

Praktikum
Einführung in die Mathematik 1
WS 2009/2010

Test – Version F
19. bis 21. Januar 2010

- (1) Berechnen Sie mit Hilfe des GAUSS-Algorithmus die Lösungsmengen $L(A, 0) \subseteq \mathbb{R}^{4 \times 1}$, $L(A, b) \subseteq \mathbb{R}^{4 \times 1}$ und $L(A, c) \subseteq \mathbb{R}^{4 \times 1}$ der linearen Gleichungssysteme $Ax = 0$, $Ax = b$ und $Ax = c$. Dabei seien die Matrizen $A \in \mathbb{R}^{3 \times 4}$, $0 \in \mathbb{R}^{3 \times 1}$, $b \in \mathbb{R}^{3 \times 1}$ und $c \in \mathbb{R}^{3 \times 1}$ gegeben durch

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 20 & 3 & 2 \\ 2 & 10 & 1 & 1 \\ 6 & 30 & 6 & 4 \end{pmatrix}, \quad 0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 27 \\ 12 \\ 48 \end{pmatrix}, \quad c = \begin{pmatrix} 25 \\ 11 \\ 46 \end{pmatrix}.$$

- (2) Die Vektoren $a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}^{3 \times 1}$ seien gegeben durch

$$a_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad a_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad a_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

(a) Zeigen Sie, daß (a_1, a_2, a_3) eine \mathbb{R} -Basis von $\mathbb{R}^{3 \times 1}$ ist.

(b) Finden Sie mit Hilfe des SCHMIDT-Algorithmus (möglichst einfache) Vektoren $u_1, u_2, u_3 \in \mathbb{R}^{3 \times 1}$ mit den Eigenschaften

- $\mathbb{R} a_1 = \mathbb{R} u_1$
- $\mathbb{R} a_1 + \mathbb{R} a_2 = \mathbb{R} u_1 + \mathbb{R} u_2$
- $\mathbb{R} a_1 + \mathbb{R} a_2 + \mathbb{R} a_3 = \mathbb{R} u_1 + \mathbb{R} u_2 + \mathbb{R} u_3$
- $\langle u_1, u_2 \rangle = \langle u_1, u_3 \rangle = \langle u_2, u_3 \rangle = 0$.

Dabei sei $(x, y) \mapsto \langle x, y \rangle = x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3$ das Standard-Skalarprodukt in $\mathbb{R}^{3 \times 1}$.

(c) Verwandeln Sie die *orthogonale* Basis (u_1, u_2, u_3) von $\mathbb{R}^{3 \times 1}$ in eine *orthonormale* Basis (v_1, v_2, v_3) von $\mathbb{R}^{3 \times 1}$.

(d) Bestimmen Sie die Koordinaten des Vektors $x = (1, 1, 1)^T \in \mathbb{R}^{3 \times 1}$ bezüglich der orthonormalen Basis (v_1, v_2, v_3) .