Rechenverfahren für Zahlen in Zifferndarstellung - der erste Kontakt mit algorithmischem Denken

Franz Pauer

Institut für Fachdidaktik

Universität Innsbruck

1. Juni 2023

Algorithmen

- 825 n. Chr. Muhammad al-Chwarizmi: „Über das Rechnen mit indischen Ziffern“

  Algorithmen (Verfahren) zum Addieren, Subtrahieren, Multiplizieren und mit Rest Dividieren von Zahlen in Zifferndarstellung

- 16. Jhd. Adam Ries: erstes Rechenbuch auf Deutsch

- Ältester Algorithmus: Euklischer Algorithmus zur Berechnung des ggT zweier natürlicher Zahlen, 300 v. Chr. oder früher.

Was sind Algorithmen?
Was bedeutet algorithmisches Denken?

- Algorithmen sind Verfahren, mit denen eine Klasse von Problemen gelöst werden kann.
- Algorithmen müssen endlich und korrekt sein, dh.:

  aus den Eingabedaten erhält man in endlich vielen Schritten Ausgabedaten und
  diese sind eine Lösung des betrachteten Problem.
- Algorithmisches Denken: Algorithmen verstehen, erklären, beurteilen, modifizieren, entwickeln
- Wichtig für Vermittlung von „algorithmischem Denken“:

  Nicht nur „So berechnet man das!“

  sondern auch „Warum berechnet man das so?“

„Algorithmen“ in den Lehrplänen (Österreich)

- Lehrplan Volksschule: „Algorithmus“ kommt nicht vor, aber: *Gewinnen der schriftlichen Rechenverfahren*

- Bildungsstandards BMBWF, Kompetenzen für die 4. Schulstufe:
  Die Schülerinnen und Schüler
  - verstehen die Algorithmen der schriftlichen Rechenverfahren,
  - können die Algorithmen der schriftlichen Verfahren für Addition, Subtraktion, Multiplikation und Division durchführen,
  - können die Lösung mit Hilfe einer Probe überprüfen.

- Viele Algorithmen im Mathematikunterricht (der Primar- und Sekundarstufe).
  Wichtig: Nicht nur „einüben“ (oder gar „drillen“), sondern auch verständlich erklären (zugrunde liegende Strategien und Ideen erklären, Korrektheit begründen) !

Algorithmen zum Rechnen mit natürlichen Zahlen in Zifferndarstellung

- Was ist mit „Berechne: $78 + 53,\ 87 - 34$ und $45 \cdot 67$“ gemeint?

  Diese Zahlen sind eindeutig bestimmt (und als Summe, Differenz, Produkt von zwei anderen dargestellt).

  Gemeint ist: Berechne die Zifferndarstellung (zur Basis 10) von $78 + 53,\ 87 - 34$ und $45 \cdot 67$.

- Bemerkung: Man kann auch ohne Zifferndarstellung mit Zahlen rechnen, cf. Archimedes!

Zifferndarstellung natürlicher Zahlen

- Zifferndarstellung zur Basis 10:

  Zu jeder natürlichen Zahl $a > 0$ gibt es eindeutig bestimmte natürliche Zahlen $n, z_n, z_{n-1}, \ldots, z_1, z_0$ so, dass $n > 0$, $0 \leq z_n, z_{n-1}, \ldots, z_1, z_0 < 10$, $z_n \neq 0$ und

  $$a = z_n \cdot 10^n + z_{n-1} \cdot 10^{n-1} + \ldots + z_0$$

  Kurzsschreibweise

  $$a = z_n z_{n-1} \ldots z_1 z_0$$

- Zifferndarstellung einer Zahl ist „Zusatzinformation“ über diese, nützlich zum schnellen Rechnen mit natürlichen Zahlen

