Division ist Multiplikation mit dem Kehrwert).

# Bemerkungen

- Diplomarbeit Julia Pöll

  In den Niederlanden wird die DmR wie oben vorgeschlagen unterrichtet. cf. Treffers, Anghileri, ... .

  Anghileri/Beizhuiszen/van Putten: Vergleichsstudie England - Niederlande zur DmR. Besseres Abschneiden der Niederländer.

- DmR ist nicht Division (Umkehrung der Multiplikation)! Division erst bei Bruchzahlen möglich (Division ist Multiplikation mit dem Kehrwert).

  Ergebnis einer DmR: zwei natürliche Zahlen

# Bemerkungen

- Diplomarbeit Julia Pöll

  In den Niederlanden wird die DmR wie oben vorgeschlagen unterrichtet. cf. Treffers, Anghileri, ... .

  Anghileri/Beizhuiszen/van Putten: Vergleichsstudie England - Niederlande zur DmR. Besseres Abschneiden der Niederländer.

- DmR ist nicht Division (Umkehrung der Multiplikation)! Division erst bei Bruchzahlen möglich (Division ist Multiplikation mit dem Kehrwert).

  Ergebnis einer DmR: zwei natürliche Zahlen

  Ergebnis einer Division: eine Bruchzahl bzw. reelle Zahl

# Bemerkungen

- Diplomarbeit Julia Pöll

  In den Niederlanden wird die DmR wie oben vorgeschlagen unterrichtet. cf. Treffers, Anghileri, ... .

  Anghileri/Beizhuiszen/van Putten: Vergleichsstudie England - Niederlande zur DmR. Besseres Abschneiden der Niederländer.

- DmR ist nicht Division (Umkehrung der Multiplikation)! Division erst bei Bruchzahlen möglich (Division ist Multiplikation mit dem Kehrwert).

  Ergebnis einer DmR: zwei natürliche Zahlen

  Ergebnis einer Division: eine Bruchzahl bzw. reelle Zahl

  Ordnungsrelation für DmR wichtig, für Division nicht.

# Bemerkungen

- Diplomarbeit Julia Pöll

  In den Niederlanden wird die DmR wie oben vorgeschlagen unterrichtet. cf. Treffers, Anghileri, ... .

  Anghileri/Beizhuiszen/van Putten: Vergleichsstudie England - Niederlande zur DmR. Besseres Abschneiden der Niederländer.

- DmR ist nicht Division (Umkehrung der Multiplikation)! Division erst bei Bruchzahlen möglich (Division ist Multiplikation mit dem Kehrwert).

  Ergebnis einer DmR: zwei natürliche Zahlen

  Ergebnis einer Division: eine Bruchzahl bzw. reelle Zahl

  Ordnungsrelation für DmR wichtig, für Division nicht.

- Aufgabentypen, die mit DmR gelöst werden: Aufteilen (Messen) und Verteilen (Teilen).

# Literatur

Anghileri, J.: A study of progression in written calculation strategies for division.
In: Support for Learning 1, S. 363-381, 2001

Anghileri, J.; Beishuizen, M.; van Putten, K.: From Informal Strategies to Structured Procedure - Mind the Gap!
In: Educational Studies in Mathematics 2/2002, S. 149-170

Pauer, F.: Algebra und Geometrie im Schulunterricht. 3. Auflage.
Skriptum. Universität Innsbruck 2019

Pauer, F.: Algebra und Diskrete Mathematik. 4. Auflage.
Skriptum. Universität Innsbruck 2019

Pöll, J.: Die Division mit Rest in der Primarstufe.
Diplomarbeit. Universität Innsbruck 2014

Treffers, A.: Fortschreitende Schematisierung, ein natürlicher Weg zur schriftlichen Multiplikation und Division im 3. und 4. Schuljahr.
In: mathematik lehren 1, S. 16-20, 1983

Ziegenbalg, J. et al.: Algorithmen von Hammurapi bis Gödel. 3. Auflage.
Verlag Harri Deutsch 2010

Danke für die Aufmerksamkeit!

http://www.uibk.ac.at/mathematik/personal/pauer/
franz.pauer@uibk.ac.at