Praktikum
Einführung in die Mathematik 1
WS 2009/2010

Test – Version E

19. bis 21. Januar 2010

(1) Berechnen Sie mit Hilfe des GAUSS-Algorithmus die Lösungsmengen $L(A,0) \subseteq \mathbb{R}^{4\times 1}$, $L(A,b) \subseteq \mathbb{R}^{4\times 1}$ und $L(A,c) \subseteq \mathbb{R}^{4\times 1}$ der linearen Gleichungssysteme $Ax = 0$, $Ax = b$ und $Ax = c$. Dabei seien die Matrizen $A \in \mathbb{R}^{3\times 4}$, $0 \in \mathbb{R}^{3\times 1}$, $b \in \mathbb{R}^{3\times 1}$ und $c \in \mathbb{R}^{3\times 1}$ gegeben durch

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 14 & 19 \\ 1 & 1 & 6 & 8 \\ 6 & 4 & 32 & 42 \end{pmatrix}, \quad 0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 10 \end{pmatrix}, \quad c = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 12 \end{pmatrix}.$$

(2) Die Vektoren $a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}^{3\times 1}$ seien gegeben durch

$$a_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad a_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad a_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}.$$

(a) Zeigen Sie, daß (a_1, a_2, a_3) eine $\mathbb{R}$-Basis von $\mathbb{R}^{3\times 1}$ ist.

(b) Finden Sie mit Hilfe des SCHMIDT-Algorithmus (möglichst einfache) Vektoren $u_1, u_2, u_3 \in \mathbb{R}^{3\times 1}$ mit den Eigenschaften
- $\mathbb{R}\, a_1 = \mathbb{R}\, u_1$
- $\mathbb{R}\, a_1 + \mathbb{R}\, a_2 = \mathbb{R}\, u_1 + \mathbb{R}\, u_2$
- $\mathbb{R}\, a_1 + \mathbb{R}\, a_2 + \mathbb{R}\, a_3 = \mathbb{R}\, u_1 + \mathbb{R}\, u_2 + \mathbb{R}\, u_3$
- $\langle u_1, u_2 \rangle = \langle u_1, u_3 \rangle = \langle u_2, u_3 \rangle = 0.$

Dabei sei $(x, y) \mapsto \langle x, y \rangle = x_1\, y_1 + x_2\, y_2 + x_3\, y_3$ das Standard-Skalarprodukt in $\mathbb{R}^{3\times 1}$.

(c) Verwandeln Sie die *orthogonale* Basis (u_1, u_2, u_3) von $\mathbb{R}^{3\times 1}$ in eine *orthonormale* Basis (v_1, v_2, v_3) von $\mathbb{R}^{3\times 1}$.

(d) Bestimmen Sie die Koordinaten des Vektors $x = (1, 1, 1)^{\mathrm{T}} \in \mathbb{R}^{3\times 1}$ bezüglich der orthonormalen Basis (v_1, v_2, v_3).