Grundrechnungsarten

- Addition: Summe der Anzahlen zweier disjunkter Mengen ist Anzahl von deren Vereinigung
- Subtraktion: Umkehrung der Addition ($(4 + 5) - 5 = 4$)
- Multiplikation: Mehrfache Addition ($4 \cdot 5 = 5 + 5 + 5 + 5$)
- Division mit Rest: Mehrfache Subtraktion (so oft, wie möglich; Anzahl der Subtraktionen ist ganzzahliger Quotient, letzte Differenz ist Rest)

  $123 : 45 = 2$ Rest 33 bedeutet:

  $$123 - 45 - 45 = 33$$

  bzw.

  $$123 = 2 \cdot 45 + 33$$

Algorithmen zum Rechnen mit natürlichen Zahlen in Zifferndarstellung

- Gegeben: zwei natürliche Zahlen in Zifferndarstellung.
- Gesucht: Zifferndarstellung von Summe, Differenz (falls diese nicht negativ ist), Produkt und des ganzzahligen Quotienten und des Restes (nach Division mit Rest durch eine positive Zahl)

- Strategie:
  Führe gewisse einfache Rechnungen („Grundschritte“) mehrfach aus, um Aufgabe schrittweise zu lösen.

  Verwende dazu Zifferndarstellung und die Regeln für das Rechnen mit natürlichen Zahlen.

- Im Unterricht: zuerst Grundschritte einüben, dann erklären, wie und warum man durch deren mehrfaches Ausführen jede Aufgabe lösen kann.

Grundschritte

x, y natürliche Zahlen

- Addition: $x + y,\ 0 \le x, y \le 9$
  einstelligen Zahlen addieren, „kleines Einspluseins“

- Subtraktion: $x - y,\ 0 \le y \le x \le 9$ und
  $(10 + x) - y, 0 \le x < y \le 9$

- Multiplikation: $x \cdot y,\ 0 \le x, y \le 9$
  einstellige Zahlen multiplizieren, „kleines Einmaleins“

- Division mit Rest: $x : y,\ x < 10 \cdot y$
  ganzzahliger Quotient ist einstellig, y kann von x höchstens 9-mal subtrahiert werden

- je 100 Grundschritte bei A, S, M, beliebig viele bei DmR

Multiplikationsalgorithmus

- Multiplikation mit natürlichen Zahlen ist mehrfache Addition.
  Erster Algorithmus zum Multiplizieren: mehrfach Addieren.
- Effizienter Algorithmus: benutzt Zifferndarstellung und Rechenregeln.
- Grundschritt: „kleines Einmaleins“ mit erstem Algorithmus (zum schnelleren Rechnen: auswendig lernen)

  Produkt von einstelligen Zahlen ist höchstens zweistellig
  Übertrag: = Zehnerziffer dieses Produktes.
- Weiterer Grundschritt: Multiplikation mit Zehnerpotenzen $(10, 100, 1000, \dots)$

Multiplikationsalgorithmus

Multipliziere $x = x_n x_{n-1} \ldots x_1 x_0$ mit $y = y_m y_{m-1} \ldots y_1 y_0$!

Algorithmus:

- Für alle j: Multipliziere x mit y_j durch mehrfaches Anwenden des kleinen Einmaleins ($x_i \cdot y_j \cdot 10^i$, $0 \leq i \leq n$, addiere diese) und durch Multiplizieren dieses Produkts mit 10^j.
- Addiere für alle j die Produkte $x \cdot y_j \cdot 10^j$.

Sachgerechter Aufbau des Unterrichts der Multiplikation:

- kleines Einmaleins (Grundschritt)
- Multiplikation mit $10, 100, 1000, \ldots$ (Grundschritt)
- Multiplikation einer Zahl mit einer einstelligen Zahl
- Allgemeiner Fall

Multiplikationsalgorithmus

Berechne die Zifferndarstellung von $45 \cdot 67$!

- $45 \cdot 67 = 45 \cdot (6 \cdot 10 + 7) = 45 \cdot 6 \cdot 10 + 45 \cdot 7$
- $45 \cdot 6 = (4 \cdot 10 + 5) \cdot 6 = 270$, $45 \cdot 6 \cdot 10 = 2700$
- $45 \cdot 7 = 315$
- $45 \cdot 67 = 2700 + 315\ (= 315 + 2700) = 3015$
- Schreibweise („schriftliche Multiplikation“):

$$\begin{array}{cccc} & 4 & 5 & \cdot & 67 \\ & \_ & \_ & \_ & \_\_ \\ 2 & 7 & 0 & & \\ & 3 & 1 & 5 & \\ \_ & \_ & \_ & \_ & \\ 3 & 0 & 1 & 5 & \end{array} \quad \text{oder} \quad \begin{array}{cccc} & 4 & 5 & \cdot & 67 \\ & \_ & \_ & \_ & \_\_ \\ & 3 & 1 & 5 & \\ 2 & 7 & 0 & & \\ \_ & \_ & \_ & \_ & \\ 3 & 0 & 1 & 5 & \end{array}$$

Algorithmus für die Division mit Rest

- Gegeben: zwei natürliche Zahlen x und y in Zifferndarstellung

  Gesucht: Zifferndarstellung des ganzzahligen Quotienten (q) und des Restes (r) von x nach Division mit Rest durch y

  $$x = q \cdot y + r, \quad 0 \leq r < y$$

- Division mit Rest von natürlichen Zahlen ist mehrfache Subtraktion.
- Erster Algorithmus zum Dividieren mit Rest: subtrahiere y so oft wie möglich (Differenz nicht negativ) von x

  der ganzzahlige Quotient ist die Anzahl der Subtraktionen, der Rest ist die letzte Differenz

- Beispiel: Dividiere 53 mit Rest durch 24!

  $53 - 24 = 29, \;\; 29 - 24 = 5$

  $53 = 2 \cdot 24 + 5$, Ganzzahliger Quotient: 2, Rest 5.

Algorithmus für die Division mit Rest

- Effizienterer Algorithmus für x, y in Zifferndarstellung?
  Wie können Subtraktionen eingespart werden?

- Idee: Wenn man 24 von 53 2-mal abziehen kann,
  dann mindestens 20-mal von 530 und
  mindestens 200-mal von 5300.

- Beispiel: Wegen
  $53 = 2 \cdot 24 + 5$ ist
  $530 = 20 \cdot 24 + 50$ und
  $5300 = 200 \cdot 24 + 500$

Algorithmus für die Division mit Rest

- Grundschritt: Division mit Rest mit einstelligem Quotienten! (Dividend ist kleiner als 10 mal Divisor)

  Wird mit erstem Algorithmus (höchstens 9-maliges Subtrahieren !) ausgeführt (oder durch Versuch und Irrtum).

  (Unterschied zu ersten drei Rechenoperationen: Anzahl der Grundschrittoperationen nicht endlich, können daher nicht auswendig gelernt werden).

- Beispiele für Grundschritte bei der Division mit Rest: $4321 : 567$, $234 : 56$, $56 : 234$, $41 : 7$

- Die Divisionen mit Rest $91 : 7$ und $38 : 3$ gehören nicht zu den Grundschritten!

Algorithmus für die Division mit Rest

Dividiere 2023 mit Rest durch 16!

$20 = 1 \cdot 16 + 4$, daher $2000 = 100 \cdot 16 + 400$

$2023 = 100 \cdot 16 + 423$

Weiter wie oben mit 423 (statt 2023):
$42 = 2 \cdot 16 + 10$, daher $420 = 20 \cdot 16 + 100$

$423 = 20 \cdot 16 + 103$

Weiter wie oben mit 103:
$103 = 6 \cdot 16 + 7$

$2023 = 100 \cdot 16 + 20 \cdot 16 + 6 \cdot 16 + 7 = 126 \cdot 16 + 7$

Statt 126 Subtraktionen wurden nur 9 Subtraktionen benötigt!

Schreibweise für die Division mit Rest

- Dividiere 2023 mit Rest durch 16!

- Schreibweise („schriftliche Division“):

$$
\begin{array}{ccccccc}
2 & 0 & 2 & 3 & : & 16 = 126 \\
1 & 6 & & & & \\
- & - & - & - & & \\
 & 4 & 2 & & & \\
 & 3 & 2 & & & \\
 & - & - & - & & \\
 & 1 & 0 & 3 & & \\
 & & 9 & 6 & & \\
 & - & - & - & & \\
 & & & 7 & \text{Rest} &
\end{array}
$$

Algorithmus für die Division mit Rest

- Sachgerechter Aufbau des Unterrichts der Division mit Rest:

  Grundvorstellung: DmR als mehrfache Subtraktion

  Division mit Rest mit einstelligem Quotienten (Grundschritt)

  (Die Anzahl der Stellen von Dividend und Divisor spielt keine Rolle!)

  Allgemeiner Fall (beginnend mit einfachen Zahlen)

- Lehrplan Volksschule

  3. Schulstufe: Multiplizieren mit einstelligem Multiplikator, Dividieren durch einstelligen Divisor (ohne und mit Rest)

  4. Schulstufe: Dividieren durch ein- und zweistelligen Divisor (ohne und mit Rest) mit sinnvollen Schwierigkeitsgraden

Änderungsvorschlag für den Lehrplan

- 3. Schulstufe: Multiplizieren mit einstelligem Multiplikator, Dividieren (mit Rest) mit einstelligem Quotienten im Zahlenraum 1000
- 4. Schulstufe: Dividieren (mit Rest) mit sinnvollen Schwierigkeitsgraden im Zahlenraum 100000

Bemerkungen

- Diplomarbeit Julia Pöll

  In den Niederlanden wird die DmR wie oben vorgeschlagen unterrichtet. cf. Treffers, Anghileri, ...

  Anghileri/Beizhuiszen/van Putten: Vergleichsstudie England - Niederlande zur DmR. Besseres Abschneiden der Niederländer.

- DmR ist nicht Division (Umkehrung der Multiplikation)! Division erst bei Bruchzahlen möglich (Division ist Multiplikation mit dem Kehrwert).

  Ergebnis einer DmR: zwei natürliche Zahlen

  Ergebnis einer Division: eine Bruchzahl bzw. reelle Zahl

  Ordnungsrelation für DmR wichtig, für Division nicht.
- Aufgabentypen, die mit DmR gelöst werden: Aufteilen (Messen) und Verteilen (Teilen).

Literatur

Anghileri, J.: A study of progression in written calculation strategies for division.
In: Support for Learning 1, S. 363-381, 2001

Anghileri, J.; Beishuizen, M.; van Putten, K.: From Informal Strategies to Structured Procedure - Mind the Gap!
In: Educational Studies in Mathematics 2/2002, S. 149-170

Pauer, F.: Algebra und Geometrie im Schulunterricht. 3. Auflage.
Skriptum. Universität Innsbruck 2019

Pauer, F.: Algebra und Diskrete Mathematik. 4. Auflage.
Skriptum. Universität Innsbruck 2019

Pöll, J.: Die Division mit Rest in der Primarstufe.
Diplomarbeit. Universität Innsbruck 2014

Treffers, A.: Fortschreitende Schematisierung, ein natürlicher Weg zur schriftlichen Multiplikation und Division im 3. und 4. Schuljahr.
In: mathematik lehren 1, S. 16-20, 1983

Ziegenbalg, J. et al.: Algorithmen von Hammurapi bis Gödel. 3. Auflage.
Verlag Harri Deutsch 2010

Danke für die Aufmerksamkeit!

http://www.uibk.ac.at/mathematik/personal/pauer/
franz.pauer@uibk.ac.at